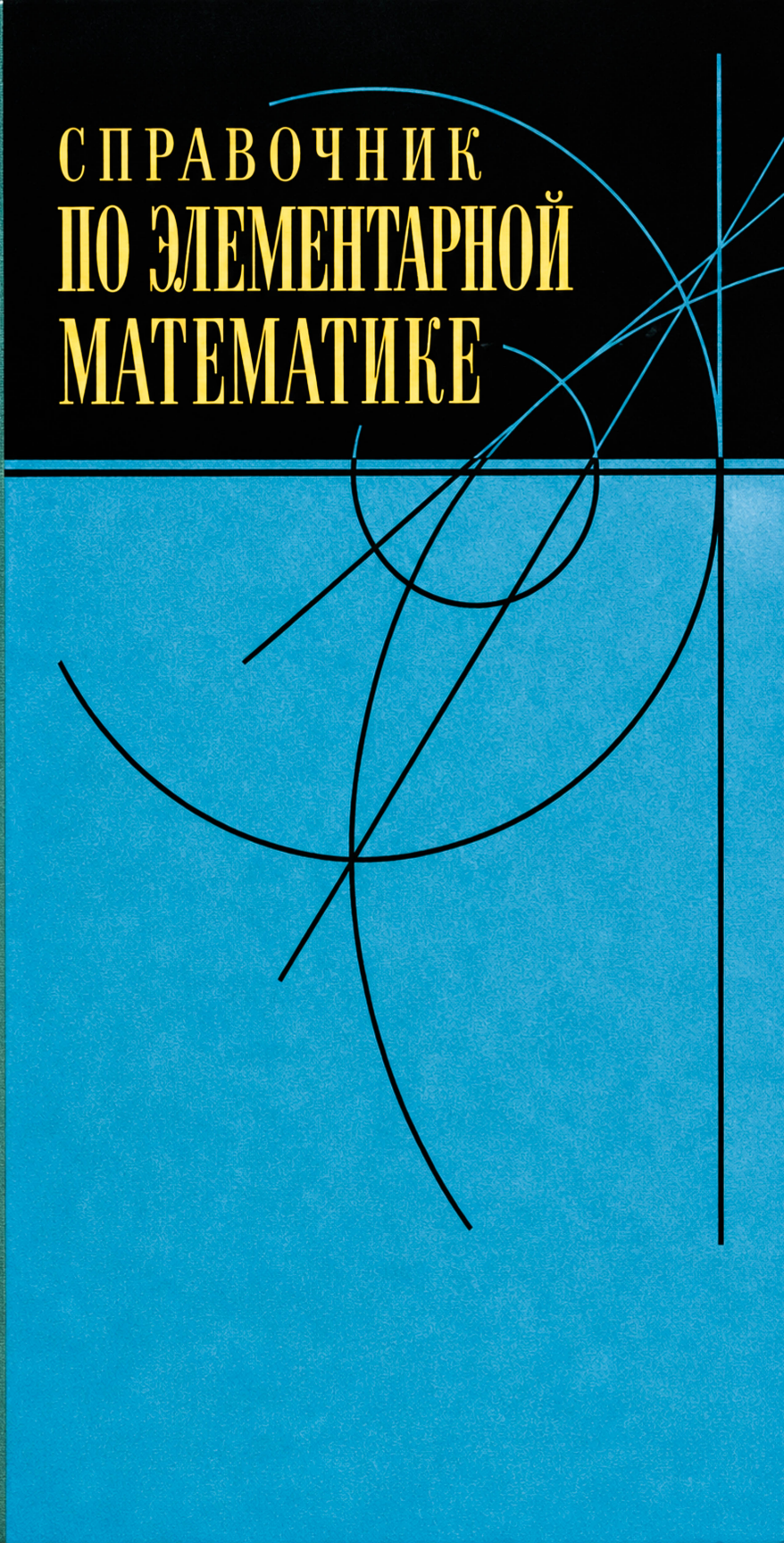
СПРАВОЧНИК ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ

СПРАВОЧНИК ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ



СПРАВОЧНИК ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ

ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В ВУЗЫ

Под редакцией
члена-корреспондента АН УССР
П. Ф. ФИЛЬЧАКОВА

«НАУКОВА ДУМКА»
КИЕВ — 1972

51 (083)
С74

УДК 51 (08)

Справочник содержит сведения по арифметике, алгебре и элементарным функциям, в том числе тригонометрическим, планиметрии и стереометрии с указаниями о способах решения примеров и задач различных типов и степеней трудности; приведены исторические справки, список литературы и подробный предметный указатель.

Рассчитан на поступающих в высшие и средние учебные заведения; представляет интерес для преподавателей средних школ и учащихся старших классов.

АВТОРЫ: Г. П. БЕВЗ, П. Ф. ФИЛЬЧАКОВ,
К. И. ШВЕЦОВ, Ф. П. ЯРЕМЧУК

2—2—2
341—72М

Редакция справочной литературы
Зав. редакцией Ю. Г. АБАНИНА

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 3

I. АРИФМЕТИКА

Предмет арифметики 5

Целые неотрицательные числа

§ 1. Нумерация 6
§ 2. Арифметические действия 9
§ 3. Свойства арифметических действий 11
§ 4. Изменение результатов действий в зависимости от изменения данных 14
§ 5. Порядок действий, скобки 16
§ 6. Проверка арифметических действий 17
§ 7. Способы быстрых вычислений 18
§ 8. Делимость чисел 20
§ 9. Признаки делимости 21
§ 10. Простые и составные числа 23
§ 11. Общие делители и кратные 25
§ 12. Недесятичные системы счисления 27

Дробные числа

§ 13. Обыкновенные дроби 31
§ 14. Изменение дроби с измененнем ее членов 33
§ 15. Преобразование дробей 34
§ 16. Арифметические действия над обыкновенными дробями . . 35
§ 17. Основные типы задач на дроби 39
§ 18. Десятичные дроби 40
§ 19. Действия над десятичными дробями 42
§ 20. Периодические десятичные дроби 43
§ 21. Проценты 45
§ 22. Основные типы задач на проценты 46
§ 23. Приближенные вычисления 48
§ 24. Приближенные вычисления с помощью правил подсчета цифр 50
§ 25. Приближенные вычисления по способу границ 52

Величины и пропорции

§ 26. Измерение величины 53
§ 27. Метрическая система мер 54
§ 28. Система СИ 55
§ 29. Исторические сведения о метрологии 56
§ 30. Именованные числа 58
§ 31. Отношение чисел 60
§ 32. Пропорции 61
§ 33. Арифметические задачи 64

II. АЛГЕБРА И ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

Исторические сведения о развитии алгебры 72

Рациональные числа и алгебраические выражения

§ 1. Рациональные числа 76
§ 2. Действия с рациональными числами 77
§ 3. Алгебраические выражения 79
§ 4. Тождественные преобразования целых выражений 82
§ 5. Действия над целыми алгебранческими выражениями . . 84
§ 6. Формулы сокращенного умножения 88
§ 7. Разложение многочленов на множители 90
§ 8. Алгебраические дроби 92
§ 9. Действия с алгебраическими дробями 94

Иррациональные числа и алгебраические выражения

§ 10. Квадратные корни 97
§ 11. Иррациональные числа 98
§ 12. Действия над действительными числами 101
§ 13. Иррациональные выражения 103
§ 14. Действия с радикалами 109
§ 15. Степени с отрицательными, нулевыми и дробными показателями 115

Уравнения и неравенства

§ 16. Общие сведения об уравнениях 119
§ 17. Уравнения первой степени 123
§ 18. Решение задач с помощью уравнений первой степени с одним неизвестным 126
§ 19. Системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными 128
§ 20. Системы линейных уравнений с тремя неизвестными . . . 134
§ 21. Решение задач с помощью системы уравнений 138
§ 22. Квадратные уравнения 140
§ 23. Задачи на составление квадратных уравнений 146
§ 24. Иррациональные уравнения 149
§ 25. Системы уравнений второй степени с двумя неизвестными . . 153
§ 26. Задачи на составление систем уравнений 157
§ 27. Неравенства 161
§ 28. Неравенства первой степени 167
§ 29. Неравенства второй степени и высших степеней 171

Комплексные числа и уравнения высших степеней

§ 30. Комплексные числа 175
§ 31. Тригонометрическая форма комплексного числа 180
§ 32. Исторические сведения о комплексных числах 183
§ 33. Уравнения высших степеней 184

Соединения и бином Ньютона

§ 34. Соединения 192
§ 35. Решение примеров и задач на соединения 196
§ 36. Бином Ньютона 198

Элементарные функции и их свойства

§ 37. Функциональная зависимость величин 202
§ 38. Свойства функций 205
§ 39. Простейшие функции и их графики 210
§ 40. Графические способы решения уравнений и неравенств 215

Показательная и логарифмическая функции

§ 41. Показательная функция 217
§ 42. Логарифмы 218
§ 43. Десятичные логарифмы 223
§ 44. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства 225
§ 45. Исторические сведения о логарифмах 235

Тригонометрические функции

§ 46. Исторические сведения 236
§ 47. Обобщение понятия угла. Измерение дуг и углов 237
§ 48. Тригонометрические функции произвольного угла . . . 240
§ 49. Основные тригонометрические тождества 245
§ 50. Формулы сложения и вычитания аргументов тригонометрических функций 247
§ 51. Формулы приведения 248
§ 52. Четность и нечетность тригонометрических функций . . . 250
§ 53. Формулы двойных и тройных углов (аргументов) 250
§ 54. Формулы половинного аргумента 252
§ 55. Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму 253
§ 56. Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведения 255
§ 57. Формулы, выражающие тригонометрические функции через тангенс половинного аргумента 258
§ 58. Преобразование тригонометрических выражений с помощью введения вспомогательного аргумента 258
§ 59. Тригонометрические функции абстрактного аргумента . . 259
§ 60. Периодичность тригонометрических функций 260
§ 61. График и некоторые свойства функции $y = \sin x$ 260
§ 62. График и некоторые свойства функции $y = \cos x$ 263
§ 63. График и некоторые свойства функции $y = \operatorname{tg} x$ 264
§ 64. График и некоторые свойства функции $y = \operatorname{ctg} x$ 265
§ 65. Простые гармонические колебания 266

Тригонометрические уравнения и неравенства

§ 66. Простейшие тригонометрические уравнения . . . .
§ 67. О решении тригонометрических уравнений . . . . .
§ 68. Методы решения тригонометрических уравнений с функция одного аргумента . . . . . .
§ 69. Тригонометрические уравнения с функциями разных ар ментов . . . . . .
§ 70. Графические методы решения тригонометрических уравне
§ 71. Системы тригонометрических уравнений . . . . . .
§ 72. Тригонометрические неравенства . . . . . .
§ 73. Обратные тригонометрические функции . . . . . .

Функции натурального аргумента

§ 74. Числовые последовательности . . . . . .
§ 75. Арифметическая прогрессия . . . . . .
§ 76. Геометрическая прогрессия . . . . . .
§ 77. Метод математической индукции . . . . . .

III. ГЕОМЕТРИЯ

ПЛАНИМЕТРИЯ

§ 1. Предмет геометрии. Краткие сведения о ее развитии .
§ 2. Основные понятия . . . . . .
§ 3. Действия с отрезками . . . . . .
§ 4. Деление отрезка в заданном отношении . . . . .
§ 5. Деление отрезка в среднем и крайнем отношении. Зол сечение . . . . . .
§ 6. Гармоническая группа точек. Гармоническое раздел
§ 7. Аксиоматика. Определения. Теоремы. Доказательства
§ 8. Необходимые и достаточные условия . . . . . .
§ 9. Углы . . . . . .
§ 10. Параллельные прямые . . . . . .
§ 11. Многоугольники . . . . . .
§ 12. Треугольники . . . . . .
§ 13. Соотношения между элементами треугольника . . .
§ 14. Признаки равенства треугольников . . . . . .
§ 15. Подобие треугольников и многоугольников . . . .
§ 16. Понятие о площади и ее измерении . . . . . .
§ 17. Площадь треугольника . . . . . .
§ 18. Сводная таблица частных случаев треугольников . .
§ 19. Параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат . .
§ 20. Трапеция . . . . . .
§ 21. Окружность и круг . . . . . .
§ 22. Углы в круге . . . . . .
§ 23. Длина окружности. Площадь круга и его частей . .
§ 24. Степень точки относительно данной окружности. Ради ная ось. Радикальный центр . . . . . .
§ 25. Вписанные и описанные многоугольники . . . . .
§ 26. Правильные многоугольники . . . . . .
§ 27. Сводная таблица частных случаев четырехугольников .

Геометрические задачи на построение с помощью циркуля и линейки

§ 28. Простейшие задачи на построение 392
§ 29. Метод геометрических мест точек 404
§ 30. Метод подобия 408
§ 31. Метод симметрии 410
§ 32. Метод параллельного переноса 413
§ 33. Метод инверсии 414
§ 34. Построение фигур, равновеликих данным 417
§ 35. Алгебраический метод решения геометрических задач на построение 418
§ 36. Построение корней квадратного уравнения 420
§ 37. Геометрические задачи на неравенства 422

СТЕРЕОМЕТРИЯ

Общие замечания 425

Прямые и плоскости в пространстве

§ 38. Основные свойства плоскости 425
§ 39. Взаимное расположение двух прямых в пространстве . . . 426
§ 40. Взаимное расположение прямой и плоскости 427
§ 41. Параллельные плоскости 432
§ 42. Двугранные углы и перпендикулярные плоскости 434
§ 43. Задачи на построение в стереометрии 436
§ 44. Многогранные углы 440

Многогранники

§ 45. Основные определения 443
§ 46. Призма и параллелепипед 443
§ 47. Объем призмы и параллелепипеда 445
§ 48. Пирамида 450
§ 49. Усеченная пирамида 456
§ 50. Клин. Обелиск 459
§ 51. Подобие многогранников 460
§ 52. Правильные многогранники 461
§ 53. Построение плоских сечений многогранников 464

Круглые тела

§ 54. Цилиндр 467
§ 55. Конус 472
§ 56. Усеченный конус 476
§ 57. Конические сечения 480
§ 58. Сфера и шар 481
§ 59. Поверхность и объем шара и его частей 482
§ 60. Вписанный и описанный шары 488
§ 61. Геометрические места точек и прямых в пространстве . . . 490

Применение тригонометрических фуикций к решению задач по геометрии

§ 62. Решение прямоугольных треугольников 492
§ 63. Решение прямолииейных треугольников 493
§ 64. Применение тригонометрических функций к решению планиметрических задач 500
§ 65. Применение тригонометрических функций к решению стереометрических задач 504

Литература 510

Алфавитный указатель 512

ПРЕДИСЛОВИЕ

Проекты учебных программ и планов для средней школы, составленные в 1968 г. с участием ведущих ученых нашей страны, широко обсуждались работниками народного просвещения и науки. В них предусмотрено дальнейшее серьезное повышение научно-теоретического уровня среднего образования.

В частности, повышение теоретического уровня курса математики, как указано в объяснительной записке к проекту новой программы, достигается преодолением разрыва между арифметикой и алгеброй, осуществлением строго научного подхода к изучению материала, усилением внимания к понятиям и методам, имеющим основное значение для естествознания и техники (метод координат, векторы, производная и интеграл).

Проект учебного плана предусматривает также сокращение нагрузки учащихся обязательными учебными занятиями, расширение самостоятельной работы учащихся, факультативных занятий и занятий по выбору. Не оставлены без внимания вопросы подготовки учащихся к дальнейшему самообразованию и образованию без отрыва от производства по окончании школы. Следовательно, возникает необходимость в расширении учебной и справочной литературы, которая наиболее полно соответствовала бы новым требованиям программы.

Часто о том или другом человеке говорят: «Он знает математику» или «он плохо знает математику» и рассматривается это как нечто установленное, застывшее. Возникает вопрос: что такое «знать математику»?

В математике, как и в другой точной науке, уровень знаний определяется двумя факторами.

Первый фактор — достаточно большое количество усвоенного и твердо запомнившегося материала: определений, формулировок теорем и свойств, формул и т. д. Усвоение фактического материала происходит в процессе упражнений, однако следует как можно быстрее добиваться его твердого запоминания, обеспечивая для памяти возможность дальнейшего постоянного обогащения. Не может быть и речи о каких-либо серьезных знаниях, если учащийся не запомнит той или иной формулы, а попытается «выводить» даже мелкие факты (например, выражение диагонали квадрата через его сторону, вычисление высоты и площади равностороннего треугольника по его стороне и т. д.).

Второй фактор, который тесно связан с первым и отнюдь не является достоянием только лишь талантливых от природы,— это достаточно глубокое развитие аналитических способностей и навыков, не-

обходимых при выполнении сложных преобразований, четких пространственных представлений и «геометрического» мышления, опыта и интуиции, необходимых при отыскании путей к решению нешаблонных «творческих» задач. Только насыщенная фактами, аналогичными ситуациями и различными, даже отдаленными, связями память способна вовремя подать необходимый «инструмент» для глубоких размышлений над той или иной проблемой для ее всестороннего анализа.

Таким образом, процесс повышения уровня математических знаний представляет собой постоянное совершенствование в двух неразрывно связанных направлениях, отмеченных выше. Этому и призваны способствовать справочники, являющиеся по существу «малогабаритными конденсаторами» большого количества фактического материала, наводящих рекомендаций и сведений по различным методам решения задач и т. д.

Предлагаемый вниманию читателей справочник содержит определения и описания понятий, формулировки правил, теорем, законов, свойств, важнейшие формулы, некоторые методические замечания. В нем есть также много упражнений и задач различной степени трудности. Особенно большое внимание уделено здесь задачам на доказательство и построения. Помещены также исторические справки. Большинство из них подготовлено членом-корреспондентом АН УССР А. Н. Боголюбовым.

Читателям следует иметь в виду, что в новых школьных учебниках математики существенно изменена терминология. Например, вместо «абсолютная величина числа», начиная с V класса, говорят «модуль числа», вместо «выражение с одной буквой» — «выражение с одной переменной», вместо «геометрическое место точек» — «множество точек». В справочнике говорится об этом. Однако авторы не считают целесообразным уже в данном издании полностью отказаться от традиционной терминологии, так как читателям, которые учились и еще лет 5 будут учиться по старым учебникам, такие изменения усложнили бы пользование справочником.

Все критические замечания и предложения по данному справочнику, которые составителями будут приняты с благодарностью, просьба направлять по адресу: Киев-4, ул. Репина, 3, Издательство «Наукова думка».

I. АРИФМЕТИКА

ПРЕДМЕТ АРИФМЕТИКИ

Арифметика — наука о числах. Название «арифметика» произошло от греческого слова αριθμητιχη, состоящего из двух частей: αριθμοζ — число и τεχνη — искусство. Арифметика, как и многие другие науки, возникла из потребностей практической деятельности людей. Еще задолго до нашей эры возникла необходимость подсчитывать количество добычи, вести счет времени и т. п. Несомненно, что сначала люди оперировали только конкретными именованными числами, и только позже начали употреблять абстрактные.

Сначала были известны только натуральные числа, но позже жизнь заставила расширить это понятие, рассматривать и дробные числа. Когда впервые появилось понятие дроби, не известно. Но исследования показывают, что древние египтяне, китайцы, хорезмийцы за много веков до нашей эры были знакомы с дробными числами и умели выполнять простейшие арифметические действия над ними.

В арифметике как науке рассматриваются все виды чисел от натуральных до комплексных. Однако в школьной арифметике изучают только положительные рациональные числа, а остальные виды чисел рассматриваются в алгебре. Авторы данного справочника придерживаются школьных традиций. Отрицательные, иррациональные и мнимые числа изложены в главе «Алгебра» а в главе «Арифметика» рассматриваются только натуральные и дробные.

Первые книги, содержащие учение о счете и вычислениях, появились еще за несколько веков до нашей эры. Много арифметических сведений есть в «Началах» Евклида (III в. до н. э.), в «Арифметике» Диофанта (III в. н. э.) и других книгах древнегреческих математиков.

Известный хорезмский математик Мухаммед ибн Муса (около 780—850 гг.), использовав известные ему работы греческих и индийских математиков, написал книгу по арифметике, которая в латинском переводе попала в Европу в XII в. и содействовала распространению десятичной позиционной нумерации.

В Киевской Руси были широко распространены элементарные сведения из области арифметики, включая действия с обыкновенными дробями, что доказывается наличием косвенных источников. От XVII в. сохранились рукописи математического содержания, из анализа которых явствует, что познания в арифметике на Руси того времени соответствовали уровню, достигнутому в Западной Европе. В начале XVIII в. появляются и печатные учебники по арифметике. Так, в 1703 г.

была издана «Арифметика» Л. Ф. Магницкого, самая популярная книга на протяжении первой половины XVIII в., которую М. В. Ломоносов называл «вратами своей учености». Этот учебник энциклопедического содержания, кроме арифметики, включал элементы геометрии и технических наук. В 1740 г. было напечатано «Руководство к арифметике» Л. Эйлера. Во второй половине XVIII в. вышли из печати учебники арифметики, написанные академиками С. К. Котельниковым, С. Я. Румовским и другими авторами. Широко распространены были в то время «Универсальная арифметика» Н. Г. Курганова, а также «Теоретическая и практическая арифметика» профессора Московского университета Д. С. Аничкова.

В 1866 были изданы «Руководство арифметики» и «Собрание арифметических задач» А. Ф. Малинина и К. П. Буренина, по которым учились в русских средних школах на протяжении полустолетия. Во второй половине XIX в. вышли в свет учебники по арифметике Ф. И. Симашко, В. А. Латышева, В. А. Евтушевского и других авторов. В 1884 г. издана «Арифметика» А. П. Киселева, на которой воспиталось несколько поколений русских, а затем и советских специалистов и которую только недавно заменил учебник «Арифметика» И. Н. Шевченко.

Целые неотрицательные числа

§ 1. Нумерация

Натуральный ряд чисел. Когда пересчитывают какие-нибудь предметы, называют в строго определенном порядке числа: *один*, *два*, *три*, *четыре*, *пять*, *шесть* и т. д. Изображают их символами

1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

Эти числа называют *натуральными*. Множество натуральных чисел, упорядоченных в строго определенной указанной выше последовательности, называют натуральным рядом чисел, или короче *натуральным рядом*.

То из двух натуральных чисел, которое в натуральном ряде ближе стоит к 1, т. е. которое при счете появляется раньше, называется *меньшим*, второе число — *большим**. Следовательно, в натуральном ряде каждое число, кроме 1, больше предыдущего. 1 — наименьшее натуральное число, но наибольшего натурального числа нет. Как бы велико ни было натуральное число, существует еще большее число, следующее за ним. Натуральный ряд бесконечен. Это показал еще в III в. до н. э. древнегреческий математик Архимед.

Устная нумерация. При помощи слов «один», «два», «три», «четыре», «пять», «шесть», «семь», «восемь», «девять», «десять», «сорок», «сто», «тысяча», «миллион», «миллиард», определенным способом комбинируя их, можно назвать очень большие числа, встречающиеся в практике.

Устная нумерация у большинства народов появилась очень давно.

---

* Приведенные выше описания нельзя считать строгими определениями. Строгие определения этих понятий очень сложны (см. «Энциклопедия элементарной математики», I, Гостехиздат, М., 1951, стр. 130, 142 и др.).

Письменная нумерация. Для записи натуральных чисел используют символы 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Их называют *цифрами.* С помощью этих десяти цифр можно записать любое натуральное число.

Пример. 327 — триста двадцать семь, 1002 — тысяча два.

Такая экономная запись чисел достигается благодаря применению *принципа поместного значения цифр.* В зависимости от занимаемого цифрой места она может обозначать то одно, то другое число. Так, в приведенном выше примере цифра 2 в первом случае обозначает двадцать, а во втором — два.

Первая, вторая, третья и т. д. цифры числа, если считать справа налево, называются соответственно цифрами единиц, десятков, сотен и т. д. Их называют еще единицами первого, второго, третьего и т. д. *разрядов.* Например, в числе 7194 имеется 4 единицы первого, 9 единиц второго, 1 единица третьего и 7 единиц четвертого разрядов. Цифрой «0» — нуль обозначают отсутствие единиц того или иного разряда. Десять единиц какого-нибудь разряда составляют одну единицу следующего высшего разряда. Поэтому говорят, что мы пользуемся *десятичной системой счисления.*

Десятичная система счисления возникла в глубокой древности. Люди стали пользоваться ею потому, что привыкли считать десятками, имея на руках десять пальцев. Однако некоторые народы в свое время создали и недесятичные системы счисления (см. стр. 30).

Принцип поместного значения цифр и их начертания (правда, несколько отличные от современных) возникли в Индии только в начале н. э. В Европе они стали известны благодаря книге «Арифметика Индорум», которую написал хорезмский математик Мухаммед ибн Муса. Она была написана на арабском языке и поэтому стали называть эти цифры *арабскими.* Позже, узнав, что Мухаммед в основу имеющейся в книге нумерации положил практику вычислителей Индии, стали называть эти цифры *индийскими.*

В России с индийской нумерацией познакомились только в XIII в. До этого числа обозначали старославянскими буквами, только сверху писали специальные значки ~ (титло):

а	в	г	д	є	ѕ	з	и	ѳ
1	2	3	4	5	6	7	8	9
і	к	л	м	н	ѯ	о	п	ч
10	20	30	40	50	60	70	80	90
р	с	т	у	ф	х	ѱ	ѿ	ц
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Тысячи обозначали теми же буквами, но впереди ставили значок ⁜ Например, числа 7205, 1963 записывали соответственно так:

⁜зсє, ⁜ацѯг.

В некоторых случаях и сейчас пользуются *римскими цифрами.* Римская система нумерации состоит из семи знаков:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000.

При этом, если меньший знак пишется после большего, то его прибавляют к большему числу; если же перед большим — вычитают, например: 8 — VIII, 24 — XXIV, 26 — XXVI, 46 — XLVI, 176— CLXXVI, 1963 — MCMLXIII.

Целые числа. О нуле мы уже упоминали, но рассматривали его только как цифру (знак), а не число. Однако в математике принято рассматривать *нуль* не только как цифру, но и *как число.*

0 — число не натуральное. Нуль меньше 1 и любого натурального числа. Если разместить нуль и все натуральные числа в порядке возрастания, получим:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots .$$

Эту последовательность чисел называют *расширенным натуральным рядом.*

Все натуральные числа и нуль называются вместе *целыми неотрицательными числами. Целыми числами* называют все натуральные числа, нуль и все целые отрицательные числа: —1, —2 и т. д.

Названия больших чисел. Для удобства чтения и запоминания больших чисел их цифры разбивают на классы: справа отделяют три цифры — первый класс, следующие три — второй класс и т. д. Последний класс может иметь три, две или одну цифру. Между классами обычно оставляют небольшие промежутки. Например, в числе 2 365 423 первый класс дает число единиц, второй — число тысяч и третий — число миллионов. Сообразно с этим записанное число читают так: два миллиона триста шестьдесят пять тысяч четыреста двадцать три.

Единицы четвертого, пятого, шестого и т. д. классов называют соответственно

миллиард или биллион	— 1 000 000 000,
триллион	— 1 000 000 000 000,
квадриллион	— 1 000 000 000 000 000,
квинтиллион	— 1 000 000 000 000 000 000,
секстиллион	— 1 000 000 000 000 000 000 000,
септиллион	— 1 000 000 000 000 000 000 000 000.

Эти названия возникли сравнительно недавно. Существующее сейчас в большинстве европейских языков выражение «миллион» — 10^6 возникло в Италии в XIII в.* Термины «биллион», «миллиард» и т. п. возникли в XVI—XVII вв., но до сих пор имеют различное (в разных языках) значение. Миллиард обычно означает 10^9, но то же значение имеет в США и во Франции биллион, тогда как в Германии биллион означает 10^{12}. Триллион в США и во Франции означает 10^{12}, а в Англии и Германии — 10^{18}. В русских математических рукописях встречаются наименования больших чисел, возникших, по-видимому, не раньше XII в.: тьма — 10^6, легион — 10^{12}, леодр — 10^{24}, ворон — 10^{48}, колода — 10^{49}.

---

* 10^6 = 1 000 000. Вообще 10^n обозначает число, записанное единицей с n последующими нулями.

§ 2. Арифметические действия

Если по двум данным числам определяют третье число, удовлетворяющее некоторым условиям, то этот процесс в математике вообще называют *действием*.

В арифметике рассматривают следующие действия: *сложение, вычитание, умножение и деление*. Их называют *арифметическими действиями*.

Сложение. *Сложением натуральных чисел называют арифметическое действие, при помощи которого узнают число, содержащее столько единиц, сколько их есть в данных числах вместе.*

Числа, которые нужно сложить, называют *слагаемыми*, а результат сложения называют *суммой*.

Например: $11 + 9 = 20$. Здесь 11 и 9 — слагаемые, 20 — сумма. Знак сложения + (плюс) ставится между слагаемыми.

Однозначные* числа складывают, пользуясь *таблицей сложения*:

$$1 + 1 = 2,$$

$$2 + 1 = 3 \text{ и т. д.}$$

Эту таблицу дети запоминают еще в первом классе.

Сложение многозначных чисел удобней выполнять «в столбик», записывая слагаемые так: единицы против единиц, десятки против десятков и т. д., например

$$\begin{array}{r} 29327 \\ +\ 4398186 \\ \hline 4427513. \end{array}$$

Вычитание. *Вычитанием называется действие, посредством которого по данной сумме двух слагаемых и одному из них отыскивается другое слагаемое.* Таким образом, число, которое при сложении является искомым, при вычитании оказывается данным, и наоборот. Поэтому вычитание называют действием, обратным сложению.

Число, из которого вычитают, называется *уменьшаемым*. Число, которое вычитают,— *вычитаемым*. Число, которое получается в результате вычитания, называется *разностью*.

Пример. $30 - 12 = 18$. Здесь 30 — уменьшаемое, 12 — вычитаемое, а 18 — разность. Знак вычитания минус (—) ставится между уменьшаемым и вычитаемым.

Вычитание в множестве натуральных чисел выполнимо лишь при условии, когда уменьшаемое больше вычитаемого. При этом разность выражается всегда определенным единственным натуральным числом.

Примечание: а) вычитание нуля из числа не изменяет этого числа, например, $8 - 0 = 8$;

б) если уменьшаемое равно вычитаемому, то разность равна нулю. Например, $9 - 9 = 0$.

Умножение. *Умножением натуральных чисел называется действие нахождения суммы одинаковых слагаемых.* Например, если число 5 нужно повторить слагаемым 7 раз, то пишут $5 \times 7 = 35$ и говорят, что нужно 5 умножить на 7:

$$5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 5 \times 7.$$

---

* *Однозначными, двузначными* и т. д. называют числа, записанные одной, двумя и т. д. цифрами. Число записанное несколькими цифрами, называют также *многозначным*.

Можно сказать иначе: умножить одно натуральное число на другое — значит взять первое число слагаемым столько раз, сколько единиц во втором числе. При этом то число, которое повторяется как слагаемое, называется *множимым*; число, показывающее, сколько берется таких одинаковых слагаемых,— *множителем*; число, полученное в результате умножения,— *произведением*. Так, в нашем примере, 5 — множимое, 7 — множитель, 35 — произведение. Множимое и множитель называются также *сомножителями*.

Знак умножения ($\times$) ставится между множимым и множителем. В качестве знака умножения часто употребляется точка ($\cdot$), например $3 \cdot 5 = 15$. (Перед буквенными сомножителями знак умножения не ставят.)

Примечание: а) если один из двух сомножителей равен единице, то произведение равно второму сомножителю, например

$$1 \cdot 5 = 5; \quad 10 \cdot 1 = 10;$$

б) если хоть один сомножитель равен нулю, то и произведение равно нулю:

$$0 \cdot 342 = 0; \quad 37 \cdot 0 = 0; \quad 0 \cdot 0 = 0.$$

Деление. *Делением называется действие, посредством которого по данному произведению двух сомножителей и одному из этих сомножителей отыскивается другой сомножитель.*

Число, которое делят, называется *делимым*; число на которое делят,— *делителем*; число, получаемое в результате деления, называется *частным*, или отношением.

Деление записывается так: $40 : 8 = 5$. Здесь 40 — делимое, 8 — делитель, а 5 — частное. Знак деления : (двоеточие) ставится между делимым и делителем.

Число, являющееся при умножении искомым, при делении оказывается данным, и наоборот. Поэтому деление называется действием, обратным умножению.

Примечание: а) если делимое равно делителю, то частное равно единице, например $14 : 14 = 1$;

б) если делитель равен единице, то частное — делимому, например $14 : 1 = 14$;

в) частное от деления нуля на какое-либо отличное от нуля число равно нулю, например $0 : 12 = 0$;

г) деление на нуль невозможно.

Деление натуральных чисел не всегда выполнимо. Например, нельзя разделить 30 на 7, ибо нет такого натурального числа, которое при умножении на 7 давало бы 30.

Деление с остатком. Как видим, разделить 30 на 7 в указанном выше смысле невозможно. Но в жизни встречаются ситуации, которые требуют распространить деление натуральных чисел и на такие случаи, например, разделить 30 тетрадей между 7 учениками поровну.

Поэтому рассматривают также *деление с остатком*.

Примечание. Чтобы не смешивать деление с остатком и рассмотренное выше арифметическое действие деления, последнее называют еще делением без остатка или делением нацело.

Деление с остатком есть отыскание наибольшего целого числа, которое в произведении с делителем дает число, не превышающее делимого. Искомое число называется *неполным частным*. Разность между

делимым и произведением делителя на неполное частное называется *остатком;* он всегда меньше делителя.

Пример. 19 не делится нацело на 5. Числа 1, 2, 3 при умножении на 5 дают 5, 10, 15, не превосходящие делимого 19, но уже 4 дает в произведении с 5 число 20, большее 19. Поэтому неполным частным является 3, а остатком — 4 (разность между 19 и произведением $3 \cdot 5 = 15$); $19 = 5 \cdot 3 + 4$.

Для натуральных чисел точному делению (делению без остатка) и делению с остатком можно дать следующее общее определение: разделить число a (делимое) на число b (делитель) — значит найти такие два числа q (частное) и r (остаток), которые удовлетворяли бы соотношениям

$$a = bq + r, \quad 0 \leqslant r < b.$$

Если делитель b не равен нулю, то деление всегда возможно и дает единственный результат.

Остатком при делении на число b может быть любое из чисел 0, 1, 2, ..., $b - 1$.

Примечание. Название действия, общепринятое в западноевропейских языках и применявшееся в России вплоть до первой половины XVIII в., «дивизио» заимствовано из латинского языка. Знак деления (:) был принят в XVII в.

Возведение в степень. Частный случай умножения, а именно умножение одинаковых чисел, называют *возведением в степень.* Если, например, надо перемножить 5 одинаковых чисел, каждое из которых равно 2, говорят: надо число возвести в пятую степень. И вместо $2 \cdot 2 \cdot 2 \times \times 2 \cdot 2$ пишут 2^5.

Возвести число во вторую, третью, четвертую и т. д. степень значит взять его сомножителем соответственно два, три, четыре и т. д. раза*. Число, повторяющееся сомножителем, называется *основанием степени;* число, указывающее сколько раз берется одинаковый множитель, называется *показателем степени,* а результат — *степенью.*

Запись: $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$; здесь 5 — основание степени, 3 — показатель степени, 125 — степень.

Вторая степень называется иначе *квадратом,* третья степень — *кубом.* Первой степенью числа называют само это число, например $7^1 = 7$.

§ 3. Свойства арифметических действий

Законы сложения: 1. Переместительный: *сумма не изменяется от перемены мест слагаемых.* Переместительный закон в общем виде записывается равенством

$$a + b = b + a.$$

2. Сочетательный: *сумма не изменится, если какую-нибудь группу рядом стоящих слагаемых заменить их суммой.* В общем виде это свойство для трех слагаемых записывается как

$$a + b + c = a + (b + c).$$

Переместительный и сочетательный законы называют также соответственно *коммутативным* и *ассоциативным* законами.

---

* О возведении в отрицательную, нулевую и дробную степени см. стр. 116.

Правило прибавления суммы к числу и числа к сумме. Чтобы прибавить к какому-нибудь числу сумму нескольких чисел (или наоборот), достаточно прибавить к этому числу одно слагаемое, к полученной сумме прибавить второе слагаемое и т. д.

Правила вычитания: 1. Вычитание суммы из числа. Чтобы вычесть сумму из числа, можно вычесть из этого числа одно слагаемое, из полученной разности — второе слагаемое и т. д.

Обозначим уменьшаемое буквой a, отдельные слагаемые вычитаемой суммы буквами b и c, тогда свойство можно записать так:

$$a - (b + c) = a - b - c.$$

Пример. $25 - (13 + 5) = 25 - 5 - 13 = 20 - 13 = 7$.

2. Вычитание числа из суммы: Чтобы вычесть число из суммы, можно вычесть это число из какого-нибудь одного слагаемого (предполагается, что слагаемое больше вычитаемого) и полученную разность прибавить к сумме остальных слагаемых, т. е.

$$(a + b) - c = (a - c) + b = a + (b - c).$$

Примеры: $(36 + 27) - 16 = (36 - 16) + 27 = 47$,

$$(36 + 27) - 17 = 36 + (27 - 17) = 46.$$

3. Прибавление разности. Чтобы прибавить разность к числу, достаточно прибавить к нему уменьшаемое и из полученной суммы вычесть вычитаемое, т. е.

$$a + (b - c) = a + b - c.$$

Пример. $50 + (36 - 16) = 50 + 20 = 70$, или $50 + 36 = 86$, $86 - 16 = 70$.

4. Вычитание разности. Чтобы вычесть разность из числа, достаточно вычесть из него уменьшаемое (если это возможно) и к полученной разности прибавить вычитаемое.

Это свойство в общем виде записывается так:

$$a - (b - c) = a - b + c.$$

Пример. $65 - (35 - 18) = (65 - 35) + 18 = 48$.

Законы умножения: 1. Переместительный: *произведение не изменяется от перемены мест сомножителей.*

Если обозначим первый сомножитель буквой a, а второй — буквой b, то переместительный закон можно записать в виде равенства

$$ab = ba.$$

2. Сочетательный: *произведение не изменится, если какую-нибудь группу рядом стоящих сомножителей заменить их произведением.*

В общем виде этот закон можно записать так:

$$abc = a(bc).$$

3. Распределительный (относительно суммы): *произведение суммы нескольких чисел на какое-нибудь число равно сумме произведений каждого слагаемого на это число.* В общем виде для случая трех слагаемых этот закон можно записать так:

$$(a + b + c)d = ad + bd + cd.$$

Переместительный, сочетательный и распределительный законы называют также соответственно *коммутативным*, *ассоциативным* и *дистрибутивным*.

Правила умножения: 1. Умножение произведения на число и числа на произведение. Чтобы умножить произведение нескольких чисел на какое-нибудь число (или наоборот), достаточно один из сомножителей произведения умножить на это число, оставив другие сомножители без изменения.

Примеры. $(35 \cdot 12) \cdot 4 = (35 \cdot 4) \cdot 12 = 140 \cdot 12 = 1680$, $20 \cdot (7 \cdot 18 \cdot 5) = (20 \cdot 5) \cdot 7 \cdot 18 = 100 \cdot 7 \cdot 18 = 12600$.

2. Умножение разности на число. Чтобы умножить разность на число, достаточно умножить на это число отдельно уменьшаемое и вычитаемое, а затем из первого произведения вычесть второе, т. е.

$$(a - b)c = ac - bc.$$

Пример. $(35 - 15) \cdot 4 = 35 \cdot 4 - 15 \cdot 4 = 140 - 60 = 80$.

Правила деления: 1. Деление суммы на число. Чтобы разделить сумму на какое-нибудь число, достаточно разделить на это число каждое из слагаемых и полученные частные сложить, т. е.

$$(a + b) : c = a : c + b : c.$$

Пример. $(8 + 12) : 4 = 8 : 4 + 12 : 4 = 2 + 3 = 5$.

2. Деление разности на число. Чтобы разделить разность на какое-нибудь число, достаточно разделить на это число отдельно уменьшаемое и вычитаемое, а потом из первого частного вычесть второе, т. е.

$$(a - b) : c = a : c - b : c.$$

Пример. $(18 - 6) : 3 = 18 : 3 - 6 : 3 = 6 - 2 = 4$.

Однако в примере $(17 - 7) : 5$ надо сперва найти разность $17 - 7$.

3. Деление числа на произведение. Чтобы разделить число на произведение, достаточно разделить это число на один сомножитель, полученное частное разделить на второй сомножитель, вновь полученное частное разделить на третий сомножитель и т. д.

Пример. 960 разделить на произведение $4 \cdot 6 \cdot 8$ можно так: $960 : 4 = 240$; $240 : 6 = 40$; $40 : 8 = 5$.

4. Деление произведения на число. Частное от деления произведения двух сомножителей на число равно произведению одного из сомножителей на частное от деления другого сомножителя на это число (если такое деление выполнимо).

В общем виде

$$(ab) : c = (a : c)b.$$

Это свойство остается справедливым и в случае произведения нескольких сомножителей, т. е.

$$(abc) : d = (a : d)bc.$$

Пример. Разделить произведение $24 \cdot 18 \cdot 10$ (равное 4320) на 8 можно так:

$$24 : 8 = 3; \quad 3 \cdot (18 \cdot 10) = 3 \cdot 180 = 540.$$

Однако в примере $(6 \cdot 8) : 16$ надо сперва вычислить произведение $6 \cdot 8$.

Зависимость между данными числами и результатами действий над ними. Сложение. *Если известна сумма двух слагаемых, а одно слагаемое неизвестно, то, чтобы найти его, достаточно из суммы вычесть известное слагаемое*, т. е., если

$$a + b = c, \text{ то } a = c - b \text{ и } b = c - a.$$

Пример. $x + 30 = 42$; $x = 42 - 30$; $x = 12$.

Вычитание. *Чтобы найти неизвестное уменьшаемое, достаточно к вычитаемому прибавить разность*, т. е., если $a - b = c$, то $a = b + c$.

Пример. $x - 8 = 5$; $x = 8 + 5$; $x = 13$.

Чтобы найти неизвестное вычитаемое, достаточно из уменьшаемого вычесть разность, т. е.,

$$\text{если } a - b = c, \text{ то } b = a - c.$$

Пример. $45 - x = 15$; $x = 45 - 15$; $x = 30$.

Умножение. *Чтобы найти неизвестный сомножитель, достаточно разделить произведение на известный сомножитель* (или на произведение известных сомножителей):

$$\text{если } ab = c, \text{ то } a = c : b,\ b = c : a.$$

Примеры: 1. $25x = 200$; $x = 200 : 25$; $x = 8$.

2. $3 \cdot 5x \cdot 2 = 210$; $x = 210 : (3 \cdot 5 \cdot 2)$; $x = 7$.

Деление. *Чтобы найти неизвестное, делимое, достаточно делитель умножить на частное*, т. е.

$$\text{если } a : b = c, \text{ то } a = bc.$$

Пример. $x : 25 = 3$; $x = 25 \cdot 3$; $x = 75$.

Чтобы найти неизвестный делитель, достаточно делимое разделить на частное, т. е.

$$\text{если } a : b = c, \text{ то } b = a : c.$$

Пример: $400 : x = 16$; $x = 400 : 16$; $x = 25$.

Чтобы найти делимое при делении с остатком, достаточно делитель умножить на частное и прибавить остаток.

В общем виде, если при делении a на b получили частное q и остаток r, то

$$a = bq + r.$$

Пример: Если $30 : 4 = 7$ (ост. 2), то $30 = 4 \cdot 7 + 2$;

$x : 5 = 4$ (ост. 3), то $x = 5 \cdot 4 + 3 = 23$.

Чтобы найти делитель при делении с остатком, достаточно из делимого вычесть остаток и разность разделить на частное, т. е.

$$b = (a - r) : q.$$

Пример. $40 : x = 6$ (ост. 4), $x = (40 - 4) : 6 = 6$.

§ 4. Изменение результатов действий в зависимости от изменения данных

Изменение суммы и разности. *Если одно из слагаемых увеличить (уменьшить) на какое-нибудь число, то на это же число увеличится (уменьшится) и сумма*, т. е.

если $a + b = c$, то $(a + m) + b = c + m$ и $(a - m) + b = c - m$.

Примеры. $5 + 8 = 13$, тогда $(5 + 2) + 8 = 13 + 2$; $18 + 12 = 30$, тогда $(18 - 5) + 12 = 30 - 5$.

Если уменьшаемое увеличится (уменьшится) на какое-нибудь число, то и разность увеличится (уменьшится) на то же число, т. е.

$$\text{если } a - b = c, \text{ то } (a + m) - b = c + m$$
$$\text{и } (a - m) - b = c - m.$$

Примеры. $18 - 12 = 6$, тогда $(18 + 5) - 12 = 6 + 5$; $30 - 12 = 18$, тогда $(30 - 10) - 12 = 18 - 10$.

Если вычитаемое увеличить (уменьшить) на какое-нибудь число, то разность уменьшится (увеличится) на то же число, т. е.

$$\text{если } a - b = c, \text{ то } a - (b + m) = c - m$$

и

$$a - (b - m) = c + m.$$

Примеры. $45 - 12 = 33$, тогда $45 - (12 + 3) = 33 - 3$; $52 - 30 = 22$, тогда $52 - (30 - 10) = 22 + 10$.

Если одно слагаемое увеличить, а другое уменьшить на одно и то же число, то сумма не изменится, т. е.

$$\text{если } a + b = c, \text{ то } (a + m) + (b - m) = c.$$

Если уменьшаемое и вычитаемое увеличить (или уменьшить) на одно и то же число, то разность не изменится, т. е.

$$\text{если } a - b = c, \text{ то } (a + m) - (b + m) = c$$
$$\text{и } (a - m) - (b - m) = c.$$

Изменение произведения и частного. *Если один сомножитель увеличить (уменьшить) в несколько раз, то и произведение увеличится (уменьшится) во столько же раз.*

В общем виде,

$$\text{если } ab = c, \text{ то } (am)b = cm$$
$$\text{и } (a : m)b = c : m.$$

Примеры. $5 \cdot 6 = 30$, тогда $(5 \cdot 4) \cdot 6 = 30 \cdot 4$; $4 \cdot 8 = 32$, тогда $(4 : 2) \cdot 8 = 32 : 2$.

Если один сомножитель произведения увеличить (уменьшить) в несколько раз, а другой уменьшить (увеличить) во столько же раз, то произведение не изменится, т. е.

$$\text{если } ab = c, \text{ то } (a : m)(bm) = c.$$

Пример: $25 \cdot 10 = 250$, тогда $(25 : 5) \cdot (10 \cdot 5) = 250$.

Если делимое увеличится (уменьшится) в несколько раз, то и частное увеличится (уменьшится) во столько же раз, т. е.,

$$\text{если } a : b = c, \text{ то } (ma) : b = mc$$
$$\text{и } (a : m) : b = c : m.$$

Примеры. $40 : 5 = 8$, тогда $(40 \cdot 6) : 5 = 6 \cdot 8$; $440 : 11 = 40$, тогда $(440 : 4) : 11 = 40 : 4$.

Если делитель увеличить (уменьшить) в несколько раз, то частное уменьшится (увеличится) во столько же раз, т. е.,

$$\text{если } a : b = c, \text{ то } a : (bm) = c : m$$
$$\text{и } a : (b : m) = cm.$$

Примеры: $64 : 8 = 8$, тогда $64 : (8 \cdot 2) = 8 : 2$; $81 : 9 = 9$, тогда $81 : (9 : 3) = 9 : 3$.

Если делимое и делитель увеличить или уменьшить в одно и то же число раз, то частное не изменится, т. е.

$$\text{если } a : b = c, \text{ то } (am) : (bm) = c$$
$$\text{и } (a : m) : (b : m) = c.$$

Это свойство называют основным свойством частного.

Пример. $32 : 16 = (32 \cdot 2) : (16 \cdot 2) = 2$ и $32 : 16 = (32 : 4) : (16 : 4) = 2$.

Изменение остатка. *Если делимое и делитель увеличить или уменьшить в одно и то же число раз*, то частное не изменится, *но остаток увеличится (или уменьшится) в то же число раз.*

С помощью букв это записывается так: пусть a — делимое, b — делитель, q — частное, r — остаток; тогда

$$a = bq + r (r < b), \quad am = (bm)q + rm,$$
$$a : m = (b : m)q + (r : m).$$

Об этом нельзя забывать при делении чисел, оканчивающихся нулями. Например, деление 84100 : 400 иногда выполняют так:

$$\begin{array}{r|l} 8410\cancel{0} & 4\cancel{0}\cancel{0} \\ \hline 84 & 210 \\ \hline 1 & \end{array}.$$

В действительности же для чисел 84100 и 400 остаток будет не 1, а 100, так как мы делили 841 сотню на 4 сотни и получили 210 и в остатке 1 сотню.

§ 5. Порядок действий, скобки

Порядок действий. При выполнении нескольких действий результат зависит от данных чисел и от порядка их выполнения. Так, например, $4 - 2 + 1 = 3$, если производить действия в порядке их записи; если же сначала сложить 2 и 1 и вычесть полученную сумму из 4, то получим 1. Для предупреждения недоразумений вводятся соглашения, в каком порядке следует выполнять действия в выражении, записанном без скобок.

Сложение и вычитание называют *действиями первой ступени*, умножение и деление — *действиями второй ступени*, а возведение в степень — *действием третьей ступени.*

Если в выражении (без скобок) встречаются действия только первой или только второй ступени, то их выполняют в том порядке, в каком они написаны, слева направо.

Примеры. а) $10 - 3 + 4 + 2 = 7 + 4 + 2 = 11 + 2 = 13$;
б) $40 \cdot 2 : 4 \cdot 5 = 80 : 4 \cdot 5 = 20 \cdot 5 = 100$.

Примечание. Такой порядок действий второй ступени не соответствует принятому в алгебре, где под выражением $a : bc$ всегда понимают $\frac{a}{bc}$ (a деленное на произведение bc).

Поэтому в некоторых новых руководствах по арифметике рекомендуется иной порядок действий, отвечающий принятому в алгебре: если в выражении встречаются действия только второй ступени, то сна-

чала выполняется умножение, а затем деление. Следуя этому правилу, последний пример надо было бы решить так*:

$$40 \cdot 2 : 4 \cdot 5 = 80 : 20 = 4.$$

Однако пока в школе придерживаются традиционного правила.

Если в выражении встречаются действия разных ступеней, то *сначала выполняют действия высших, а затем низших ступеней.*

Пример. $2 \cdot 5^2 - 3 \cdot 3$; $5^2 = 25$; $2 \cdot 25 = 50$; $3 \cdot 3 = 9$; $50 - 9 = 41$.

Скобки. При решении примеров, содержащих скобки, действия нужно проводить в таком порядке: *сначала выполнить действия, заключенные в скобки,* потом остальные согласно принятым выше правилам.

Пример. $9 + 16 : 4 - 2(16 - 2 \cdot 7 + 4) + 6(2 + 5)$.

Сначала выполняем действия в скобках:

$$16 - 2 \cdot 7 + 4 = 16 - 14 + 4 = 6; \quad 2 + 5 = 7.$$

Затем выполняем остальные действия:

$$9 + 16 : 4 - 2 \cdot 6 + 6 \cdot 7 = 9 + 4 - 12 + 42 = 43.$$

Часто для указания порядка действий необходимо заключить в скобки такие выражения, которые уже сами содержат скобки. Тогда кроме обычных *круглых скобок* ( ) применяют скобки *квадратные* [ ]. Если в скобки нужно заключить выражение, содержащее уже круглые и квадратные скобки, пользуются *фигурными скобками* { }. Вычисление подобных выражений проводится в следующем порядке: сначала — вычисление внутри всех круглых скобок в указанной выше последовательности; затем вычисление внутри всех квадратных скобок по тем же правилам; далее — вычисление внутри фигурных скобок; наконец, выполняются остальные действия.

Пример. $5 + 2 \cdot [14 - 3 \cdot (8 - 6)] + 32 : (10 - 2 \cdot 3)$.

Выполняем действия в круглых скобках:

$$8 - 6 = 2; \quad 10 - 2 \cdot 3 = 10 - 6 = 4;$$

действия в квадратных скобках дают $14 - 3 : 2 = 8$; выполняя остальные действия, находим

$$5 + 2 \cdot 8 + 32 : 4 = 5 + 16 + 8 = 29.$$

§ 6. Проверка арифметических действий

Проверка действий на основании зависимости между данными и результатами действий. Когда выполняют много вычислений, прибегают к контролю правильности выполнения арифметических действий. Для этого чаще всего используют основные законы арифметических действий и зависимости между данными и результатами действий. Например, правильность выполнения сложения $243596 + 32483 = 276079$ можно проверить сложением (переставив слагаемые) или вычитанием: $276079 - 243596 = 32483$.

Аналогично проверяют правильность выполнения и других арифметических действий: вычитания, умножения и деления. Но иногда

---

* И. К. Андронов. Арифметика. Учпедгиз, 1962, стр. 108.

целесообразно пользоваться специальными приемами проверки вычислений, например «правилом девятки».

Правило девятки. Для проверки правильности выполнения сложения находят остатки от деления на 9 сумм цифр каждого слагаемого, складывают их и результат снова делят на 9. Полученный остаток сравнивают с остатком от деления на 9 суммы цифр найденной суммы. Если сложение выполнено верно, остатки равны.

Пример.

$$\begin{array}{rr} 2378 & 2 \\ 3819 & 3 \\ + \quad 955 & 1 \\ 200369 & 2 \\ \hline 206521 & 7 \end{array}$$

В данном примере остатки от деления на 9 сумм цифр слагаемых равны 2, 3, 1, 2; их сумма равна 8. А остаток от деления на 9 суммы цифр результата 206521 равен 7. Значит, сложение выполнено неверно. (Верным будет значение 207521.)

Аналогично можно проверять и правильность выполнения умножения. Только полученные остатки от деления на 9 сумм цифр сомножителей надо не складывать, а перемножать:

Пример.

$$\begin{array}{rr} 1362 & 3 \\ 103 & 4 \\ \hline 4086 & \\ 1362 & \\ \hline 140286 & 3 \end{array}$$

Здесь остатки от деления на 9 сумм цифр сомножителей равны 3 и 4. Их произведение 12. Разделив 12 на 9, получим остаток 3. Такой же остаток получается, если разделить на 9 сумму цифр числа 140286. Следовательно, умножение выполнено верно.

Примечание. Правило девятки не всегда дает возможность обнаружить ошибку в вычислениях. Например, если бы вместо верного ответа 140286 получили 140376 или 142086, правило девятки не обнаружило бы ошибки, ведь остатки от деления на 9 суммы цифр каждого из этих чисел равны 3. Следовательно, этот способ проверки не является достаточным.

Так как вычитание и деление есть действия, обратные сложению и умножению, и правильность вычисления разности и частного проверяется соответственно сложением и умножением, то правило девятки можно применять также для контроля вычитания и деления.

§ 7. Способы быстрых вычислений

Умение быстро и безошибочно производить устные и письменные вычисления позволяет экономить труд и время, а также быстро обнаруживать ошибки в расчетах. Приведем несколько способов, наиболее часто используемых в вычислительной практике.

Способы быстрого сложения и вычитания. Прием округления. Этот прием основан на изменении суммы или разности в зависимости от изменения компонентов и применяется в том случае, когда хотя бы один из компонентов представляет собой число, близкое к круглым десяткам, сотням, тысячам и т. д.

1. Если одно из слагаемых, округляя, увеличим на несколько единиц, то из полученной суммы надо вычесть столько же единиц.

Пример. $264 + 391 = 264 + (391 + 9) - 9 = 264 + 400 - 9 = 655$.

2. Если одно слагаемое увеличим на несколько единиц, а второе уменьшим на столько же единиц, сумма не изменится. На основании этого выполняется округление одного слагаемого за счет другого.

Пример. $998 + 936 = 1000 + 934 = 1934$.

3. Если вычитаемое при округлении увеличим на несколько единиц, то, чтобы разность не изменилась, надо и уменьшаемое увеличить на столько же единиц.

Пример. $2342 - 996 = 2346 - 1000 = 1346$.

4. Если уменьшаемое при округлении уменьшим на несколько единиц, то к полученной разности надо прибавить столько же единиц.

Пример. $10012 - 8645 = 10000 - 8645 + 12 = 1355 + 12 = 1367$.

Использование свойств сложения и вычитания.

Примеры. $279 + 583 + 721 = (279 + 721) + 583 = 1583$;
$352 + 109 - 52 = (352 - 52) + 109 = 409$;
$573 - 432 - 68 = 573 - (432 + 68) = 73$.

Способы быстрого умножения и деления. Умножение методом Ферроля. Для получения единиц произведения перемножают единицы сомножителей, для получения десятков умножаются десятки одного на единицы другого сомножителя и наоборот и результаты складываются, для получения сотен перемножаются десятки*.

Этот способ можно изобразить схематически так.

Пример. $\begin{array}{r} 32 \\ \times\ 46 \\ \hline 1472 \end{array}$

$2 \cdot 6 = 12$, 2 пишем, 1 помним;
$3 \cdot 6 = 18$, $2 \cdot 4 = 8$, $18 + 8 + 1 = 27$,
7 пишем, 2 помним;
$3 \cdot 4 = 12$ и 2 — пишем 14.

Умножение на число, близкое к единице какого-нибудь разряда.

Примеры. $405 \cdot 97 = 405 \cdot (100 - 3) = 405 \cdot 100 - 405 \times 3 = 40500 - 1215 = 39285$;

$8012 \cdot 1006 = 8012(1000 + 6) = 8012000 + 8012 \cdot 6 = 8012000 + 48072 = 8060072$.

Умножение на 9, 99 и 999. *Чтобы умножить на число, написанное девятками, надо к множимому приписать справа столько нулей, сколько девяток во множителе, и из результата вычесть множимое.*

Примеры. $387 \cdot 9 = 3870 - 387 = 3483$;
$24 \cdot 99 = 2400 - 24 = 2376$; $18 \cdot 999 = 18000 - 18 = 17982$.

Умножение двузначного числа на 11. *Чтобы умножить двузначное число, сумма цифр которого меньше 10, на 11, надо между цифрами числа написать сумму его цифр.*

Пример. $72 \cdot 11 = 792$.

Чтобы умножить на 11 двузначное число, сумма цифр которого больше или равна 10, надо между цифрой десятков, увеличенной на 1, и цифрой единиц написать избыток суммы цифр числа на 10.

Пример. $68 \cdot 11 = 748$.

---

* Этот способ умножения следует из тождества

$$(10a + b)(10c + d) = 100ac + 10(ad + bc) + bd,$$

Умножение на 5, 25, 125. *Чтобы умножить число на 5, 25, 125, достаточно разделить его соответственно на 2, 4, 8 и результат умножить на 10, 100, 1000.*

Примеры. $2486 \cdot 5 = 12430$, так как $2486 : 2 = 1243$;
$8084 \cdot 25 = 202100$, так как $8084 : 4 = 2021$.

Деление на 5, 25, 125. *Чтобы разделить число на 5, 25, 125, достаточно умножить его соответственно на 2, 4, 8 и разделить на 10, 100, 1000.*

Примеры. $235 : 5 = 47$, так как $235 \cdot 2 = 470$;
$1175 : 25 = 47$, так как $1175 \cdot 4 = 4700$.

Использование свойств умножения и деления.

Примеры. $93 \cdot 8 \cdot 125 = 93 \cdot (8 \cdot 125) = 93000$;
$36 \cdot 18 : 9 = 36 \cdot (18 : 9) = 36 \cdot 2 = 72$;
$26 \cdot 235 : 13 = (26 : 13) \cdot 235 = 470$.

Возведение в квадрат чисел, имеющих цифру 5. *Чтобы возвести в квадрат двузначное число, оканчивающееся цифрой 5, достаточно число его десятков умножить на число, увеличенное на единицу, и к произведению справа дописать 25.*

Пример. Вычислить 35^2.

Решение (выполняется устно). $3 \cdot 4 = 12$, дописав 25, получим результат: $35^2 = 1225$.

Чтобы возвести в квадрат двузначное число, имеющее 5 десятков, достаточно к 25 прибавить цифру единиц и к результату приписать справа квадрат числа единиц так, чтобы в результате получилось четырехзначное число. Эти правила следуют из тождеств

$$(10a + 5)^2 = 100a(a + 1) + 25,$$
$$(50 + b)^2 = 100\,(25 + b) + b^2.$$

Пример. Вычислить 54^2, 52^2.

Решение (выполняется устно). К 25 прибавляем 4, получаем 29. Приписываем 16. Получаем: $54^2 = 2916$.

$52^2 = 2704$.

§ 8. Делимость чисел

Делимость суммы. *Если каждое из слагаемых делится на какое-нибудь число, то и сумма их обязательно разделится на это же число.*

Если каждое слагаемое, кроме одного, делится на какое-нибудь число, а одно не делится, то сумма не разделится на это число.

Если же два или больше слагаемых не делятся на какое-нибудь число, то о делимости суммы нельзя сказать ничего определенного: в одних случаях она делится, а в других не делится на данное число.

Пример. 13 и 7 ие делятся ни иа 5, ни на 6; сумма $13 + 7$ делится на 5, но не делится на 6.

Делимость разности. *Если уменьшаемое и вычитаемое делится на какое-нибудь число, то и разность разделится на это же число.*

Если только одно из чисел — уменьшаемое или вычитаемое — делится на какое-нибудь число, а другое не делится, то и разность не делится на это число.

Если ни уменьшаемое, ни вычитаемое не делятся на данное число, то разность их может делиться, а может и не делиться на это же число.

Пример. 100 и 30 не делятся ни на 7 ни на 13. Их разность $100 - 30$ делится на 7, но на 13 не делится.

Делимость произведения на число и числа на произведение.

Если хоть один из сомножителей делится на какое-нибудь число, то и произведение их также разделится на это число.

Если же ни один из сомножителей не делится на данное число, то из этого еще не следует, что на данное число не разделится и их произведение.

Пример. Ни 15, ни 10 не делится на 6, а их произведение 15×10 на 6 делится.

Если данное число делится на произведение, то оно делится также на каждый из сомножителей этого произведения.

Обратное утверждение ошибочно. Если какое-нибудь число делится в отдельности на несколько данных чисел, то на их произведение оно может и не разделиться.

Пример. 180 делится и на 5, и на 9, и на 6, но на произведение $5 \cdot 9 \cdot 6$ оно не делится.

Примечание. Если же данное число делится на несколько попарно взаимно простых чисел (см. стр. 26), то оно делится и на их произведение.

Пример. 180 делится на 5, 3 и 4; эти числа попарно взаимно простые, поэтому 180 делится и на произведение $5 \cdot 3 \cdot 4$.

§ 9. Признаки делимости

Деление без остатка не всегда может быть выполнено. Чтобы, не выполняя деления, установить, делится или не делится одно число на другое, пользуются *признаками делимости.*

Признак делимости на 10. *На 10 делятся все те и только те числа, которые оканчиваются нулями.*

Пример. Число 2350 делится на 10.

Признак делимости на 2 и на 5. *На 2 или на 5 делятся те и только те числа, у которых последняя цифра выражает число, делящееся соответственно на 2 или на 5.*

Примеры. Число 140 делится и на 2, и на 5, так как оно оканчивается нулем (а нуль делится на любое число). Число 1306 делится на 2, так как последняя его цифра 6 выражает число, делящееся на 2, но на 5 это число не делится, так как 6 не делится на 5. Число 2035 делится на 5, так как 5 делится на 5, но на 2 это число не делится, так как 5 не делится на 2.

Признак делимости на 3 и на 9. *На 3 или на 9 делятся те и только те числа, у которых сумма цифр делится соответственно на 3 или на 9.* (Выражение «сумма цифр» употребляется с целью упрощения формулировки вместо слов «сумма однозначных чисел, выраженных цифрами», ведь цифры — только значки, и действия выполняются над числами, а не над цифрами.)

Пример. Число 31521 делится на 3, так как сумма его цифр $3 + 1 + 5 + 2 + 1 = 12$ делится на 3. На 9 это число не делится, так как 12 не делится на 9. Число 5193 делится на 9, так как сумма его цифр $5 + 1 + 9 + 3 = 18$ делится на 9. Это число делится также и на 3 (если число делится на 9, то, естественно, оно делится и на 3).

Признаки делимости на 4 и на 25. *На 4 или на 25 делятся те и только те числа, которые оканчиваются двумя нулями или у которых две последние цифры выражают число, делящееся соответственно на 4 или на 25.*

Пример. Число 4600 делится и на 4, и на 25, так как оно оканчивается двумя нулями (следовательно, делится на $100 = 4 \cdot 25$). Число 1264 делится на 4, так как 64 делится на 4, но это число не делится на 25, так как 64 не делится на 25. Число 1275 делится на 25, так как 75 делится на 25, но не делится на 4, так как 75 не делится на 4.

Признак делимости на 8 и на 125. *На 8 или на 125 делятся те и только те числа, которые оканчиваются тремя нулями, а также у которых три последние цифры выражают число, делящееся соответственно на 8 или на 125.*

Пример. Число 3279000 делится и на 8, и на 125, так как оно делится на $1000 = 8 \cdot 125$. Число 5248 делится на 8, но не делится на 125, так как 248 делится на 8, но не делится на 125.

Признак делимости на 7, 11 и 13. *На 7, 11 или 13 делятся те и только те числа, у которых разность между числом, выраженным тремя последними цифрами, и числом, выраженным остальными цифрами (или наоборот), делится соответственно на 7, на 11 или на 13.*

Пример. Число 253253 делится и на 7, и на 11, и на 13, так как разность $253 - 253 = 0$, а нуль делится на любое число (не равное нулю). Число 253264 делится на 11, но не делится ни на 7, ни на 13, так как разность $264 - 253 = 11$ делится на 11, но не делится ни на 7, ни на 13. Число 1208965 не делится ни на 7, ни на 11, ни на 13, так как разность $1208 - 965 = 243$ не делится ни на одно из этих чисел.

Признаки делимости на 6, 12, 18, 24 и т. д. *На 6 делятся те и только те числа, которые делятся на 2 и на 3.*

Пример. Число 31242 делится на 6, так как оно делится на 2 и на 3 (а числа 2 и 3 не имеют общих множителей, больших 1).

На 12 делятся те и только те числа, которые делятся на 3 и на 4 (но не на 2 и на 6, так как 2 и 6 имеют общий множитель, поэтому, например, 18 делится и на 2, и на 6, но не делится на 12).

Пример. 216 делится на 12, так как оно делится на 3 и на 4.

На 18 делятся те и только те числа, которые делятся на 2 и на 9.

Пример. 9396 делится на 18, так как оно делится на 2 и на 9.

Существуют признаки делимости и на другие числа, но они сложные, поэтому в таких случаях иногда пользуются общим признаком делимости чисел.

Общий признак делимости чисел. *Для того чтобы число N делилось на d, необходимо и достаточно, чтобы сумма произведений цифр этого числа на остатки, получаемые от деления на d соответствующих степеней десяти, делилась на d.*

Если $N = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \ 10 + a_0$ и $10^n = d \cdot q_n + r_n$; $10^{n-1} = d \cdot q_{n-1} + r_{n-1}$; $\ldots$; $10^2 = d \cdot q_2 + r_2$; $10 = dq_1 + r_1$, то, N делится на d в том и только в том случае, когда на d делится сумма:

$$M = a_n r_n + a_{n-1} r_{n-1} + \cdots + a_2 r_2 + a_1 r_1 + a_0.$$

Из общего признака легко вывести рассмотренные выше частные признаки делимости и некоторые другие. Пусть, например, $d = 11$. Тогда

$$\begin{aligned} 10 &= 11 \cdot 1 - 1 & r_1 &= -1 \\ 10^2 &= 11 \cdot 9 + 1 & r_2 &= +1 \\ 10^3 &= 11 \cdot 91 - 1 & r_3 &= -1 \\ 10^4 &= 11 \cdot 909 + 1 & r_4 &= +1 \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Следовательно, при $d = 11$ $M = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \ldots$ Имеем такой признак: *на 11 делятся все те и только те числа, у которых разность между суммой цифр, стоящих на четных местах, и суммой остальных цифр делится на 11.*

Пример. Делится ли на 11 число 47 214 051 819?

$$9 + 8 + 5 + 4 + 2 + 4 = 32, \quad 1 + 1 + 0 + 1 + 7 = 10,$$
$$32 - 10 = 22.$$

22 делится на 11, следовательно, и данное число делится на 11.

§ 10. Простые и составные числа

Простые и составные числа. Всякое число (здесь имеются в виду только натуральные) делится на единицу и само на себя. Существуют числа, которые делятся не только на единицу и сами на себя, но имеют еще и другие делители. Например, число 12, кроме 1 и 12, имеет еще делители: 2, 3, 4, 6.

Всякое число, кроме единицы, которое делится только на единицу и само на себя, называется *простым*. Число, которое делится не только на единицу и само на себя, но еще и на другие числа, называется *составным*. Число 1 не причисляется ни к простым, ни к составным числам, оно занимает особое положение.

Таблица простых чисел. Для решения многих теоретических вопросов и практических задач большую помощь оказывают таблицы простых чисел. Поэтому еще в древности математики составляли эти таблицы. Очень простой способ составления таких таблиц нашел древнегреческий математик Эратосфен (III в. до н. е.). Способ Эратосфена состоит в том, что из ряда натуральных чисел последовательно вычеркиваются все составные. Пусть, например, надо найти все простые числа в натуральном ряду от 1 до 30. Для этого выпишем все натуральные числа от 1 до 30 в порядке возрастания. Первое из них, 1,— не простое, вычеркиваем его. Следующее за ним число 2 (простое) оставляем, а каждое второе после 2, т. е. 4, 6, 8, ... вычеркиваем. Следующее простое число 3 оставляем, а каждое третье, начиная после 3, вычеркиваем. Следующее простое число 5 оставляем, а каждое пятое, начиная после 5, вычеркиваем (при этом считаем и уже вычеркнутые числа). В результате получаем

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30.

Оставшиеся невычеркнутые числа

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 — простые, меньшие 30.

Такой способ составления таблиц простых чисел называют *«решетом Эратосфена»*.

Примечание. Если требуется составить таблицу простых чисел, не превышающих N, то указанным выше способом вычеркивают все составные числа, делящиеся на 2, 3, 5 и т. д. до наибольшего простого числа p, не превышающего $\sqrt{N}$. Например, если надо составить таблицу простых чисел, не превышающих 1000, надо вычеркнуть все составные, делящиеся на каждое простое число до 31 включительно.

В настоящее время имеются напечатанные таблицы простых чисел до двенадцати миллионов, а в библиотеке Венской Академии наук хранится рукописная таблица простых чисел до ста миллионов.

Однако уже известно много отдельных простых чисел, далеко выходящих за пределы даже самых больших таблиц.

Свойства простых чисел. Хотя изучением простых чисел занимались многие математики от древнейших времен до наших дней, простые числа и законы их размещения среди натуральных чисел таят в себе много нерешенных проблем.

Известно, что *последовательность простых чисел бесконечна* (теорема Евклида). Среди простых чисел есть много таких, разность которых равна 2, например 3 и 5, 5 и 7, 11 и 13, 17 и 19, ..., 179 и 181, ..., 100116957 и 100116959. Такие пары чисел называют простыми *числами-близнецами*. Есть предположение, что чисел-близнецов существует бесконечно много. Однако это не удается никому ни доказать, ни опровергнуть. Многие проблемы простых чисел можно было бы решить, если бы мы умели определять, сколько есть простых чисел, меньших любого натурального N. Однако этого мы сейчас еще не умеем делать. Известны только методы, дающие возможность приближенно находить количество простых чисел, меньших данного числа. В решении этой проблемы большое значение имеют работы великого русского ученого П. Л. Чебышева (1821—1894). В наше время ряд вопросов теории простых чисел разрешен известным советским математиком И. М. Виноградовым (род. 1891).

Разложение чисел на простые множители. Разложить число на простые множители — значит представить его в виде произведения простых чисел.

Составное число разлагается на простые множители *единственным образом* (с точностью до порядка сомножителей). Это значит, что если, например, число 20 разложилось на две двойки и пятерку, то оно и всегда будет так разлагаться независимо от того, начнем ли мы разложение с множителей 2 или с 5:

$$20 = 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 5 \cdot 2 = 5 \cdot 2 \cdot 2.$$

Пример 1. Пусть требуется разложить на простые множители число 315. На основании признаков делимости 2 не будет делителем числа 315, а 3 будет делителем 315. Тогда пишем число 315, проводим справа от него вертикальную черту и справа от черты пишем найденный делитель 3, а под числом 315 — частное от деления 315 на 3, т. е. 105.

Далее с числом 105 поступаем так же и устанавливаем, что 105 тоже имеет 3 своим делителем. Пишем число 3 справа от 105 за чертой, а под числом 105 записываем число 35, являющееся частным от деления 105 на 3. Число 35 на 3 не делится, поэтому испытываем следующее по величине простое число 5. Выполнив с 35 те же операции, справа от 35 пишем 5, а под ним число 7. Так как 7 простое число, то делим его самого на себя, под ним пишем 1.

315	3
105	3
35	5
7	7
1	

Таким образом, этот процесс испытаний продолжаем до тех пор, пока не получим в частном 1. Числа, записанные справа от вертикальной черты, и составят все простые множители числа 315, т. е. $315 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.

Этот общий способ в некоторых случаях можно упрощать.

Пример 2. Разложить на простые множители 5600.

Замечаем, что $5600 = 56 \cdot 100$. Число 56 равно произведению $7 \cdot 8$, следовательно, равно произведению трех двоек и одной семерки Число 100 равно произведению двух двоек и двух пятерок.

Поэтому

$$5600 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7.$$

Как видим, среди сомножителей разложения могут быть и равные числа. В таких случаях упрощают записи, используя понятие степени. Например, приведенное выше разложение записывают так:

$$5600 = 2^5 \cdot 5^2 \cdot 7.$$

Такая запись числа в виде произведения степеней разных простых чисел называется *каноническим разложением* данного числа.

Разложение на множители больших чисел. Если данное число небольшое, или если оно делится на небольшое простое число, то его без особого труда можно разложить на множители. Но в общем случае разложение чисел на множители очень трудоемко. Например, не так легко разложить на множители сравнительно небольшое число 12091. Испытывая числа 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 и т. д., мы долгое время не можем обнаружить его делители, хотя данное число не простое!

§ 11. Общие делители и кратные

Делители числа. *Делителем данного числа называется число, на которое данное делится без остатка.* Всякое простое число, например, 13, имеет только два делителя: единицу и самого себя. Всякое составное число имеет более двух делителей, например число 6 имеет 4 делителя: 1, 2, 3 и 6. Чтобы найти делители данного составного числа, предварительно раскладывают его на простые множители; каждый из этих множителей будет простым делителем данного числа. Перемножением же простых множителей по два, по три, по четыре и т. д. получают составные делители данного числа.

Пример. Найти все делители числа 50.

$50 = 2 \cdot 5^2$, следовательно, 50 делится на 1, 2, 5, $2 \cdot 5$, 5^2, $2 \cdot 5^2$. Других делителей число 50 не имеет.

Ответ. 1, 2, 5, 10, 25, 50.

Известно правило, по которому можно легко определять количество всех делителей данного числа. Для этого надо увеличить на единицу показатель степени каждого сомножителя канонического разложения данного числа и полученные числа перемножить.

Пример. Сколько делителей имеет число 5600?

$5600 = 2^5 \cdot 5^2 \cdot 7$; $\quad (5 + 1) \cdot (2 + 1) \cdot (1 + 1) = 36$.

Ответ. Число 5600 имеет 36 делителей.

Общий делитель нескольких чисел. *Общим делителем нескольких чисел называется число, на которое все данные числа делятся без остатка.* Например, числа 25 и 35 имеют общие делители: 1 и 5; числа 42 и 105 имеют общие делители: 1, 3, 7 и 21. Среди всех общих делителей всегда имеется наибольший. Это число называется *наибольшим общим делителем* (НОД). В наших примерах в первом случае НОД равен 5, во втором — 21.

Пишут: НОД (25, 35) = 5; НОД (42, 105) = 21.

Для нахождения наибольшего общего делителя нескольких чисел пользуются чаще всего двумя способами.

Первый способ — *разложение на простые множители.* Чтобы найти НОД нескольких чисел, раскладывают каждое из этих чисел на простые множители и выписывают все *общие множители*, причем каждый из них берут с *наименьшим показателем*, встречающимся в этих разложениях.

Пример. Найти НОД чисел: 210, 1260 и 245.

Разложим эти числа на простые множители:
$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$; $1260 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$; $245 = 5 \cdot 7^2$. Тогда НОД будет $5 \cdot 7 = 35$.

Второй способ — *последовательное деление.* Он называется еще *алгоритмом Евклида.* Чтобы найти НОД двух чисел, *делят большее число на меньшее,* и если получается остаток, то делят меньшее число на остаток; если снова получается остаток, то делят *первый остаток на второй.* Так продолжают делить до тех пор, пока в остатке не получится нуль. *Последний делитель и есть НОД данных чисел.*

Пример. Найти НОД чисел 391 и 299.

Разделив число 391 на 299, получим в остатке 92. Разделив 299 на 92, получим в остатке 23. Разделив 92 на 23, получим в остатке 0. Следовательно, 23 есть НОД чисел 391 и 299.

Запись удобно расположить так:

$$\begin{array}{r|l} 391 & 299 \\ \hline 299 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 299 & 92 \\ \hline 276 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 92 & 23 \\ \hline 92 & 4 \\ \hline 0 & \end{array}$$

Чтобы найти таким способом НОД трех и более чисел, находят сначала наибольший общий делитель каких-нибудь двух из них, затем — наибольший общий делитель найденного делителя и какого-нибудь третьего данного числа и т. д.

Взаимно простые числа. Два или несколько чисел, наибольший общий делитель которых равен единице, называются *взаимно простыми.*

Примеры. Числа 15 и 22 взаимно просты; числа 7, 19, 32 и 84 взаимно просты; числа 18 и 15 не взаимно просты, так как НОД (18, 15) = 3.

Если данных чисел больше двух и каждые два из них взаимно просты, то такие числа называют *попарно взаимно простыми.*

Примеры. 6, 9 и 4 — числа взаимно просты, но не попарно взаимно просты; числа 8, 9, 7 и 55 — попарно взаимно просты.

Общее кратное чисел. *Общим кратным данных чисел называется натуральное число, которое делится на каждое из данных чисел* (без остатка).

Например, числа 12, 24 и 36 являются общими кратными чисел 3 и 4.

Наименьшее общее кратное (НОК). Из всех общих кратных особый интерес представляет наименьшее общее кратное.

Наименьшим общим кратным нескольких чисел называется самое меньшее натуральное число, которое делится на каждое из данных чисел. Например, для чисел 6, 15 и 20 наименьшее общее кратное есть 60, так как никакое натуральное число, меньшее 60, не делится на 6, на 15 и на 20, а 60 делится на эти числа.

Пишут: НОК (6, 15, 20) = 60.

Укажем два способа нахождения наименьшего общего кратного нескольких чисел.

Первый способ — *разложение на простые множители. Чтобы найти НОК нескольких чисел, надо разложить эти числа на*

простые множители, затем, взяв разложение одного из них, умножить его на недостающие простые множители из разложений других чисел.

Пример. Найти НОК чисел 72 и 108.

Разложим данные числа на множители:

$$72 = 2^3 \cdot 3^2.$$
$$108 = 2^2 \cdot 3^3.$$

Выпишем все множители числа 108 (это удобнее, так как число 108 больше 72) и, добавив множитель 2, который еще дополнительно имеется в числе 72, получим

$$\text{НОК } (72, 108) = 2^3 \cdot 3^3 = 216.$$

Если большее из данных чисел делится на все остальные, то оно и будет наименьшим общим кратным этих чисел. Например, НОК (60, 120, 40) = 120.

Если никакая пара данных чисел не имеет общих множителей отличных от единицы, то для нахождения наименьшего общего кратного данных чисел их нужно перемножить. Например, наименьшее общее кратное чисел 7, 8 и 11 равно их произведению, т. е. НОК (7, 8, 11) = 7 · 8 · 11 = 616.

Второй способ. Известно, что $\text{НОК } (a, b) = \frac{ab}{\text{НОД } (a, b)}$, т. е.: *наименьшее общее кратное двух чисел равно произведению этих чисел, деленному на их наибольший общий делитель* *.

Используя эту зависимость, можно определить НОК.

Пример. Найти НОК чисел 360 и 70. Так как НОД (360, 70) = = 10, то НОК (360, 70) = 360 · 70 : 10 = 2520.

Чтобы найти этим способом наименьшее общее кратное трех и более чисел, сначала находят наименьшее общее кратное каких-нибудь двух из них, потом — наименьшее общее кратное этого наименьшего кратного и какого-нибудь третьего данного числа и т. д.

§ 12. Недесятичные системы счисления

Систематические числа. Общепринятая сейчас система счисления называется *десятичной*, потому что по этой системе 10 единиц одного разряда составляют единицу следующего высшего разряда. В десятичной системе все числа записываются с помощью десяти цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Если мы пишем, например, число 3827, то понимаем, что оно состоит из 3 тысяч, 8 сотен, 2 десятков и 7 единиц

$$3827 = 3000 + 800 + 20 + 7,$$

или

$$3827 = 3 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 7.$$

Говорят: *основанием* десятичной системы счисления есть число 10.

Однако возможны и недесятичные системы счисления. Можно считать не десятками, а, например, пятерками. Тогда 5 единиц первого разряда будут составлять одну единицу второго, а 5 единиц второго — одну единицу третьего разряда и т. д. В этом случае будем иметь систему счисления с основанием 5. Ее называют *пятеричной системой счисле-*

---

* В. М. Брадис. Теоретическая арифметика, Учпедгиз, 1954, стр. 68.

ния. Для записи чисел в пятеричной системе достаточно иметь пять цифр: 0, 1, 2, 3, 4.

Возможны также *двоичная, троичная, двенадцатиричная* и другие системы счисления.

Чтобы не смешивать числа, записанные в различных системах, принято правее и несколько ниже последней цифры в скобках писать основание системы (иногда пишут без скобок). Например, числа $214_{(5)}$, $1011_{(2)}$, $299_{(12)}$ записаны соответственно в пятеричной, двоичной и двенадцатеричной системах. Это значит, что

$$214_{(5)} = 2 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5 + 4,$$
$$1011_{(2)} = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1,$$
$$299_{(12)} = 2 \cdot 12^2 + 9 \cdot 12 + 9.$$

Очевидно, в качестве основания системы счисления можно взять любое натуральное число, большее 1. Если за основание взять число g, тогда для записи любого числа достаточно иметь g цифр: 0, 1, 2, 3, ..., $g - 1$. Числа, записанные в системе счисления при основании g в виде $g^n a_n + g^{n-1} a_{n-1} + \ldots + g a_1 + a_0$, где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — цифры, называются вообще *систематическими.*

Примечание. Для изображения чисел по системе счисления, у которой основание превосходит 10, недостаточно наших цифр: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. Например, для двенадцатеричной системы пришлось бы ввести особые знаки для 10 и 11, потому что наши обозначения этих чисел выражали бы тогда другие числа, а именно: 10 означало бы 1 единицу 2-го разряда, т. е. дюжину, а 11 означало бы 1 единицу 2-го разряда и 1 единицу 1-го разряда, т. е. 13.

Переход от одной системы счисления к другой. Для перехода от одной системы к другой достаточно уметь:

а) переходить от любой системы счисления к десятичной;

б) переходить от десятичной системы к другой системе.

Переход от любой системы к десятичной выполняется путем прямого вычисления.

Пример 1. Дано число $3021_{(4)}$, записать его в десятичной системе $3021_{(4)} = 3 \cdot 4^3 + 2 \cdot 4 + 1 = 192 + 8 + 1 = 201$. Рассмотрим переход от десятичной системы к другой.

Пример 2. Число 856 записать при основании 4.

Устанавливаем, сколько четверок содержится в числе 856: 856 : : 4 = 214. Значит, число состоит из 214 единиц 2-го разряда (214 четверок). Сосчитаем единицы 2-го разряда четверками; делим 214 на 4; получаем 53 единицы 3-го разряда и 2 единицы 2-го разряда. Ведем теперь счет единиц 3-го разряда четверками; делим 53 на 4 и получаем 13 единиц 4-го разряда и одну единицу 3-го разряда. Делим теперь 13 на 4. Результат счета единиц 4-го разряда: 3 единицы 5-го разряда и одна единица 4-го разряда.

Письменно этот процесс оформляют так:

$-\frac{856}{856}$ | 4	| 4	| 4	
214	53	13	4
I р. 0	$-\frac{212}{}$	$-\frac{52}{}$	$-\frac{12}{}$	3 V р.
	II р. 2	III р. 1	IV р. 1	

Значит, данное число содержит 3 единицы 5-го разряда, 1 единицу 4-го разряда, 1 единицу 3-го разряда, 2 единицы 2-го разряда и 0 еди-

ниц 1-го разряда. Это число запишется: $31120_{(4)}$. Таким образом, $856_{(10)} = 31120_{(4)}$.

Арифметические действия над систематическими числами. Сложение. Отыскание суммы сводится к сложению единиц одного и того же разряда, начиная с единиц 1-го разряда, и к преобразованию суммы единиц низшего разряда в высший, если эта сумма — число двузначное. Поэтому сложение можно производить непосредственно, как и в десятичной системе, используя таблицу сложения однозначных чисел.

Например, в системе счисления с основанием 4 таблица сложения имеет вид

$$\begin{array}{lll} 0+0=0 & 1+1=2 & 2+2=10 \\ 0+1=1 & 1+2=3 & 2+3=11 \\ 0+2=2 & & \\ 0+3=3 & 1+3=10 & 3+3=12 \end{array}$$

Пример. Сложить числа $2103_{(4)}$ и $1312_{(4)}$

$$\begin{array}{r} 2103_{(4)} \\ +\ 1312_{(4)} \\ \hline 10021_{(4)} \end{array}.$$

Еще проще таблица сложения в двоичной системе счисления:

$$0+0=0,\ 0+1=1,\ 1+1=10.$$

Пример.

$$\begin{array}{r} 110101_{(2)} \\ +\ 1100011_{(2)} \\ \hline 10011000_{(2)} \end{array}.$$

Вычитание. Вычитание выполняем так же, как и в десятичной системе: подписываем вычитаемое под уменьшаемым и производим вычитание чисел, являющихся цифрами единиц соответствующих разрядов, начиная с 1-го; если вычитание единиц невозможно, производим в уменьшаемом раздробление единицы следующего высшего разряда и т. д.

Пример. Вычислить разность $2301_{(4)} - 1223_{(4)}$.

$$\begin{array}{r} 2301_{(4)} \\ -\ 1223_{(4)} \\ \hline 1012_{(4)} \end{array}$$

От одной единицы 1-го разряда нельзя отнять 3, а единиц 2-го разряда в уменьшаемом нет, тогда берем одну единицу 3-го разряда, она содержит четыре единицы 2-го разряда, из них три оставляем на месте единиц 2-го разряда, а одну раздробим в единицы 1-го разряда, получим четыре единицы 1-го разряда, плюс одна единица 1-го разряда, которая у нас есть, всего имеем пять единиц, которые при основании $g = 4$ запишутся как 11. Дальше вычитаем поразрядно: разность единиц 1-го разряда: $11 - 3 = 2$; разность единиц 2-го разряда: $3 - 2 = 1$; 3-го разряда: $2 - 2 = 0$; 4-го разряда: $2 - 1 = 1$. Результат $1012_{(4)}$.

Умножение. Умножение выполняется так же, как и в десятичной системе: подписываем множитель под множимым и производим умножение, используя таблицу умножения.

Так, при $g = 7$ таблица примет вид

$0 \cdot 0 = 0$	$1 \cdot 1 = 1$	$2 \cdot 2 = 4$	$3 \cdot 3 = 12$	$4 \cdot 4 = 22$	$5 \cdot 5 = 34$
$0 \cdot 1 = 0$	$1 \cdot 2 = 2$	$2 \cdot 3 = 6$	$3 \cdot 4 = 15$	$4 \cdot 5 = 26$	$5 \cdot 6 = 42$
$0 \cdot 2 = 0$	$1 \cdot 3 = 3$	$2 \cdot 4 = 11$	$3 \cdot 5 = 21$	$4 \cdot 6 = 33$	$6 \cdot 6 = 51$
$0 \cdot 3 = 0$	$1 \cdot 4 = 4$	$2 \cdot 5 = 13$	$3 \cdot 6 = 24$		
$0 \cdot 4 = 0$	$1 \cdot 5 = 5$	$2 \cdot 6 = 15$			
$0 \cdot 5 = 0$	$1 \cdot 6 = 6$				
$0 \cdot 6 = 0$					

Пример. Вычислим $2034_{(7)} \cdot 5_{(7)}$.

$$\begin{array}{r} \times\ 2034_{(7)} \\ 5_{(7)} \\ \hline 13236_{(7)} \end{array}$$

Вычисляем $4 \cdot 5 = 26$; 6 цифра единиц; 2 прибавляем к произведению $3 \cdot 5$; $3 \cdot 5 + 2 = 21 + 2 = 23$; цифра единиц 2-го разряда 3; 2 прибавляем к произведению $0 \cdot 5$; $0 \cdot 5 + 2 = 2$; 2 — цифра единиц 3-го разряда; $2 \cdot 5 = 13$; 3 — цифра единиц 4-го разряда и 1 — цифра единиц 5-го разряда. Результат: $13236_{(7)}$.

В двоичной системе таблица умножения следующая:

$$0 \cdot 0 = 0, \quad 0 \cdot 1 = 0, \quad 1 \cdot 1 = 1.$$

Пример.

$$\begin{array}{r} \times\ 101_{(2)} \\ 110_{(2)} \\ \hline 101 \\ 101 \\ \hline 11110_{(2)} \end{array}$$

Деление. Деление систематических чисел основано на тех же приемах, что и в случае $g = 10$.

Пример. Вычислить частное $23604_{(7)} : 51_{(7)}$.

$$\begin{array}{r|l} -\ 23604_{(7)} & 51_{(7)} \\ \cline{2-2} 213 & 332_{(7)} \\ \cline{1-1} -\ 230 & \\ 213 & \\ \cline{1-1} 144 & \\ 132 & \\ \cline{1-1} 12_{(7)} & \end{array}$$

Делитель — число двузначное, отделяем в делимом слева направо две цифры. Они выражают число всех единиц 4-го разряда, но $23_{(7)} < 51_{(7)}$, поэтому берем в делимом трехзначное число $236_{(7)}$ и делим на $51_{(7)}$; в частном получаем 3 единицы 3-го разряда; умножаем $51 \cdot 3$ и полученное произведение 213 вычитаем из 236, остаток 23 раздробим в единицы 2-го разряда и продолжаем деление, пока не получим остаток, меньший делителя.

Краткие исторические сведения о системах счисления. Человечество не сразу пришло к десятичной системе счисления. Одной из древнейших была пятеричная система счисления.

К III—II тысячелетиям до н. э. относится шумеро-вавилонская система счисления, основанием которой являлось число 60. Эта система имела значительные достоинства, так как число 60 делится на 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60, тогда как основание нашей системы 10 имеет только 4 делителя: 1, 2, 5 и 10. Остатки шестидесятеричной системы сохранились до сих пор (деление круга на 360°, деление градуса на 60 *мин* и на 3600 *сек*, деление часа на 60 *мин* и на 3600 *сек*). У народов, населявших в древности Европу, применялась система счисления

с основанием двадцать, следы которой сохранились во французском и английском языках.

В различных языках остались также следы двенадцатиричной системы счисления (русское «дюжина» — 12, немецкое «гросс» равно 12^2). Некоторые ученые в XVIII в. предлагали даже заменить ею как более удобной десятичную систему.

Едва ли не самой древней была двоичная система счисления. В последнее время эта система нашла практическое применение в электронных счетных машинах: здесь важно то преимущество, что в ней пользуются только двумя цифрами: 0 и 1, а их легко передавать двумя состояниями: есть импульс — 1, нет импульса — 0.

Таким образом, одно из древнейших достижений человеческой культуры возродилось на новой технической основе.

Дробные числа

§ 13. Обыкновенные дроби

Доли единицы. Когда мы говорим, что от дома до школы полчаса ходьбы, то выражаем время не в целых часах, а в частях часа. Если одно яблоко нужно разделить поровну между тремя мальчиками, то каждый из них может получить только треть яблока, или третью его часть. В этих случаях мы имеем дело не с целыми единицами, а с их частями, или *долями* единицы. Доли могут быть самые разнообразные; например, сантиметр есть сотая доля метра, грамм есть тысячная доля килограмма, минута есть шестидесятая доля часа и т. д.

Дробные числа. *Число, составленное из одной или нескольких равных долей единицы, называется дробью* (обыкновенной дробью). Например, 1 десятая, 3 пятых, 12 седьмых — дроби.

Числа, в состав которых входит целое число и дробь, называются *смешанными* числами. Например, если 5 яблок разделить между двумя мальчиками, то число яблок у каждого мальчика выразится целым числом (два) и некоторой дробью (половина), т. е. смешанным числом.

Дроби и смешанные числа вместе называют *дробными числами.* Получаются дробные числа в результате измерений и деления.

Изображение дроби. Дробь изображают с помощью двух натуральных чисел и дробной *черты.* Под чертой пишут число, показывающее, на сколько долей разделена единица. Оно называется *знаменателем* дроби. Над чертой пишут число, показывающее сколько таких долей содержится в дроби. Оно называется *числителем* дроби. Числитель и знаменатель называются *членами дроби.* Например, у дроби $\frac{5}{7}$ числитель равен 5, а знаменатель 7. Читают дроби так: сначала называют числитель, потом — знаменатель. Например:

$$\frac{2}{7} \text{ — «две седьмых».}$$

Примечание. Дроби $\frac{100}{25}$ и $\frac{120}{5}$ читаются одинаково: «сто двадцать пятых». В подобных случаях надо между произношением числителя и знаменателя делать паузу.

Смешанные числа изображают так: сначала пишут целое число, а потом рядом с ним справа приписывают дробь. Например, смешанное число «два и четыре пятых» записывают $2\frac{4}{5}$.

Правильные и неправильные дроби. Различают дроби правильные и неправильные. Дробь называют *правильной*, если ее числитель меньше знаменателя. Если же числитель больше знаменателя или равен ему, такая дробь называется *неправильной*. Напрнмер, дроби

$$\frac{1}{2},\ \frac{10}{11},\ \frac{3}{125} \text{ — правильные;}$$

$$\frac{3}{2},\ \frac{37}{37},\ \frac{100}{7} \text{ — неправильные.}$$

Правильная дробь меньше единицы, а неправильная — больше или равна единице.

Обращение неправильной дроби в смешанное число и обратное преобразование. Чтобы обратить неправильную дробь в смешанное число, нужно числитель дроби разделить на знаменатель и найти остаток; частное покажет число целых единиц, а остаток — число долей единицы.

Пример. $\frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$, так как $20 : 3 = 6$ (остаток 2).

Чтобы обратить смешанное число в неправильную дробь, нужно знаменатель умножить на целое число, к полученному произведению прибавить числитель и сделать эту сумму числителем искомой дроби, а знаменатель оставить прежний.

Пример. $7\frac{2}{9} = \frac{9 \cdot 7 + 2}{9} = \frac{65}{9}$.

Сравнение дробей.

Из двух дробей с одинаковыми знаменателями та дробь больше, у которой больший числитель. Например, $\frac{5}{7} > \frac{3}{7}$, так как $5 > 3$.

Из двух дробей с одинаковыми числителями та больше, у которой знаменатель меньше. Например $\frac{6}{7} > \frac{6}{11}$, поскольку $7 < 11$.

В общем случае дроби сравниваются так. Умножают числитель первой дроби на знаменатель второй, а знаменатель первой на числитель второй. Если первое из этих произведений больше (равно или меньше) второго, значит и первая дробь соответственно больше (равна или меньше) второй.

Примеры. $\frac{5}{6} > \frac{7}{9}$, так как $5 \cdot 9 > 6 \cdot 7$;

$\frac{5}{8}$ равно $\frac{10}{16}$, так как $5 \cdot 16 = 8 \cdot 10$;

$\frac{10}{7} < \frac{9}{6}$, так как $10 \cdot 6 < 7 \cdot 9$.

В некоторых случаях соотношение между дробями легче установить путем сравнения их с единицей или половиной.

Пример 1. Сравнить дроби $\frac{15}{17}$ и $\frac{36}{35}$.

$\frac{15}{17} < 1$, а $\frac{36}{35} > 1$, следовательно, $\frac{15}{17} < \frac{36}{35}$.

Пример 2. Сравнить дроби $\frac{16}{31}$ и $\frac{27}{56}$.

$\frac{16}{31} > \frac{1}{2}$, так как $\frac{1}{2} = \frac{16}{32}$;

$\frac{27}{56} < \frac{1}{2}$, так как $\frac{1}{2} = \frac{27}{54}$.

Следовательно, $\frac{16}{31} > \frac{27}{56}$.

§ 14. Изменение дроби с изменением ее членов

Кратное изменение числителя и знаменателя. Поскольку дробь можно рассматривать как частное от деления двух чисел, то при изменении членов дроби ее значение изменяется так же, как изменяется частное при изменении делимого и делителя (см. стр. 15).

Если числитель дроби увеличить или уменьшить в несколько раз, не изменяя знаменателя, то дробь соответственно увеличится или уменьшится во столько же раз.

Пример. Возьмем дробь $\frac{2}{5}$ и увеличим ее числитель в 2 раза. Получим дробь $\frac{4}{5}$, в 2 раза большую первоначальной.

Если знаменатель дроби увеличить или уменьшить в несколько раз, то дробь соответственно уменьшится или увеличится во столько же раз. Если, например, знаменатель дроби $\frac{1}{3}$ увеличить в 2 раза, то дробь уменьшится в 2 раза.

Значение дроби не изменится, если числитель и знаменатель ее умножить на одно и то же число (или, что то же самое, увеличить в одинаковое число раз). Это утверждение называют *основным свойством дроби.*

В общем виде это свойство дроби можно записать так:

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}.$$

Отсюда следует, что *значение дроби не изменится, если числитель и знаменатель ее разделить на одно и то же число* (или, что то же самое, уменьшить в одинаковое число раз).

Пример. $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{8}{16}$.

С увеличением числителя и знаменателя на одно и то же число дробь увеличивается, если она правильная, и уменьшается, если она неправильная и не равна единице.

Примеры. $\frac{3}{5} < \frac{3+1}{5+1} = \frac{4}{6}$; $\frac{7}{6} > \frac{7+1}{6+1} = \frac{8}{7}$.

§ 15. Преобразование дробей

Сокращение дроби. *Сокращением дроби* называется замена ее другой, равной ей дробью с меньшими членами, путем деления числителя и знаменателя на их общий делитель.

Есть несколько способов сокращения дробей.

Первый способ. *Последовательное сокращение* на общие делители числителя и знаменателя.

Пример. $\frac{72}{96} = \frac{36}{48} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.

Второй способ. *Полное сокращение* на наибольший общий делитель числителя и знаменателя.

Пример. Сократить дробь $\frac{840}{3600}$.

Решение. НОД (840, 3600) = 120. Поэтому можно сразу сократить на 120:

$$\frac{840}{3600} = \frac{7}{30}.$$

Третий способ. Рассмотренными способами сокращают дроби в тех случаях, когда числитель и знаменатель легко разложить на множители. Если это не удается сделать быстро, пользуются *алгоритмом Евклида* (см. стр. 26).

Пример. Сократить дробь $\frac{12091}{14017}$.

$$\begin{array}{r|l}
14017 & 12091 \\ \cline{2-2}
12091 & 1 \\ \cline{1-1}
12091 & 1926 \\ \cline{2-2}
11556 & 6 \\ \cline{1-1}
1926 & 535 \\ \cline{2-2}
1605 & 3 \\ \cline{1-1}
535 & 321 \\ \cline{2-2}
321 & 1 \\ \cline{1-1}
321 & 214 \\ \cline{2-2}
214 & 1 \\ \cline{1-1}
214 & 107 \\ \cline{2-2}
214 & 2 \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Как видим, НОД (14014, 12091) = 107. Поэтому

$$\frac{12091}{14017} = \frac{113}{131}.$$

Если члены дроби не имеют общих делителей, то дробь называется *несократимой*. У такой дроби числитель и знаменатель взаимно простые числа. Две несократимые дроби равны только тогда, когда у них равны и числители, и знаменатели. Любая дробь равна одной и только одной несократимой дроби.

Раздробление дробей. Чтобы выразить дробь в меньших долях единицы, не изменяя ее значения, надо увеличить числитель и знаменатель в одно и то же число раз. Выражение дроби в меньших долях единицы называют *раздроблением* дробей.

Пример. Выразить дробь $\frac{4}{5}$ в пятнадцатых долях единицы.

Имеем:

$$\frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{12}{15}.$$

Приведение дробей к общему знаменателю. *Привести дроби к общему знаменателю* — значит выразить их в одинаковых частях единицы без изменения значения дроби. Обычно приводят дроби к *наименьшему* общему знаменателю.

Чтобы привести дроби к наименьшему общему знаменателю, поступают так: сокращают дроби, если это возможно; находят НОК всех знаменателей; вычисляют для каждой дроби частные от деления найденного НОК на ее знаменатель, т. е. *дополнительные множители*; умножая оба члена каждой дроби на соответствующий ей дополнительный множитель.

Пример. Привести к наименьшему общему знаменателю дроби $\frac{5}{72}$ и $\frac{7}{48}$.

НОК (72, 48) = 144. Дополнительные множители: 144 : 72 = 2, 144 : 48 = 3. Следовательно,

$$\frac{5}{72} = \frac{5 \cdot 2}{72 \cdot 2} = \frac{10}{144}, \quad \frac{7}{48} = \frac{7 \cdot 3}{48 \cdot 3} = \frac{21}{144}.$$

§ 16. Арифметические действия над обыкновенными дробями

Сложение. Суммой дробей с одним и тем же знаменателем называют дробь, имеющую тот же знаменатель, а числитель равный сумме числителей данных дробей, т. е.

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a+b}{n}.$$

Это определение можно сформулировать также в виде следующего правила.

Чтобы сложить дроби с одинаковыми знаменателями, надо сложить их числители, а знаменатель оставить тот же.

Пример. $\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{2+3}{7} = \frac{5}{7}$.

Чтобы сложить дроби с разными знаменателями, надо привести их к наименьшему общему знаменателю, а затем сложить полученные числители и под суммой подписать общий знаменатель.

Пример. $\frac{5}{8}+\frac{7}{12}=\frac{15}{24}+\frac{14}{24}=\frac{15+14}{24}=\frac{29}{24}=1\frac{5}{24}$.

Короче записывают так:

$$\frac{5}{8}+\frac{7}{12}=\frac{15+14}{24}=\frac{29}{24}=1\frac{5}{24}.$$

Чтобы сложить смешанные числа, нужно отдельно найти сумму целых и сумму дробных частей. Действие записывается так:

$$4\frac{7}{15}+1\frac{11}{45}+8\frac{4}{9}=13\frac{21+11+20}{45}=13\frac{52}{45}=14\frac{7}{45}.$$

Вычитание. Вычитание дробей можно определить как *действие, обратное сложению дробей.* Вычесть из одного дробного числа второе — значит найти третье число, которое в сумме со вторым дает первое. Из этого определения следует правило:

Чтобы вычесть дроби с одинаковыми знаменателями, нужно вычесть числитель вычитаемого из числителя уменьшаемого и оставить прежний знаменатель. Действие записывают так:

$$\frac{7}{8}-\frac{3}{8}=\frac{7-3}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}.$$

Чтобы вычесть дроби с разными знаменателями, нужно сначала привести их к наименьшему общему знаменателю, затем из числителя уменьшаемого вычесть числитель вычитаемого и под их разностью подписать общий знаменатель. Действие записывают так:

$$\frac{11}{12}-\frac{5}{8}=\frac{22-15}{24}=\frac{7}{24}.$$

Если нужно вычесть одно смешанное число из другого смешанного числа, то, если можно, вычитают дробь из дроби, а целое из целого. Действие записывают так:

$$8\frac{9}{11}-5\frac{3}{4}=3\frac{36-33}{44}=3\frac{3}{44}.$$

Если же дробь вычитаемого больше дроби уменьшаемого, то берут одну единицу из целого числа уменьшаемого, раздробляют ее в надлежащие доли и прибавляют к дроби уменьшаемого, после чего поступают, как описано выше. Действие записывают так:

$$5\frac{4}{9}-1\frac{11}{12}=4\frac{16-33}{36}=3\frac{52-33}{36}=3\frac{19}{36}.$$

Аналогично поступают, когда надо вычесть из целого числа дробное.

Пример. $3-2\frac{3}{5}=2\frac{5}{5}-2\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$.

Распространение свойств сложения и вычитания на дробные числа. Все законы и свойства сложения и вычитания натуральных чисел (см. стр. 11) справедливы и для дробных чисел. Их применение во многих случаях значительно упрощает процесс вычисления.

Пример 1. $4\frac{3}{4}+1\frac{7}{9}+2\frac{5}{12}+5\frac{2}{9}+\frac{7}{12}+3\frac{1}{4}=\left(4\frac{3}{4}+\right.$
$\left.+3\frac{1}{4}\right)+\left(1\frac{7}{9}+5\frac{2}{9}\right)+\left(2\frac{5}{12}+\frac{7}{12}\right)=8+7+3=18.$

Здесь использованы переместительный и сочетательный законы сложения.

Пример 2. $43\frac{29}{36}-\left(15\frac{11}{36}-4\frac{1}{2}\right)=\left(43\frac{29}{36}-15\frac{11}{36}\right)+4\frac{1}{2}=$
$=28\frac{1}{2}+4\frac{1}{2}=33.$

Здесь использовано правило вычитания из числа разности.

Умножение. Умножение дроби на целое число можно понимать так же, как и умножение целого числа на целое, т. е. как сложение одинаковых слагаемых. Например,

$$\frac{2}{3}\cdot 5=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}.$$

Но для умножения на дробь такое толкование не подходит. Например, умножая $\frac{3}{7}$ на $\frac{2}{3}$, нельзя сказать, что «$\frac{3}{7}$ надо взять $\frac{2}{3}$ раза слагаемым».

Произведением дробей называют такую дробь, числитель которой равен произведению числителей данных дробей, а знаменатель — произведению их знаменателей, т. е. $\frac{a}{n}\cdot\frac{b}{m}=\frac{a\cdot b}{m\cdot n}$. Это определение вытекает из необходимости сохранить за действием умножения ту роль, которую оно играло в теории и практике, пока мы рассматривали только целые числа, а также свойства умножения целых чисел (см. стр. 12). В частности, при таком определении задачи, решаемые в случае целых числовых данных умножением, в случае дробных числовых данных также можно решать умножением.

Из приведенного определения вытекает правило умножения дробей:

Чтобы умножить дробь на дробь, нужно умножить числитель на числитель, а знаменатель на знаменатель и первое произведение сделать числителем, а второе — знаменателем: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$.

При умножении следует делать (если возможно) сокращение.

Пример. $\frac{12}{19}\cdot\frac{19}{30}=\frac{\overset{2}{\cancel{12}}\cdot\cancel{19}}{\cancel{19}\cdot\underset{5}{\cancel{30}}}=\frac{2}{5}$.

Если учесть, что целое число представляет собой дробь со знаменателем 1, то умножение дроби на целое число и целого числа на дробь можно выполнить по этому же правилу.

Примеры. $\frac{2}{13}\cdot 7=\frac{2}{13}\cdot\frac{7}{1}=\frac{14}{13}=1\frac{1}{13}$; $6\cdot\frac{5}{12}=\frac{6}{1}\cdot\frac{5}{12}=$
$=2\frac{1}{2}$.

Умножение смешанных чисел. Чтобы перемножить смешанные числа, нужно предварительно обратить их в неправильные дроби и потом перемножать по правилу умножения дробей.

Пример. $2\frac{1}{2} \cdot 3\frac{1}{5} = \frac{5}{2} \cdot \frac{16}{5} = 8.$

Если же перемножают смешанное число на целое, то проще множить отдельно целую и дробную части.

Пример. $2\frac{3}{5} \cdot 3 = 6\frac{9}{5} = 7\frac{4}{5}.$

Законы и правила умножения натуральных чисел (см. стр. 12) справедливы и для дробей. Их использование упрощает устные и письменные вычисления.

Пример 1. $7\frac{2}{15} \cdot 30 = \left(7 + \frac{2}{15}\right) \cdot 30 = 210 + 4 = 214.$

Пример 2. $9\frac{7}{8} \cdot 8 = 9 \cdot 8 + \frac{7}{8} \cdot 8 = 72 + 7 = 79.$

Пример 3. $\frac{3}{4} \cdot \left(7\frac{9}{31} \cdot 1\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3}\right) \cdot 7\frac{9}{31} = 1 \cdot 7\frac{9}{31} = 7\frac{9}{31}.$

Пример 4. $\left(12\frac{2}{5} \cdot 43\frac{5}{17}\right) \cdot \frac{5}{31} = \left(\frac{62}{5} \cdot \frac{5}{31}\right) \cdot 43\frac{5}{17} = 2 \cdot 43\frac{5}{17} = 86\frac{10}{17}.$

Деление дробей. Для деления дробей сохраняется то же определение, что и для деления целых чисел: это — действие, посредством которого по данному произведению двух сомножителей и одному из этих сомножителей отыскивается второй сомножитель. Разделить одно число на второе — значит найти такое третье число, которое при умножении на второе дает первое. Выполняют деление дробей по следующему правилу.

Чтобы разделить дробь на дробь, нужно числитель первой дроби умножить на знаменатель второй, а знаменатель первой на числитель второй и первое произведение записать числителем, а второе — знаменателем:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

Пример. $\frac{6}{7} : \frac{9}{10} = \frac{6 \cdot 10}{7 \cdot 9} = \frac{60}{63} = \frac{20}{21}.$

По этому же правилу можно выполнять деление дроби на целое число и целого на дробь, если представить целое число в виде дроби со знаменателем 1.

Примеры. $15 : \frac{5}{7} = \frac{15}{1} : \frac{5}{7} = \frac{15 \cdot 7}{1 \cdot 5} = \frac{21}{1} = 21;$

$$\frac{8}{13} : 2 = \frac{8}{13} : \frac{2}{1} = \frac{8 \cdot 1}{13 \cdot 2} = \frac{4}{13}.$$

Однако в последнем примере проще числитель разделить на целое число:

$$\frac{8}{13} : 2 = \frac{8 : 2}{13} = \frac{4}{13}.$$

Деление смешанных чисел. Чтобы выполнить деление смешанных чисел, их предварительно обращают в неправильную дробь и затем делят по правилу деления дробей.

Пример. $12\frac{3}{5} : 1\frac{1}{20} = \frac{63}{5} : \frac{21}{20} = \frac{63 \cdot 20}{5 \cdot 21} = 12.$

Однако при делении смешанного числа на целое иногда бывает удобней делить отдельно целую и дробную части смешанного числа.

Пример. $30\frac{5}{7} : 5 = 6\frac{1}{7}.$

Замена деления умножением. Если в какой-нибудь дроби поменять местами числитель и знаменатель, получится новая дробь, *обратная* данной. Например, для дроби $\frac{8}{7}$ обратная дробь будет $\frac{7}{8}$.

Очевидно, что произведение двух взаимно обратных дробей равно 1.

$$\frac{8}{7} \cdot \frac{7}{8} = 1.$$

Учитывая это, можно деление выполнять по следующему правилу.

Чтобы разделить одно число на другое, нужно делимое умножить на число, обратное делителю.

Пример. $\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{14}{15}.$

§ 17. Основные типы задач на дроби

Нахождение дроби от числа. Существует много задач, в которых требуется найти часть или дробь данного числа. Такие задачи решают умножением.

Задача. Хозяйка имела 20 руб.; $\frac{2}{5}$ их она израсходовала на покупки. Сколько стоят покупки?

Здесь требуется найти $\frac{2}{5}$ числа 20. Сделать это можно так:

$$20 \cdot \frac{2}{5} = 8.$$

Ответ. Хозяйка израсходовала 8 руб.

В этой задаче: 20 — данное число, $\frac{2}{5}$ — дробь, выражающая искомую часть, 8 — искомая часть данного числа.

Примеры. Найти $\frac{7}{15}$ от 30. Решение. $30 \cdot \frac{7}{15} = 14.$

Найти $\frac{5}{3}$ от $20\frac{2}{5}$. Решение. $20\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{3} = 34.$

В последнем примере найдена не часть от числа, так как 34 больше $20\frac{2}{5}$. Поэтому в общем случае говорят: найдена дробь от числа.

Чтобы найти дробь от данного числа, нужно данное число умножить на эту дробь.

Нахождение числа по известной его части. Иногда требуется по известной части числа и дробя, выражающей эту часть, определять все число. Такие задачи решаются делением.

З а д а ч а. В классе 12 комсомольцев, что составляет $\frac{3}{5}$ части всех учащихся класса. Сколько всех учащихся в классе?

$$12 : \frac{3}{5} = 20.$$

О т в е т. 20 учащихся.

П р и м е р. Найти число, $\frac{5}{3}$ которого составляет 34.

$$34 : \frac{5}{3} = 20\frac{2}{5}.$$

Чтобы найти число по известной его части, надо поделить эту часть на данную дробь.

Нахождение отношения двух чисел. Рассмотрим задачу.

З а д а ч а. Рабочий изготовил за день 40 деталей. Какую часть месячного задания выполнил рабочий, если месячный план составляет 400 деталей?

$$40 : 400 = \frac{40}{400} = \frac{1}{10}.$$

О т в е т. Рабочий выполнил $\frac{1}{10}$ часть месячного плана.

В даином случае часть (40 деталей) выражена в долях целого (400 деталей). Говорят также, что найдено отношение числа изготовленных за деиь деталей к месячному плану.

§ 18. Десятичные дроби

Десятичная дробь, ее запись и чтение. Частиым случаем обыкновенных дробей есть дроби, знаменателямн которых являются чвсла, изображеиные (в десятичной системе счисления) единицей с последующими нулями, например

$$\frac{3}{10},\ \frac{17}{100},\ \frac{241}{100},\ \frac{1}{100000}.$$

Такие дроби называют *десятичными.*

Десятичные дроби записывают без знаменателя, при этом используется тот же принцип, что н для целых чисел, а именно: значение каждой цифры зависит от места, на котором она стоит. В десятичных дробях целую часть отделяют запятой, а справа от запятой записывают дробиую часть. Цифры дробной части называют *десятичными знаками.*

Первый десятичный знак — это десятые части единицы, или просто десятые, второй — сотые, третий — тысячные и т. д.

Примеры. $\frac{27}{100} = 0{,}27$; $\frac{7}{1000} = 0{,}007$; $\frac{578}{100000} = 0{,}00578$;

$$3\frac{13}{1000} = 3{,}013.$$

При чтении десятичной дроби сначала читают целое число и определяют разряд последнего справа десятичного знака. Затем читают всю дробную часть, называя наименование последнего разряда. Например, 2,381 читают так: две целых, триста восемьдесят одна тысячная. 0,90007 читается, как ноль целых, девяносто тысяч семь стотысячных.

Благодаря поместному принципу записи десятичные дроби имеют большое преимущество перед обыкновенными: при сравнении десятичных дробей и выполнении действий над ними нет необходимости приводить их к общему знаменателю. Поэтому на практике чаще пользуются десятичными дробями.

Превращение десятичной дроби в обыкновенную. Чтобы преобразовать десятичную дробь в обыкновенную, ее записывают со знаменателем и, если возможно, сокращают.

Примеры. $0{,}45 = \frac{45}{100} = \frac{9}{20}$; $1{,}0125 = 1\frac{125}{10000} = 1\frac{1}{80}$.

Превращение обыкновенной дроби в десятичную. Существует несколько способов превращения обыкновенной дроби в десятичную.

Первый способ. Чтобы обратить обыкновенную дробь в десятичную, нужно числитель разделить на знаменатель.

Примеры. $\frac{7}{25} = 7 : 25 = 0{,}28$; $\frac{3}{40} = 3 : 40 = 0{,}075$.

Второй способ. Чтобы превратить обыкновенную дробь в десятичную, нужно помножить числитель и знаменатель данной дроби на такое число, чтобы в знаменателе получилась единица с нулями (если это возможно).

Пример. $\frac{7}{40} = \frac{7 \cdot 25}{40 \cdot 25} = \frac{175}{1000} = 0{,}175$.

Однако следует иметь в виду, что не всякую обыкновенную дробь можно обратить в десятичную (конечную). *В виде конечной десятичной дроби можно представить все те и только те обыкновенные дроби, которые после сокращения в знаменателе не содержат никаких простых множителей, кроме 2 и 5.* Если знаменатель несократимой обыкновенной дроби содержит хотя бы один простой множитель, отличный от 2 и 5, то при обращении ее в десятичную получается бесконечная десятичная дробь (см. стр. 43).

Основное свойство десятичной дроби. *Значение десятичной дроби не изменится, если к ней справа дописать несколько нулей.* Например, $0{,}3 = 0{,}30 = 0{,}300$ и т. д. Это свойство является следствием основного свойства обыкновенных дробей: $0{,}3 = \frac{3}{10} = \frac{30}{100} = \frac{300}{1000}$ и т. д.

На основании этого свойства выполняется *раздробление и сокращение десятичных дробей.* Чтобы выразить десятичную дробь в меньших десятичных частях, т. е. выполнить раздробление, достаточно написать соответствующее число нулей после последнего ее разряда.

Пример. $2{,}31 = 2{,}310 = 2{,}3100 = 2{,}31000$ и т. д.

В других случаях приходится решать обратную задачу: десятичную дробь, имеющую в конце хотя бы один нуль, выражать в более крупных десятичных частях (сокращение). Для этого достаточно зачеркнуть (отбросить) эти нули*.

Примеры. 5,750 = 5,75; 12,700 = 12,7; 23,3000 = 23,3.

Сравнение десятичных дробей по величине. Чтобы выяснить, какая из двух десятичных дробей больше, надо сравнить их целые части, десятые, сотые и т. д. При равенстве целых частей больше та дробь, у которой десятых частей больше; при равенстве целых и десятичных — та больше, у которой больше сотых, и т. д.

Пример. Из трех дробей 2,432; 2,41 и 2,4098 наибольшая первая, так как в ней сотых больше, а целые и десятые во всех дробях одинаковы.

§ 19. Действия над десятичными дробями

Умножение и деление десятичной дроби на 10^n. В десятичной дроби так же, как и в целом числе, значение цифры увеличивается в 10 раз при переходе на одно место справа налево и, наоборот, уменьшается в 10 раз при переходе на одно место слева направо. На основании этого можно быстро выполнить умножение и деление на 10, 100 и т. д.

Чтобы умножить десятичную дробь на 10, 100, 1000 и т. д. надо перенести запятую соответственно на один, два, три и т. д. знака вправо. Если при этом нехватает знаков у числа, то приписывают нули.

Пример. 15,45 · 10 = 154,5; 32,3 · 100 = 3230.

Чтобы разделить десятичную дробь на 10, 100, 1000 и т. д., надо перенести запятую соответственно на один, два, три и т. д. знака влево. Если для перенесения запятой не хватает знаков, их число дополняют соответствующим числом нулей слева.

Примеры. 184,35 : 100 = 1,8435; 3,5 : 100 = 0,035.

Сложение и вычитание десятичных дробей. Десятичные дроби складывают и вычитают почти так же, как складывают и вычитают натуральные числа.

Примеры.

$$\begin{array}{r} 5{,}065 \\ +\ 7{,}83 \\ \hline 12{,}895 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 16{,}29 \\ -\ 4{,}75 \\ \hline 11{,}54 \end{array}$$

Умножение десятичных дробей. *Чтобы перемножить две десятичные дроби, достаточно, не обращая внимания на запятые, перемножить их как целые числа и в произведении отделить запятой справа столько десятичных знаков, сколько их было во множимом и множителе вместе.*

Пример 1. 2,064 · 0,05.

Перемножаем целые числа: 2064 · 5 = 10320. В первом сомножителе было три знака после запятой, во втором — два. В произведении число десятичных знаков должно быть пять. Отделим их справа и получим 0,10320. Нуль, стоящий в конце, можно отбросить: 2,064 · 0,05 = = 0,1032.

Пример 2. 1,125·0,08. Перемножаем 1125 и 8: 1125·8 = 9000.

---

* В случае приближенных чисел нули в последних разрядах справа в десятичной дроби отбрасывать нельзя, так как они характеризуют, с какой точностью задана десятичная дробь (см. стр. 48).

Число знаков после запятой должно быть $3 + 2 = 5$. Приписываем к 9000 нули слева (009000) и отделяем справа пять знаков. Получаем $1{,}125 \cdot 0{,}08 = 0{,}09000 = 0{,}09$.

Деление десятичных дробей. Рассматривается два случая деления десятичных дробей без остатка: 1) деление десятичной дроби на целое* число; 2) деление числа (целого или дробного) на десятичную дробь.

Деление десятичной дроби на целое число выполняется так же, как и деление целых чисел; получаемые остатки раздробляют последовательно в меньшие десятичные части и продолжают деление до получения в остатке нуля.

Примеры.

$$\begin{array}{r|l} 2{,}368 & 4 \\ \cline{2-2} -\underline{20} & 0{,}592 \\ 36 & \\ -\underline{36} & \\ 8 & \\ -\underline{8} & \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 66{,}0242 & 22 \\ \cline{2-2} \underline{66} & 3{,}0011 \\ 24 & \\ -\underline{22} & \\ 22 & \\ -\underline{22} & \\ 0 & \end{array}$$

Деление числа (целого или дробного) *на десятичную дробь* во всех случаях приводят к делению на целое число. Для этого увеличивают делитель в 10, 100, 1000 и т. д. раз, а чтобы частное не изменилось, в то же число раз увеличивают и делимое, после чего делят на целое число (как в первом случае).

Во всех рассмотренных выше примерах деление доводилось до конца, т. е. получалось точное частное. Однако в большинстве случаев точное частное в виде десятичной дроби не может быть получено, как бы далеко ни продолжалось деление.

Пример.

$$\begin{array}{r|l} 0{,}5 & 6 \\ \cline{2-2} \underline{48} & 0{,}08333\ldots \\ 20 & \\ -\underline{18} & \\ 20 & \\ -\underline{18} & \\ 20 & \text{и т. д.} \end{array}$$

Здесь все время повторяется один и тот же остаток 2, следовательно, процесс деления можно продолжать без конца. Частное в данном случае можно представить в виде бесконечной периодической десятичной дроби 0,08333... .

§ 20. Периодические десятичные дроби

Определение периодической десятичной дроби. Бесконечные десятичные дроби, в которых одна или несколько цифр неизменно повторяются в одной и той же последовательности, называются *периодическими* десятичными дробями. Совокупность повторяющихся цифр называется *периодом* этой дроби.

Периодические дроби бывают чистые и смешанные. *Чистой периодической дробью* называется такая, у которой период начинается сразу после запятой, например 2,363636...; *смешанной* — такая, у которой

* Имеются в виду целые неотрицательные числа (см. стр. 8).

между запятой и первым периодом есть одна или несколько цифр не повторяющихся, например 0,5232232... Периодические дроби сокращенно пишут так: вместо 2,3636... пишут 2,(36); вместо 0,08333... пишут 0,08(3); вместо 0,5232232... пишут 0,5(232), т. е. заключают в скобки период.

Если обыкновенная несократимая дробь обращается в бесконечную десятичную дробь, то последняя обязательно периодическая, причем, *если у знаменателя дроби отсутствуют множители 2 и 5, она чистая периодическая, если же знаменатель содержит множителем 2 или 5, дробь смешанная.*

Примеры. Дробь $\frac{5}{27}$ превращается в чистую периодическую десятичную, так как 27 не делится ни на 2, ни на 5. Дробь $\frac{7}{12}$ превращается в смешанную периодическую, так как 12 делится на 2. Действительно,

$$\begin{array}{r|l} 5 & 27 \\ \hline -50 & 0{,}185185\ldots = 0{,}(185) \\ 27 & \\ \hline 230 & \\ -216 & \\ \hline 140 & \\ -135 & \\ \hline 50 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 7 & 12 \\ \hline -70 & 0{,}5833\ldots = 0{,}58(3). \\ 60 & \\ \hline 100 & \\ -96 & \\ \hline 40 & \\ -36 & \\ \hline 40 & \end{array}$$

Известно правило, позволяющее определить, сколько будет цифр в периоде и сколько до периода, если превращать обыкновенную несократимую дробь в бесконечную десятичную.

Если $b = 2^{\alpha} \cdot 5^{\beta} \cdot c$, и c взаимно простое с 10, то несократимая дробь $\frac{a}{b}$ превращается в такую бесконечную десятичную, в которой число цифр от запятой до первого периода равно большему из показателей α и β, а число цифр в периоде равно числу цифр в наименьшем из чисел 9,99, 999, 9999 и т. д., *делящемся на c.*

Пример. Сколько цифр до периода и сколько в периоде имеет бесконечная десятичная дробь, равная $\frac{301}{440}$?

$$440 = 2^3 \cdot 5 \cdot 11.$$

Больший показатель степени здесь равен 3. Следовательно, до периода должно быть 3 цифры. Число 99 делится на 11 (а 9 не делится), значит, в периоде должно быть 2 цифры.

Обращение периодической дроби в обыкновенную. *Чтобы обратить чистую периодическую дробь в обыкновенную, достаточно записать числителем ее период, а знаменателем — число, выраженное столькими девятками, сколько цифр в периоде.*

Примеры. $0,(7) = \frac{7}{9}$; $2,(05) = 2\frac{5}{99}$; $0,(063) = \frac{63}{999} = \frac{7}{111}$.

Чтобы обратить смешанную периодическую дробь в обыкновенную, достаточно из числа, стоящего до второго периода, вычесть число, стоящее до первого периода, и полученную разность взять числителем, а знаменателем написать число, выраженное столькими девятками,

сколько цифр в периоде и со столькими нулями в конце, сколько цифр между запятой и периодом.

Пример 1. $0{,}3(52) = \frac{352-3}{990} = \frac{349}{990}$;

Пример 2. $5{,}7(8) = 5\frac{78-7}{90} = 5\frac{71}{90}$.

Историческая справка о десятичных дробях. Десятичные дроби были введены значительно позже, чем обыкновенные. Впервые теорию десятичных дробей разработал среднеазиатский математик и астроном ал-Каши в начале XV в. В Европе десятичные дроби были вторично открыты голландским математиком Симоном Стевином в 1585 г. Современное обозначение десятичных дробей — введение запятой для отделения целой части числа от дробной — было предложено немецким астрономом И. Кеплером (1571—1630). В Англии и США вместо запятой до сих пор употребляется точка — знак, предложенный изобретателем логарифмов Джоном Непером в 1616 г. В России десятичные дроби впервые были изложены в «Арифметике» Магницкого.

§ 21. Проценты

Понятие о проценте. *Процентом* какого-либо числа называется сотая часть этого числа. Например, вместо того, чтобы сказать «54 сотых всех жителей нашей страны составляют женщины», можно сказать «54 процента всех жителей нашей страны составляют женщины». Вместо слова «процент» пишут также значок %.

Слово «процент» происходит от латинских слов pro centum, что означают «с сотни». Раньше процентами называли деньги, которые должник платил дополнительно за каждую занятую сотню рублей.

Так как процент есть сотая часть, то отсюда следует, что процент есть дробь со знаменателем 100. Поэтому дробь 0,49, или $\frac{49}{100}$, можно прочитать как 49 процентов и записать без знаменателя в виде 49%. Вообще, определив, сколько в данной десятичной дроби сотых частей, ее легко записать в процентах. Для этого пользуются правилом: чтобы записать десятичную дробь в процентах, надо перенести в этой дроби запятую на два знака вправо.

Примеры. $0{,}33 = 33\%$; $1{,}25 = 125\%$;
$0{,}002 = 0{,}2\%$; $21 = 2100\%$.

И наоборот:

$7\% = 0{,}07$; $24{,}5\% = 0{,}245$;
$0{,}1\% = 0{,}001$; $200\% = 2$.

Иногда употребляют понятие *промилле*. Промилле числа называют его тысячную долю. Слово «промилле» происходит от латинского pro mille — с тысячи; обозначается знаком $^0/_{00}$.

Пример. $0{,}002 = 0{,}2\% = 2^0/_{00}$.

В тысячных долях выражают концентрации растворов, отношения веса чистого золота, серебра, платины к общему весу сплава и др. Однако в последнем случае вместо промилле употребляют слово *проба*. Пробой называют число граммов драгоценного металла в 1000 *г* сплава. Например, золотом 958-й пробы называют сплав, в 1000 *г* которого содержится 958 *г* чистого золота.

Примечание. Следует, однако, иметь в виду, что понятие «проба» не во всех странах одинаково. Например, в дореволюционной России под пробой понимали количество золотников чистого металла, содержащихся в одном фунте сплава, или, другими словами, количество весовых частей чистого металла, содержащихся в 96 весовых частях сплава. Сплав, который мы называем золотом 750-й пробы, раньше называли золотом 72-й пробы. В Англии, Швейцарии и других странах, где узаконена так называемая каратная система проб, этот сплав называют золотом 18-й пробы.

§ 22. Основные типы задач на проценты

Нахождение процентов данного числа.

Задача. Бригада трактористов по плану должна израсходовать 9 *т* горючего. Трактористы взяли соцобязательство сэкономить 20% горючего. Определить экономию горючего в тоннах.

Если в этой задаче вместо 20% написать равное ему число 0,2, получим задачу на нахождение дроби числа. А такие задачи решают умножением (см. стр. 39). Отсюда вытекает способ решения:

$$20\% = 0{,}2; \quad 9 \cdot 0{,}2 = 1{,}8 \ (т).$$

Вычисления можно записать и так:

$$\frac{9 \cdot 20}{100} = 1{,}8 \ (т).$$

Вообще, $p\%$ числа a равны $\frac{a \cdot p}{100}$.

Чтобы найти несколько процентов данного числа, достаточно данное число разделить на 100 и умножить результат на число процентов.

Задача. Рабочий в 1968 г. получал в месяц 90 руб., а в 1969 г. стал получать на 30% больше. Сколько он стал получать в 1969 г.?

Первый способ.

1) На сколько рублей больше стал получать рабочий?

$$\frac{90 \cdot 30}{100} = 27 \text{ (руб.)}.$$

2) Какова была месячная зарплата рабочего в 1969 г.?

$$90 + 27 = 117 \text{ (руб.)}.$$

Второй способ.

1) Сколько процентов прежнего заработка стал получать рабочий в 1969 г.?

$$100\% + 30\% = 130\%.$$

2) Какова была месячная зарплата рабочего в 1969 г.?

$$\frac{90 \cdot 130}{100} = 117 \text{ (руб.)}.$$

Нахождение числа по его процентам.

З а д а ч а. В колхозе посеяли кукурузу на площади 280 *га*, что составляет 14% всей посевной площади. Определить посевную площадь колхоза.

Если в этой задаче вместо 14% написать 0,14 $\left(\text{или } \frac{14}{100}\right)$, то получим задачу на нахождение числа по известной его части (см. стр. 40). А такие задачи решают делением.

14% = 0,14; 280 : 0,14 = 2000 (*га*).

Можно это решение оформить и так:

$$280 : \frac{14}{100} = \frac{280 \cdot 100}{14} = 2000 \ (га).$$

Вообще, если $p\%$ какого-то числа составляет a, то все число равно $\frac{a \cdot 100}{p}$.

Чтобы найти число по его процентам, достаточно известную часть числа разделить на число процентов и результат умножить на 100.

З а д а ч а. В марте завод выплавил 125,4 *т* металла, перевыполнив план на 4,5%. Сколько тонн металла завод должен был выплавить в марте по плану?

1) На сколько процентов завод выполнил план в марте?

$$100\% + 4{,}5\% = 104{,}5\%.$$

2) Сколько тонн металла завод должен был выплавить?

$$\frac{125{,}4 \cdot 100}{104{,}5} = 120 \ (т).$$

Нахождение процентного отношения двух чисел.

З а д а ч а. Нужно вспахать 300 *га* земли. В первый день вспахали 120 *га*. Сколько процентов заданного участка вспахали в первый день?

П е р в ы й с п о с о б. 300 *га* составляет 100%, значит на 1% приходится 3 *га*. Определив, сколько раз 3 *га*, составляющие 1%, содержатся в 120 *га*, мы ответим на вопрос задачи.

$$120 : 3 = 40 \ (\%).$$

В т о р о й с п о с о б. Определив, какую часть земли вспахали в первый день, выразим эту дробь в процентах:

$$\frac{120}{300} = \frac{2}{5} = 0{,}4 = 40\%.$$

Чтобы вычислить процентное отношение числа a к числу b, нужно найти отношение a к b и умножить его на 100.

З а д а ч а. Автомобиль на каждые 100 *км* пути летом расходует 8 *л* бензина, а зимой 8,8 *л*. На сколько процентов зимняя норма больше летней?

Зимой на каждые 100 *км* автомобиль расходует на 8,8 — 8 = = 0,8 (*л*) больше, чем летом. Эти 0,8 *л* по отношению к 8 *л* составляют 0,8 : 8 = 0,1 = 10%.

О т в е т. На 10%.

П р и м е ч а н и е. Иногда учащиеся считают, что в данном случае летняя норма расхода бензина меньше зимней также на 10%. Это неверно. В первом случае, когда мы сравниваем расход бензина с летней нормой, мы принимаем за 100% 8 *л*, если же сравнивать с зимней нор-

мой, нужно за 100% принимать 8,8 *л*, и ту же разность 0,8 *л* делить уже не на 8 *л*, а на 8,8 *л*, т. е.

$$0{,}8 : 8{,}8 = 0{,}091 = 9{,}1\%.$$

Как видим, летняя норма меньше зимней не на 10%, а на 9,1%.

§ 23. Приближенные вычисления

Числа точные и приближенные. Числа, встречающиеся на практике, бывают двух родов. Одни дают истинное значение величины, другие — только приблизительное. Первые называют *точными*, вторые — *приближенными*. Чаще всего удобно пользоваться приближенным числом вместо точного, тем более, что во многих случаях точное число вообще найти невозможно.

Так, если говорят, что в классе есть 29 учеников, то число 29 — точное. Если же говорят, что расстояние от Москвы до Киева равно 960 *км*, то здесь число 960 — приближенное, так как, с одной стороны, наши измерительные инструменты не абсолютно точны, с другой стороны, сами города имеют некоторую протяженность.

Результат действий с приближенными числами есть тоже приближенное число. Выполняя некоторые действия над точными числами (деление, извлечение корня), можно также получить приближенные числа.

Теория приближенных вычислений позволяет: 1) зная степень точности данных, оценить степень точности результатов; 2) брать данные с надлежащей степенью точности, достаточной для обеспечения требуемой точности результата; 3) рационализировать процесс вычисления, освободив его от тех выкладок, которые не окажут влияния на точность результата.

Округление. Одним из источников получения приближенных чисел является *округление*. Округляют как приближенные, так и точные числа.

Округлением данного числа до некоторого разряда называют замену его новым числом, которое получается из данного путем отбрасывания всех его цифр, записанных правее цифры этого разряда, или путем замены их нулями. Эти нули обычно подчеркивают или пишут их меньшими. При округлении учитывают следующее:

1) если первая (слева) из отбрасываемых цифр менее 5, то последнюю оставленную цифру не изменяют (округление с *недостатком*);

2) если первая отбрасываемая цифра больше 5 или равна 5, то последнюю оставленную цифру увеличивают на единицу (округление с *избытком*).

Покажем это на примерах. Округлить:

а) до десятых 12,34; $12{,}34 \approx 12{,}3$;

б) до сотых 3,2465; $3{,}2465 \approx 3{,}25$;

в) до тысячных 3,4335; $3{,}4335 \approx 3{,}434$.

г) до тысяч 12375; $12375 \approx 12000$.

Примечание. Еще несколько лет назад в случае отбрасывания одной лишь цифры 5 пользовались *правилом четной цифры*: последнюю цифру оставляли без изменения, если она четная, и увеличивали на единицу, если нечетная. Теперь этого правила не придерживаются: если отбрасывают одну цифру 5, то к последней оставленной цифре прибавляют единицу независимо от того, четная она или нет.

Абсолютная и относительная погрешности. Разность между точным числом и его приближенным значением называется *абсолютной погрешностью* приближенного числа. Например, если точное число 1,214 округлить до десятых, получим приближенное число 1,2. В данном случае абсолютная погрешность приближенного числа 1,2 равна 1,214—1,2, т. е. 0,014. Но в большинстве случаев известно только приближенное значение рассматриваемой величины. Тогда абсолютная погрешность неизвестна. В этих случаях указывают границу, которую она не превышает. Это число называют *граничной абсолютной погрешностью*. Говорят, что точное значение числа равно его приближенному значению с погрешностью меньшей, чем граничная. Например, число 23,71 есть приближенное значение числа 23,7125 с точностью до 0,01, так как абсолютная погрешность приближения равна 0,0025 и меньше 0,01. Здесь граничная абсолютная погрешность равна 0,01*.

Граничную абсолютную погрешность приближенного числа a обозначают символом Δa. Запись

$$x \approx a(\pm\Delta a)$$

следует понимать так: точное значение величины x находится в промежутке между числами $a - \Delta a$ и $a + \Delta a$, которые называют соответственно *нижней* и *верхней границами* x и обозначают $НГx$ и $ВГx$.

Например, если $x \approx 2{,}3(\pm 0{,}1)$, то $2{,}2 < x < 2{,}4$.

Наоборот, если $7{,}3 < x < 7{,}4$, то $x \approx 7{,}35(\pm 0{,}05)$.

Абсолютная или граничная абсолютная погрешность не характеризует качество выполненного измерения. Одна и та же абсолютная погрешность может считаться значительной и незначительной в зависимости от числа, которым выражается измеряемая величина. Например, если измеряем расстояние между двумя городами с точностью до одного километра, то такая точность вполне достаточна для этого измерения, в то же время при измерении расстояния между двумя домами одной улицы такая точность недопустима. Следовательно, точность приближенного значения величины зависит не только от величины абсолютной погрешности, но и от значения измеряемой величины. Поэтому мерой точности служит относительная погрешность.

Относительной погрешностью называется отношение абсолютной погрешности к величине приближенного числа. Отношение граничной абсолютной погрешности к приближенному числу называют *граничной относительной погрешностью;* обозначают ее так: $\frac{\Delta a}{a}$. Относительную и граничную относительную погрешности принято выражать в процентах. Например, если измерения показали, что расстояние x между двумя пунктами больше 12,3 *км*, но меньше 12,7 *км*, то в качестве приближенного значения принимают среднее арифметическое этих двух чисел, т. е. их полусумму; тогда граничная абсолютная погрешность равна полуразности этих чисел. В данном случае $x \approx 12{,}5(\pm 0{,}2)$. Здесь граничная абсолютная погрешность равна 0,2 *км*, а граничная относительная составляет

$$\frac{0{,}2}{12{,}5} = 0{,}016 = 1{,}6\%.$$

---

* Абсолютная погрешность бывает и положительной и отрицательной. Например, $1{,}68 \approx 1{,}7$. Абсолютная погрешность $1{,}68 - 1{,}7 \approx -0{,}02$ (см. стр. 76). Граничная абсолютная погрешность всегда положительна.

§ 24. Приближенные вычисления с помощью правил подсчета цифр

Предварительные замечания. Различают приближенные вычисления со строгим учетом погрешностей и без строгого учета. В менее ответственных вычислениях с приближенными числами пользуются вторым способом, основанным на так называемых *правилах подсчета цифр*. В этих правилах используются понятия десятичных знаков, значащих, точных и сомнительных цифр. Напомним, что *десятичными знаками* числа называют все его цифры, стоящие правее запятой (см. стр. 40). Например, числа 3,5 и 3,05 имеют соответственно один и два десятичных знака.

Значащими цифрами числа называются все его цифры, начиная с отличной от нуля первой слева, кроме нулей, стоящих в конце записи числа на месте отброшенных при округлении цифр (как уже отмечалось, эти нули обычно подчеркивают или пишут меньшими).

Примеры. В числе 3,5 — две значащие цифры, в числе 0,0307— три значащие цифры. В числе $\underline{35000}$, полученном в результате округления до тысяч, две значащие цифры.

Если граница абсолютной погрешности приближенного числа равна половине единицы разряда последней его цифры, то все цифры этого числа называют *точными*. Если же эта граница больше половины единицы разряда последней цифры числа, то последняя цифра такого числа называется *сомнительной*.

Примеры. В числе 2,06($\pm$0,005) цифры 2, 0 точные, а 6 — сомнительная. В числе 2,06($\pm$0,01) цифры 2 и 0 точные, а 6—сомнительная. В числе $\underline{35000}$, полученном в результате округления до тысяч, цифры 3 и 5 точные, а все три нуля — сомнительные.

Правила подсчета цифр тесно связаны с *принципом А. Н. Крылова* (1863—1945): *приближенное число следует писать так, чтобы в нем все значащие цифры, кроме последней, были верны и лишь последняя цифра была бы сомнительна и при том не более как на одну единицу.* Например, если приближенное число записано так: $x \approx 3{,}52$, то оно дано с точностью до сотых, т. е. $x \approx 3{,}52(\pm 0{,}01)$. Если же известно, что $x \approx 3{,}72(\pm 0{,}02)$, то согласно принципу А. Н. Крылова, его надо писать так: $x \approx 3{,}7$.

Вычисления с приближенными числами, записанными таким способом, выполняют как и над точными числами, но, придерживаясь следующих правил.

Правила подсчета цифр. 1. При сложении и вычитании приближенных чисел в результате следует сохранять столько десятичных знаков, сколько их в приближенном данном с наименьшим числом десятичных знаков.

Пример. Найти сумму приближенных чисел 127,42; 67,3; 0,12 и 3,03.

$$\begin{array}{r} 127{,}42 \\ 67{,}3 \\ 0{,}12 \\ 3{,}03 \\ \hline 197{,}87 \end{array} \approx 197{,}9.$$

Пример. Найти разность чисел: 418,7—39,832.

$$\begin{array}{r} 418{,}7 \\ -\ 39{,}83 \\ \hline 378{,}87 \end{array} \approx 378{,}9.$$

2. *При умножении и делении приближенных чисел в произведении надо сохранить столько значащих цифр, сколько их есть в данном числе наименьшим количеством значащих цифр.*

Пример. Умножить приближенные числа 3,4 и 12,32.

$$\begin{array}{r} 12{,}32 \\ \times\ 3{,}4 \\ \hline 4928 \\ +\ 3696 \\ \hline 41{,}888 \end{array} \approx 42.$$

Задача. Площадь прямоугольной грядки приближенно равна 7,6 *кв. м*, ширина — 2,38 *м*. Чему равна ее длина?

Длина грядки равна частному от деления 7,6 на 2,38.

Действие деления выполняют так:

$$\begin{array}{r|l} 7{,}60 & 2{,}38 \\ \hline 7{,}14 & 3{,}19 \\ \hline 460 & \\ 238 & \\ \hline 222 & \end{array} \approx 3{,}2\ (м).$$

Последнюю цифру частного 9 можно было и не писать, а, получив в частном две значащие цифры, и заметив, что остаток больший половины делителя, округлить частное с избытком.

3. *При возведении приближенных чисел в квадрат и куб в результате сохраняется столько значащих цифр, сколько их в основании.*

Примеры. $2{,}3^2 = 5{,}29 \approx 5{,}3$;

$0{,}8^3 = 0{,}512 \approx 0{,}5$.

4. В промежуточных результатах следует брать одной цифрой больше, чем рекомендуют предыдущие правила.

5. Если некоторые данные имеют больше десятичных знаков (при действиях первой ступени) или больше значащих цифр (при действиях II и III ступеней), чем другие, то их предварительно следует округлить, сохраняя лишь одну запасную цифру.

6. Если данные можно брать с произвольной точностью, то для получения результата с k цифрами данные следует брать с таким числом цифр, которое дает согласно перечисленным правилам $k + 1$ цифру в результате.

Применение правил. Применение вычислений способом подсчета цифр рассмотрим на примере.

Пример. Найти значение $x = \dfrac{(a-b)\,c}{a+b}$, если $a \approx 9{,}31$, $b \approx 3{,}1$, $c \approx 2{,}33$.

$$a - b = 9{,}31 - 3{,}1 \approx 6{,}21;$$
$$(a - b)\,c = 6{,}21 \cdot 2{,}33 \approx 14{,}5;$$
$$a + b = 9{,}31 + 3{,}1 \approx 12{,}4;$$
$$x = 14{,}5 : 12{,}4 \approx 1{,}2.$$

Примечание. Сформулированные выше правила подсчета цифр имеют вероятностный смысл: они наиболее вероятны, хотя существуют примеры, не удовлетворяющие этим правилам. Поэтому вычисления способом подсчета цифр — самый грубый способ оценки погрешности результата действий. Однако он очень прост и удобен, а точность таких вычислений вполне достаточна для большинства технических

расчетов. Поэтому этот способ широко распространен в вычислительной практике.

В более ответственных вычислениях пользуются способом границ или способом граничных погрешностей.

§ 25. Приближенные вычисления по способу границ

Наилучшим в смысле строгости из известных способов приближенных вычислений является *способ границ*. Пользуясь этим способом, по известным нижним и верхним границам данных чисел находят отдельно нижнюю и верхнюю границы результата.

Пусть, например, надо сложить числа

$$x \approx 3{,}2(\pm 0{,}05) \quad \text{и} \quad y \approx 7{,}9(\pm 0{,}05).$$

Имеем: $3{,}15 < x < 3{,}25$; $7{,}85 < y < 7{,}95$, откуда $11{,}00 < x + y < 11{,}20$.

Итак, $x + y \approx 11{,}1(\pm 0{,}1)$.

Вообще, нижняя граница суммы приближенных чисел равна сумме нижних границ слагаемых, а верхняя — сумме верхних границ слагаемых. Символически это можно записать так:

$$\text{НГ}(x + y) = \text{НГ}x + \text{НГ}y; \quad \text{ВГ}(x + y) = \text{ВГ}x + \text{ВГ}y.$$

Аналогичные правила справедливы для умножения:

$$\text{НГ}(xy) = \text{НГ}x \cdot \text{НГ}y; \quad \text{ВГ}(xy) = \text{ВГ}x \cdot \text{ВГ}y.$$

Для обратных действий — вычитания и деления — соответствующие правила имеют вид

$$\text{НГ}(x - y) = \text{НГ}x - \text{ВГ}y; \quad \text{ВГ}(x - y) = \text{ВГ}x - \text{НГ}y.$$

$$\text{НГ}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\text{НГ}x}{\text{ВГ}y}; \quad \text{ВГ}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\text{ВГ}x}{\text{НГ}y}.$$

Из определения НГ и ВГ вытекают также следующие правила:

1) округлять НГ можно только по недостатку, а ВГ — по избытку;

2) чем меньше разность $\text{ВГ}x - \text{НГ}x$, тем точнее определяется x;

3) в качестве приближенного значения x рекомендуется брать среднее арифметическое чисел $\text{НГ}x$ и $\text{ВГ}x$ или число, близкое к нему.

Таблица 1

Компоненты	НГ	ВГ
a	9,20	9,22
b	3,03	3,07
c	2,32	2,34
$a-b$	6,13	6,19
$(a-b)c$	14,22	14,49
$a+b$	12,23	12,29
x	1,15	1,19

Применение способа границ при вычислениях рассмотрим на примере.

Пример. Найти значение $x = \dfrac{(a-b)c}{a+b}$, если $a \approx 9{,}21\ (\pm 0{,}01)$; $b \approx 3{,}05\ (\pm 0{,}02)$, $c \approx 2{,}33\ (\pm 0{,}01)$.

Определяем НГ и ВГ каждого из чисел a, b, c и, выполнив над ними соответствующие действия, находим НГ и ВГ числа x.

Запись удобно оформить в виде таблицы 1.

Величины и пропорции

§ 26. Измерение величины

Величины и их измерения. Дать строгое определение понятию «величина» нельзя. Это одно из основных неопределяемых понятий, смысл которого раскрывают при помощи различных описаний. В старых книгах величинами называли все то, что способно увеличиваться или уменьшаться. Однако это нельзя считать строгим определением, так как говорят, например, об увеличении аппетита, прав, обязанностей и других понятий, которые не принято считать величинами.

Примеры величин: длина, площадь, объем, вес, скорость, время *и др.*

Характерной особенностью величины является то, что наряду с другими свойствами она имеет и числовую характеристику. Поэтому говорят о том или ином *числовом значении величины*. Величины можно измерять.

Измерить какую-нибудь величину — значит сравнить ее значение со значением другой величины такого же рода, принятой за единицу.

В каждом государстве установлены определенные единицы для измерения основных величин. Единицы измерения, вошедшие в употребление, называются *мерами*. Так, сейчас у нас приняты за единицу длины метр, за единицу веса грамм, за единицу времени секунда и т. д. Для каждого рода величин выбирают несколько единиц: одни более крупные (кратные), другие более мелкие (дольные).

Однако не всегда у нас пользовались такими мерами, а в некоторых странах и теперь приняты другие меры.

Старые русские меры. Некоторые старые русские меры и соотношения между ними.

Меры длины

Миля	содержит	7 верст ≈ 7,4676 *км*
Верста	»	500 саженей ≈ 1,0668 *км*
Сажень	»	3 аршина ≈ 2,1336 *м*
Аршин	»	16 вершков ≈ 0,7112 *м*
Сажень	»	7 футов ≈ 213,36 *см*
Фут	»	12 дюймов ≈ 30,48 *см*
Дюйм	»	10 линий ≈ 2,54 *см*

Меры веса

Пуд	содержит	40 фунтов (1 пуд ≈ 16,4 *кг*)
Фунт	»	32 лота
Лот	»	3 золотника
Золотник	»	96 долей

Английские меры

Меры длины

1 мил	содержит	0,001 дюйма
1 ладонь	»	4 дюйма
1 пядь	»	9 дюймов
1 фут	»	12 дюймов
1 ярд	»	3 фута
1 пол	»	5,5 ярдов
1 фурлонг	»	220 ярдов
1 англ. миля	»	8 фурлонгов
1 лига	»	3 мили

Примечание. Основной единицей длины в английской системе мер является ярд. Британский ярд равен 0,91439841 *м*. В США ярд равен $\frac{3600}{3937}$ *м*.

Мера веса

1 унция	содержит	16 драхм
1 фунт	»	16 унций
1 стоун	»	14 фунтов
1 британская четверть	содержит	2 стоуна
1 четверть (в США)	»	25 фунтов
1 центнер	»	4 четверти
1 тонна	»	20 центнеров
1 длинная тонна (британская мера)	»	2240 фунтов
1 короткая тонна (в США)	»	2000 фунтов

Примечание. Основной единицей веса в Англии и США является фунт. Он равен 0,453559243 килограмма. Перечень других английских мер дан в книге «Англо-русский словарь математических терминов», М., 1962.

§ 27. Метрическая система мер

В СССР с 1918 г. введена Метрическая система мер. Производные меры получаются из основных посредством увеличения или уменьшения их в 10, 100, 1000 и т. д. раз. Некоторые важнейшие меры Метрической системы:

Меры длины

Основная единица — **метр** (*м*)

Более мелкие единицы	*Более крупные единицы*
Дециметр (*дм*) — 0,1 *м*	Декаметр (*дкм*) — 10 *м*
Сантиметр (*см*) — 0,01 *м*	Гектометр (*гм*) — 100 *м*
Миллиметр (*мм*) — 0,001 *м*	Километр (*км*) — 1000 *м*
Микрон или микрометр (μ) — 0,000001	Мириаметр (*мм*) — 10 000 *м*
Миллимикрон (*mμ*) — 0,000000001 *м*	Мегаметр — 1 000 000 *м*

Меры площади

Основная единица — **квадратный метр** (*кв. м* или $м^2$)

Более мелкие единицы

Квадратный дециметр (*кв. дм*) = = 0,01 *кв. м*

Квадратный сантиметр (*кв. см*) = = 0,0001 *кв. м*

Квадратный миллиметр (*кв. мм*) = = 0,000001 *кв. м*

Более крупные единицы

Квадратный декаметр или ар (*а*) = 1000 *кв. м*

Квадратный гектометр или гектар (*га*) = 10000 *кв. м*

Квадратный километр (*кв. км*) = = 1 000 000 *кв. м*

Меры объема

а) *Газообразных и твердых тел*

Основная единица — **кубический метр**, или стер (*куб. м*, или $м^3$)

Более мелкие единицы

Кубический дециметр (*куб. дм*) = = 0,001 *куб. м*

Кубический сантиметр (*куб. см*) = = 0,000001 *куб. м*

Кубический миллиметр (*куб. мм*) = = 0,000000001 *куб. м*

Более крупные единицы

Кубический километр (*куб. км*) = = 1 000 000 000 *куб. м*

б) *Жидкостей и сыпучих тел*

Основная единица — **литр** (*л*) — объем 1 *куб. дм*. Точнее 1 *л* = = 1,000028 *куб. дм*.

Более мелкие единицы

Децилитр (*дл*) = 0,1 *л*

Сантилитр (*сл*) = 0,01 *л*

Миллилитр (*мл*) = 0,001 *л*

Микролитр (*мкл*) = 0,000001 *л*

Более крупные единицы

Декалитр (*дкл*) = 10 *л*

Гектолитр (*гл*) = 100 *л*

Килолитр (*кл*) = 1000 *л*

Меры веса

Основная единица — **грамм** (*г*) — вес 1 *куб. см* чистой дистиллированной воды при 4° С и атмосферном давлении 760 *мм рт. ст.*

Более мелкие единицы

Дециграмм (*дг*) = 0,1 *г*

Сантиграмм (*сг*) = 0,01 *г*

Миллиграмм (*мг*) = 0,001 *г*

Микрограмм = 0,000001 *г*

Карат (*к*) = 0,2 *г*

Более крупные единицы

Декаграмм (*дкг*) = 10 *г*

Гектограмм = 100 *г*

Килограмм (*кг*) = 1000 *г*

Центнер (*ц*) = 100 *кг*

Тонна (*т*) = 1000 *кг*

§ 28. Система СИ

В октябре 1960 г. XI Генеральная конференция по мерам и весам, на которой присутствовали представители 32 стран (в том числе СССР, Чехословакии, Франции, Великобритании, США и др.), приняла Международную систему единиц SI (СИ — система интернациональная) в качестве универсальной системы для всех отраслей науки и техники.

В сентябре 1961 г. Комитет стандартов, мер и измерительных приборов при Совете Министров СССР утвердил новый государственный стандарт «Международная система единиц» (ГОСТ 9867-61) для предпочтительного его применения с 1 января 1963 г. во всех областях науки, техники и народного хозяйства.

Международная система единиц состоит из шести основных единиц: метра (*м*) — для длины, килограмма (*кг*) — для массы, секунды (*сек*) — для времени, градуса Кельвина (°К) — для термодинамической температуры, ампера (*а*) — для силы тока и свечи (*св*) — для силы света; двух дополнительных единиц: радиана (*рад*) — для плоского угла и стерадиана (*стер*) — для телесного угла и 27 важнейших производных единиц: площади — квадратный метр ($м^2$), объема — кубический метр ($м^3$), линейной скорости — метр на секунду (*м/сек*), угловой скорости — радиан на секунду (*рад/сек*) и др.*

Большинство определений основных единиц в системе СИ являются новыми. Например: «*Метр* — длина, равная 1650763,73 длин волн в вакууме излучения, соответствующего переходу между уровнями $2P_{10}$ и $5d_5$ атома криптона 86»; «*Килограмм* — единица массы — представлен массой международного прототипа килограмма»; «*Секунда* — $\frac{1}{31556925{,}9747}$ часть тропического года для 1900 г. января 0 в 12 часов эфемеридного времени».

Необходимость новых определений вызвана тем, что старые определения не обеспечивали надлежащей точности измерений при современном состоянии техники. Новые определения основных единиц более стабильны, чем старые, и дают возможность повысить точность их воспроизведения.

Более крупные (кратные) и более мелкие (дольные) единицы измерения по сравнению с приведенными в системе СИ (как и в метрической системе) следует образовывать путем их умножения на степень числа 10, соответствующую приставке, присоединенной к наименованию основной единицы**:

дека — 10 (*дк*)	деци — 10^{-1} (*д*)
гекто — 10^2 (*г*)	санти — 10^{-2} (*с*)
кило — 10^3 (*к*)	милли — 10^{-3} (*м*)
мега — 10^6 (*М*)	микро — 10^{-6} (*мк*)
гига — 10^9 (*Г*)	нано — 10^{-9} (*н*)
тера — 10^{12} (*Т*)	пико — 10^{-12} (*п*)

§ 29. Исторические сведения о метрологии

Почти все единицы мер, принятые древнейшими народами, связаны с размерами частей человеческого тела. Такое происхождение имеют в частности дюйм (ширина пальца), фут (длина ступени), локоть (длина руки от локтя до конца среднего пальца), сажень (расстояние между концами средних пальцев двух вытянутых в стороны рук). Тысяча

---

* М. Г. Богуславский и др. Таблицы перевода единиц измерений, Стандартгиз, М., 1963.

** 10^{-1}, 10^{-2} ... обозначают соответственно $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{10^2}$ ... (см. стр. 116).

двойных шагов в древнем Риме получила название мили (от *milia* — тысяча).

Наиболее разработанной из древнейших метрологий была вавилонская, оказавшая значительное влияние на метрологию иных древних народов. До настоящего времени мы пользуемся единицами измерения времени, заимствованными из вавилонской метрологии (сутки имеют 24 часа; час имеет 60 минут; минута имеет 60 секунд).

Древнейшие метрологии заключали в себе измерение длин, площадей (земельных участков), объемов, веса, времени, а также монетные системы, связанные обычно с измерением веса.

До конца XIX в. большинство европейских стран имело свои особые системы измерений; особенно много их было в средние века и в новое время, когда Европа была раздроблена на много мелких государств. Азиатские, американские и другие страны и народы также имели свои особые системы мер и весов.

В старых русских рукописях (в «Русской правде» и др.) сохранились сведения о единицах измерения, используемых в IX—XIII вв. в Киевской Руси. Подобно тому, как это было в Западной Европе, отдельные русские земли имели свои меры и весы. Регламентация мер была начата в Московской Руси и получила свое завершение при Петре I. Единица длины — сажень, была приравнена 7 английским футам. Тогда же были установлены меры сыпучих тел: гарнец и четверик, равный 8 гарнцам. До XVII в. была установлена мера десятины как единицы измерения площадей, равная 80×30 саженей, а также сложились меры веса: 1 пуд равен 40 фунтам и др.

С развитием общества росли требования к точности мер и измерений. Усилились торговые связи между отдельными странами и народами. Однако развитие торговых отношений усложнялось тем, что в каждом государстве существовали разные исторически сложившиеся системы мер и под одним и тем же названием в разных местностях зачастую подразумевались разные величины, например существовали 100 различных футов (рабочий, землемерный, ткацкий, портняжный, инженерный, геометрический и др.), 120 различных фунтов (большой, малый, обыкновенный, казенный, торговый, городской, медицинский, горный и др.), 46 различных миль и т. д.

Бессистемность мер использовали купцы и крупные землевладельцы для еще большего закабаления бедного населения: меряя собственным аршином и собственным фунтом, они извлекали для себя максимальные прибыли.

Реформа системы мер была вызвана не столько научными интересами, сколько материальными интересами народных масс, страдавших от путаницы всей системы мер, от отсутствия правительственного контроля за мерами, от права феодальных владельцев вводить собственные меры.

Метрическая система мер была разработана французской Академией наук в 90-х годах XVIII в. во время Французской буржуазной революции и была введена во Франции 7 апреля 1795 г. В основу метрической системы была положена единица длины — метр, равная длине одной сорокамиллионной части Парижского меридиана. Все остальные единицы измерений находились в определенных соотношениях с метром, причем за основу была принята десятичная система счисления, вследствие чего метрическая система экономически была самой выгодной. Несмотря на это, проведение новой системы в жизнь встретило большие препятствия. Проведенне реформы мер было не в интере-

сах крупной буржуазии, пришедшей к власти во Франции, а восстановление королевской власти (1815 г.) содействовало забвению метрической системы, наряду с другими достижениями революции.

Революционное происхождение метрической системы препятствовало ее распространению и в других странах. Например, в 1823 г. петербургский академик Н. И. Фусс забраковал руководство геометрии Н. И. Лобачевского, мотивируя тем, что в нем за единицу длины принят метр, а за единицу измерения дуг — градус, а «сие разделение выдумано было во время Французской революции, когда бешенство нации уничтожить все прежде бывшее распространилось даже до календаря и деления круга».

В 1869 г. Петербургская Академия наук обратилась к научным учреждениям всего мира с призывом пересмотреть основание метрической системы с тем, чтобы она могла стать международной.

Достижения науки требовали заменить определение метра как одной десятимиллионной четверти меридиана, так как архивный метр не совпадал ни с одним из результатов последних измерений. По предложению Петербургской Академии наук за прототипы были приняты архивные эталоны метра и килограмма.

В 1877 г. в Париже на средства двадцати государств — участников «Конференции метра» было создано «Международное бюро мер и весов», которому вменено в обязанность хранить эталоны мер и изготовлять их образцы.

Новый эталон метра был изготовлен из устойчивого сплава платины и иридия и вместе с эталоном килограмма (масса 1,000028 *куб. дм.* воды при 4° С) помещен в подвалах бюро на хранение (Франция, Бретёйльский павильон).

В царской России большую работу по подготовке и внедрению в обиход метрической системы мер провели Б. С. Якоби и Д. И. Менделеев, который с 1892 г. стоял во главе Главной палаты мер и весов, преобразованной впоследствии во Всесоюзный научно-исследовательский институт метрологии им. Д. И. Менделеева.

Новая реформа мер (введение системы СИ) является дальнейшим шагом по уточнению единиц измерения в международных интересах.

§ 30. Именованные числа

Числа отвлеченные и именованные. Численное значение величины, взятое вместе с указанием единиц измерения, называется *именованным числом*. Так, 5 *кг*, 35 *см* — именованные числа. Если же при числе не указано единиц измерения, то такое число называется *отвлеченным* (35 — отвлеченное число).

Именованное число называется *простым*, если численное значение величины выражено одной единицей измерения, например 8 *см*. Именованное число называется *составным*, если численное значение величины выражено несколькими единицами измерения, например 5 *м* 25 *см*.

Превращение и раздробление именованных чисел. Преобразование именованного числа в единицы какого-нибудь низшего наименования называется *раздроблением*, а обратное преобразование в единицы высшего наименования называется *превращением*, или *укрупнением*. Так, преобразование числа 2 *км* 25 *м* в 2025 *м* есть раздробление, а обратное преобразование числа 2025 *м* в 2 *км* 25 *м* — превращение. Раздробление

и превращение именованных чисел выполняются в большинстве случаев устно и записывается так:

раздробление: 75 руб. 17 коп.= 7517 коп.; 7 *кг* 250 *г* = = 7250 *г*; 27 *м* 15 *см* 5 *мм* = 27155 *мм*;

превращение: 3574 коп.= 35 руб. 74 коп.; 6005 *м* = 6 *км* 5 *м*.

Действия с именованными числами. Арифметические действия с именованными числами выполняются так же, как и с отвлеченными числами, только здесь иногда одновременно с выполнением действия делают и некоторые преобразования. Поэтому различают действия с *преобразованием* и *без преобразования*.

Ниже на примерах показано, как принято записывать действия с именованными числами.

Сложение и вычитание.

257 *м* + 149 *м* 406 *м*	375 *г* 26 *кг* 935 *г* 26 *кг* 1310 *г* 27 *кг* 310 *г*	7 *м* 2 *дм* 5 *см* − 5 *м* 8 *дм* 6 *см* 1 *м* 3 *дм* 9 *см*

Умножение и деление.

Запись при письменном умножении составных именованных чисел можно вести по двум формулам.

Пример. 35 *км* 252 *м* × 125.

А.

× 252 *м* 125	× 35 *км* 125	× 35252 *м* 125
1260	175	176260 *м*
+ 504	+ 70	70504
252	35	35252
31500 *м* = 31 *км*	4375 *км*	4406300 *м*
500 *м*	+ 31 *км* 500 *м*	4406 *км* 500 *м*
	4406 *км* 500 *м*	

Б.

Деление.

При делении именованных чисел различают два случая:

деление именованного числа на абстрактное число, т. е. деление на равные части;

деление именованного числа на именованное число, т. е. деление по содержанию.

Письменное *деление на равные части* выполняется так:

Без раздробления.

− 312 *кг* 420 *г*	12
− 24	26 *кг* 35 *г*
72	
− 72	
420 *г*	
− 36	
60	
− 60	
0	

С раздроблением.

5 *кг* 120 *г*	16
− 5120 *г*	320 *г*
48	
− 32	
32	
− 32	
0	

Письменное *деление по содержанию* выполняется так:

$$\begin{array}{r|l} 65\ ч\ 15\ мин & 45\ мин \\ \hline -\ 3915\ мин & 87 \\ \quad 360 & \\ \hline \quad 315 & \\ -\ 315 & \\ \hline \quad 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 33\ кг\ 950\ г : 2\ кг\ 425\ г & \\ \hline -\ 33950\ г & 2425\ г \\ \quad 2425 & \\ \hline \quad 9700 & \\ -\ 9700 & \\ \hline \quad 0 & \end{array}$$

§ 31. Отношение чисел

Отношение чисел. Как уже отмечалось, частное от деления одиого чнсла на другое называется также их *отношением*. Таким образом, частное и отношение обозначают одно и то же понятне. Однако, когда говорят «частное», нмеют в виду одно чнсло, полученное в результате деления двух данных чисел. Когда же говорят «отношеиие», нмеют в виду пару чисел, соединенных знаком деления. Например, если разделить 10 на 2, получим $10 : 2 = 5$. В данном случае говорят, что частное от деления 10 на 2 равно 5, говорят также, что отношение 10 к 2 равно 5. Но само отношение данных чисел записывают в виде $10 : 2$, или $\frac{10}{2}$. Понятио, что числа $10 : 2$ и 5 равны. Поэтому и говорят, что отношеиие — то же самое, что и частное.

Для обозначения отношенння используют дробную черту или двоеточие — зиак деления.

В общем виде отношение записывают так: $a : b$.

Числа a и b называются *членами отношения*. Первый член a иазывается *предыдущим*, второй b — *последующим*. Например, в отношеиии $4 : 5$ число 4 есть предыдущий член, 5 — последующий.

Так как отношеиие двух чисел получают с помощью деления, то для него справедливы все свойства частного. *Основное свойство отношения: значение отношения не изменится, если его члены умножить или разделить на одно и то же число.*

Членами отношения могут быть любые числа, только последующий член не может быть равен нулю. Поэтому возможны и такие отношения: $2\frac{1}{2} : 3\frac{2}{3}$, илн $\frac{2\frac{1}{2}}{3\frac{2}{3}}$.

Чтобы получить отношение двух именованных чисел, надо дать эти числа в одиих единицах измерения.

Пример. Найти отношения 73 *см* к 2,92 *м*.

$$\frac{73\ см}{2{,}92\ м} = \frac{73\ см}{292\ см} = 0{,}25.$$

Сокращение члеиов отношения и замена отиошеиия дробных чисел отношеиием целых чисел. Используя основиое свойство отиошеии, выполияем два преобразования: 1) сокращеиие членов отиошеиия и 2) замеиу отношения дробных чисел отиошеиием целых чисел. Как это выполияется, видно из следующих примеров.

Пример 1. Сократить члены отношения: 48 : 32.

Решение. $48 : 32 = 3 : 2$.

Пример 2. Заменить отношение дробных чисел отношением целых чисел: $1\frac{1}{2} : \frac{2}{3}$.

$$1\frac{1}{2} : \frac{2}{3} = \frac{3}{2} : \frac{2}{3} = \frac{9}{6} : \frac{4}{6} = 9 : 4.$$

Мы привели дроби к общему знаменателю, а затем умножили предыдущий и последующий члены отношения на их общий знаменатель (на 6).

Примечание. Раньше различали *разностные* отношения (вида $a - b$) и *кратные* отношения (вида $a : b$). Теперь понятие «разностное отношение» не употребляется. В современной математике выражения вида $a : b$ тоже очень редко называют отношениями. Термин «отношение» теперь большинство математиков употребляют для обозначения какой-либо связи между предметами или понятиями. Например, говорят об отношениях «больше», «меньше», «равно», «не равно», «эквивалентно», «параллельно», «перпендикулярно» и т. п. Отношение ρ в некотором множестве называется *рефлексивным*, если для любого элемента x из этого множества $x\rho x$; *симметричным*, если из $x\rho y$ следует $y\rho x$; *транзитивным*, если из $x\rho y$ и $y\rho z$ следует $x\rho z$. Отношение, являющееся одновременно рефлексивным, симметричным и транзитивным, называется *отношением эквивалентности*. Такими, в частности, есть отношения равенства во множестве чисел, эквивалентности во множестве уравнений, подобия во множестве фигур и др. Нерефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение называется *отношением порядка*.

§ 32. Пропорции

Понятие о пропорции. *Пропорцией* называют равенство двух отношений. Общий вид пропорции: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, или $a : b = c : d$.

Примеры пропорций.

$$3 : 4 = 9 : 12,$$

$$\frac{2}{3} = \frac{8}{12},$$

$$10 : 2\frac{1}{2} = 1\frac{1}{3} : \frac{1}{3}.$$

$$20\ м : 4\ м = 10\ кг : 2\ кг.$$

Пропорции читают так: «3 относится к 4, как 9 к 12», «10 относится к $2\frac{1}{2}$, как $1\frac{1}{3}$ к $\frac{1}{3}$» и т. д. Или: «отношение 3 к 4 равно отношению 9 к 12»; «10 во столько раз больше $2\frac{1}{2}$, во сколько раз $1\frac{1}{3}$ больше $\frac{1}{3}$».

Члены отношений, составляющих пропорции, называются *членами пропорции*. Пропорция состоит из четырех членов. Первый и последний члены, т. е. члены, стоящие по краям, называются *крайними*, а члены пропорции, находящиеся в середине, называются *средними* членами. Так, в первой пропорции числа 3 и 12 будут крайними членами, а числа 4 и 9 — средними членами пропорции.

Все члены пропорции могут быть абстрактными числами, но два члена одного отношения (или обоих отношений) могут быть и однородными именованными числами:

$$3\frac{1}{2}\ кг : 5\ кг = \frac{1}{2}\ м : \frac{5}{7}\ м.$$

Основное свойство пропорции. *Произведение крайних членов пропорции равно произведению средних ее членов.*

В общем виде это свойство пропорции $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ записывают так: $ad = bc$.

Основное свойство пропорции может быть использовано для проверки правильности составленных пропорций.

Пример. Проверить правильность пропорции.

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{48} = 20 : \frac{5}{6}.$$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{48} \cdot 20$. Пропорция правильная, так как выполняется основное свойство пропорции: $\frac{5}{12} = \frac{5}{12}$.

Итак, из приведенных примеров видно, что если мы напишем такое равенство, у которого в левой части стоит произведение одних двух чисел, а в правой части произведение двух других чисел, то из этих четырех чисел можно составить пропорцию.

Вычисление неизвестных членов пропорции. Вычисление неизвестного члена пропорции называют решением пропорции. Для вычисления членов пропорции используются следствия из ее основного свойства.

1. *Неизвестный крайний член пропорции равен произведению средних членов, деленному на известный крайний, т. е. если* $x : a = b : c$, то $x = \frac{ab}{c}$.

2. *Неизвестный средний член пропорции равен произведению крайних членов, деленному на известный средний, т. е. если* $a : x = b : c$, то $x = \frac{ac}{b}$.

Пример 1. $x : 12 = 4\frac{3}{4} : 7\frac{1}{8}$; $x = \frac{12 \cdot 4\frac{3}{4}}{7\frac{1}{8}} = 8.$

Пример 2. $10{,}4 : 3\frac{5}{7} = x : \frac{5}{11}$; $x = \frac{10{,}4 \cdot \frac{5}{11}}{3\frac{5}{7}} = 1\frac{3}{11}.$

Перестановка членов пропорции. В каждой пропорции можно переставить: а) средние члены, б) крайние члены, в) средние и крайние; г) крайние на место средних и средние на место крайних. Всего можно получить из данной пропорции 8 пропорций (включая данную). В буквенной записи они принимают такой вид:

$$\begin{array}{ll} a:b=c:d & c:d=a:b \\ d:b=c:a & b:d=a:c \\ a:c=b:d & c:a=d:b \\ d:c=b:a & b:a=d:c \end{array}$$

Для всех этих пропорций выполняется основное свойство: $ad=bc$.

Пример. Выполнить возможные перестановки членов в пропорции $5:3=20:12$.

$$\begin{array}{ll} 5:3=20:12 & 3:5=12:20 \\ 5:20=3:12 & 3:12=5:20 \\ 20:5=12:3 & 12:20=3:5 \\ 20:12=5:3 & 12:3=20:5 \end{array}$$

Упрощение пропорций. К числу преобразований, не нарушающих пропорцию, относится одновременное увеличение или уменьшение в одинаковое число раз:

а) обоих членов любого отношения;

б) обоих предыдущих или обоих последующих членов;

в) всех членов пропорции.

Перечисленные преобразования дают возможность упрощать пропорции, в частности освобождать их от дробных членов.

Примеры. Упростить пропорцию

$$\frac{1}{2}:\frac{1}{48}=20:\frac{5}{6}.$$

Умножив все члены пропорции $\frac{1}{2}:\frac{1}{48}=20:\frac{5}{6}$ на 48, получим $24:1=960:40$, или $24:1=96:4$.

Производные пропорции. Если к обеим частям данной пропорции

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

прибавить по 1, то получим

$$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1,$$

или

$$\text{а)}\quad \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}.$$

Словами это можно выразить так. *Сумма членов первого отношения данной пропорции относится к его последующему члену, как сумма членов второго отношения к его последующему.*

Пример. Если $\frac{5}{3}=\frac{20}{12}$, то $\frac{8}{3}=\frac{32}{12}$.

Аналогично из данной пропорции можно получить следующее:

$$\text{б)}\ \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d},$$

т. е. разность членов первого отношения относится к его последующему члену, как разность членов второго отношения к его последующему члену;

$$\text{в)}\ \frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c},$$

т. е. сумма членов первого отношения относится к его предыдущему члену, как сумма членов второго отношения относится к его предыдущему члену;

$$\text{г)}\ \frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c},$$

т. е. разность членов первого отношения относится к его предыдущему члену, как разность членов второго отношения относится к его предыдущему члену;

$$\text{д)}\ \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d},$$

т. е. сумма членов первого отношения относится к их разности, как сумма членов второго отношения к их разности;

$$\text{е)}\ \frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

т. е. сумма предыдущих членов пропорции относится к сумме последующих, как каждый предыдущий к своему последующему.

Все эти и многие другие пропорции, получаемые из данной, называются *производными пропорциями*.

Свойство равных отношений. Последний пример производной пропорции можно обобщить на случай нескольких равных отношений. Если

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\dots=\frac{a_n}{b_n},$$

то

$$\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{b_1+b_2+\dots+b_n}=\frac{a_1}{b_1},$$

т. е. *если несколько отношений равны друг другу, то сумма всех предыдущих их членов так относится к сумме всех последующих, как каждый предыдущий член к своему последующему.*

Пример. Если $\frac{3}{5}=\frac{6}{10}=\frac{9}{15}=\frac{12}{20}$, то $\frac{30}{50}=\frac{3}{5}$.

§ 33. Арифметические задачи

Общие сведения. Различают арифметические задачи на *вычисление, доказательство и исследование*.

Рассмотрим несколько арифметических задач.

1. У ученика было 12 тетрадей, 5 тетрадей он исписал. Сколько тетрадей у него осталось?

2. Доказать, что если к трехзначному числу приписать такое же число, то полученное шестизначное число будет обязательно делиться на 7, 11 и 13.

3. Существуют ли числа, которые при делении на 9 дают в остатке 5, а при делении на 15 дают остаток 6?

Первая из этих задач — на вычисление, вторая — на доказательство, третья — на исследование.

В каждой арифметической задаче даны некоторые числа, соотношения и т. д. и сформулированы некоторые требования. То, что дано в задаче, называется ее *условием*, что требуется сделать — *требованием* или *вопросом*. *Решить задачу* — значит выполнить то, что требуется в ней. В результате решения задачи получают *ответ* или *решение*.

Обычно арифметические задачи содержат лишь такие данные, которые необходимы и достаточны для получения определенного единственного ответа. Такие задачи называют *определенными*. Но иногда встречаются задачи, имеющие несколько и даже бесконечное множество решений; их называют *неопределенными* задачами. Бывают и такие задачи, которые не имеют ни одного решения; их называют *противоречивыми*.

Арифметические задачи на вычисление. Арифметической задачей на вычисление называют требование определить численное значение какой-либо величины по известным численным значениям других величин, находящихся в определенной зависимости между собой и с искомым. Необходимыми элементами арифметической задачи на вычисления являются:

1) числовые данные;

2) словесные пояснения той зависимости, которая имеется между данными числами и между данными и искомыми;

3) тот вопрос задачи, ответ на который требуется найти.

Все арифметические задачи на вычисление принято делить на простые и составные. *Простыми* называются задачи, которые можно решить одним действием. Задачи, которые невозможно решить одним действием, называют *составными*.

Рассмотрим важнейшие типы составных арифметических задач.

Задачи на тройное правило. Наиболее часто встречаются арифметические задачи на так называемое *простое тройное правило*. В этих задачах даны три числа и требуется определить четвертое, пропорциональное к ним.

З а д а ч а. 10 болтов весят 4 *кг*. Сколько весят 25 таких болтов? Такие задачи можно решить несколькими способами.

Р е ш е н и е I (способом приведения к единице).

1. Сколько весит один болт?

$$4 \text{ кг} : 10 = 0{,}4 \text{ кг}.$$

2. Сколько весят 25 болтов?

$$0{,}4 \text{ кг} \cdot 25 = 10 \text{ кг}.$$

Р е ш е н и е II (способом пропорций). Так как вес болтов прямо пропорционален их количеству, то отношение весов равно отношению штук (болтов). Обозначив искомый вес буквой x, получим пропорцию

$$x : 4 = 25 : 10,$$

откуда

$$x = \frac{4 \cdot 25}{10} = 10 \text{ (кг)}.$$

Можно рассуждать и так: 25 болтов больше 10 болтов в 2,5 раза; следовательно, они тяжелее 4 *кг* тоже в 2,5 раза:

$$4 \text{ кг} \cdot 2{,}5 = 10 \text{ кг}.$$

Ответ. 25 болтов весят 10 *кг*.

Сложное тройное правило. Задачи, в которых по данному ряду соответствующих друг другу значений нескольких (более двух) пропорциональных величин требуется найти значение одной из них, соответствующее другому ряду данных значений остальных велнчин, называют задачами на *сложное тройное правило.*

Задача. 5 насосов в течение 3 *ч* выкачали 1800 ведер воды. Сколько воды выкачают 4 таких насоса в течение 4 *ч*?

5 нас. 3 *ч* — 1800 вед.
4 нас. 4 *ч* — x вед.

1) Сколько ведер воды выкачал 1 насос в течение 3 *ч*?

$$1800 : 5 = 360 \text{ (ведер)}.$$

2) Сколько ведер воды выкачал 1 насос в течение 1 ч?

$$360 : 3 = 120 \text{ (ведер)}.$$

3) Сколько воды выкачают 4 насоса за 1 *ч*?

$$120 \cdot 4 = 480 \text{ (ведер)}.$$

4) Сколько воды выкачают 4 насоса за 4 *ч*?

$$480 \cdot 4 = 1920 \text{ (ведер)}.$$

Ответ. 1920 ведер.

Сокращенное решение по числовой формуле:

$$x = \frac{1800 \cdot 4 \cdot 4}{5 \cdot 3} = 1920 \text{ (ведер)}.$$

Задачи на нахождение двух чисел по их сумме и разности.

Задача 1. Кусок полотна в 104 *м* надо разрезать на 2 такие части, чтобы в первой было на 16 *м* больше, чем во второй. Сколько метров полотна будет в каждой части?

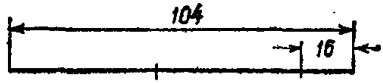


Рис. 1.

Если бы первая часть куска по длине была такая же, как вторая, т. е. на 16 *м* меньше, чем в действительности (рис. 1), то весь кусок имел бы

$$104 \text{ м} - 16 \text{ м} = 88 \text{ м}.$$

Разделив его пополам, получим длину второй части:

$$88 \text{ м} : 2 = 44 \text{ м}.$$

Тогда первая часть имеет:

$$44\ м + 16\ м = 60\ м.$$

Ответ. 60 *м* и 44 *м*.

Примечание. Вместо последнего действия можно было бы выполнить иное: 104 *м* — 44 *м* = 60 *м*.

Можно было бы предположить, что вторая часть такая же, как первая. Тогда имели бы:

$$104\ м + 16\ м = 120\ м,$$
$$120\ м : 2 = 60\ м,$$
$$60\ м - 16\ м = 44\ м.$$

Можно эту задачу решить и таким способом. Искомые числа могут быть уравнены, если от большего отнять и прибавить к меньшему их полуразность. Следовательно,

$$104\ м : 2 = 52\ м.$$
$$16\ м : 2 = 8\ м,$$
$$52\ м + 8\ м = 60\ м,$$
$$52\ м - 8\ м = 44\ м.$$

Эту задачу, как и все последующие арифметические задачи, можно решать и с помощью уравнений. Но здесь мы приводим только арифметические решения задач.

Задачи на нахождение двух чисел по их сумме или разности и отношению.

Задача 1. Разность двух чисел равна 14. Частное от деления большего числа на меньшее равно $4\frac{1}{3}$. Найти эти числа.

Так как частное от деления большего числа на меньшее равно $4\frac{1}{3}$, то меньшее число составляет 1 часть, а большее — $4\frac{1}{3}$ таких частей. Имеем: $4\frac{1}{3} - 1 = 3\frac{1}{3}$ (части) составляет разность чисел 14; $14 : 3\frac{1}{3} = 4\frac{1}{5}$ — меньшее число; $4\frac{1}{5} \cdot 4\frac{1}{3} = 18\frac{1}{5}$ — большее число.

Ответ. 18,2 и 4,2.

Задача 2. На одном складе в 3 раза больше муки, чем на другом. Если из одного склада вывезти 850 *кг*, а из другого 50 *кг*, то на обоих складах останется муки поровну. Сколько муки было на каждом складе?

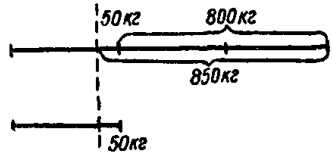


Рис. 2.

Из рис. 2 ясно, что $\frac{2}{4}$ части имеющейся муки составляют 800 *кг*, значит, на втором складе было 400 *кг* $\left(\frac{1}{4}\text{ часть}\right)$, на первом — 1200 *кг* (3 части).

Ответ. 1200 *кг*, 400 *кг*.

Задачи на пропорциональное деление.

З а д а ч а 1. Разделить число 100 на две части прямо пропорционально числам 2 и 3.

Эту задачу следует понимать так: разделить 100 на две части, чтобы первая относилась ко второй, как 2 к 3. Если обозначить искомые числа буквами x_1 и x_2, то эту задачу можно сформулировать и так. Найти x_1 и x_2 такие, чтоб

$$x_1 + x_2 = 100,$$
$$x_1 : x_2 = 2 : 3.$$

Такие задачи решают, пользуясь следующим правилом.

Чтобы разделить число на части прямо пропорционально нескольким данным числам, достаточно разделить его на сумму этих чисел и частное умножить на каждое из этих чисел.

Решим приведенную выше задачу.

$$x_1 = \frac{100 \cdot 2}{2+3} = 40; \quad x_2 = \frac{100 \cdot 3}{2+3} = 60.$$

О т в е т. 40 и 60.

Аналогично делят числа на три и более частей, пропорциональные данным числам.

З а д а ч а 2. Разделить 780 на четыре части пропорционально числам 1,5; 0,75; 0,4; 1,25.

Эту задачу следует понимать так: если обозначить искомые числа через x_1, x_2, x_3 и x_4, то:

$$\frac{x_1}{1,5} = \frac{x_2}{0,75} = \frac{x_3}{0,4} = \frac{x_4}{1,25}.$$

Умножив каждый из знаменателей на 100 и воспользовавшись свойством равных отношений (стр. 64), получим

$$\frac{x_1}{150} = \frac{x_2}{75} = \frac{x_3}{40} = \frac{x_4}{125} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{150 + 75 + 40 + 125} = \frac{780}{390} = 2,$$

откуда

$$x_1 = 300, \quad x_2 = 150, \quad x_3 = 80, \quad x_4 = 250.$$

П р и м е ч а н и е. Иногда задачу решают так.

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 1,5 : 0,75 : 0,4 : 1,25.$$

После замены отношения дробных чисел отношением целых чисел получим

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 30 : 15 : 8 : 25.$$
$$\frac{780}{30 + 15 + 8 + 25} = 10,$$
$$x_1 = 10 \cdot 30 = 300,$$
$$x_2 = 10 \cdot 15 = 150 \text{ и т. д.}$$

Однако с научной точки зрения такое решение некорректно, т. к. в математике нет понятия «отношение нескольких (более двух) чисел». В частности, равенство

$$1,5 : 0,75 : 0,4 : 1,25 = 30 : 15 : 8 : 25.$$

неверно: выполнив деление в его левой и правой частях, получим соответственно 4 и 0,01; соединять неравные числа знаком = нельзя.

Чтобы разделить число на части обратно пропорционально данным числам, надо разделить его прямо пропорционально числам, обратным данным.

Задача 3. Разделить число 52 на три части обратно пропорционально числам 4, 6 и 8.

Числа, обратные данным: $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ и $\frac{1}{8}$. Следовательно,

$$\frac{x_1}{\frac{1}{4}} = \frac{x_2}{\frac{1}{6}} = \frac{x_3}{\frac{1}{8}} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8}} = \frac{52}{\frac{13}{24}} = 96,$$

$$x_1 = \frac{1}{4} \cdot 96 = 24, \quad x_2 = \frac{1}{6} \cdot 96 = 16, \quad x_3 = \frac{1}{8} \cdot 96 = 12.$$

Ответ. 24, 16 и 12.

Задачи на смешение.

Задача 1. Сплавили 180 *г* золота 920-й пробы со 100 *г* 752-й пробы. Какой пробы получился сплав?

В первом слитке чистого золота было 0,92 от 180 *г*, т. е. $180 \cdot 0{,}92 = 165{,}6$ (*г*). Во втором слитке чистого золота было 0,752 от 100 *г*, т. е. $100 \cdot 0{,}752 = 75{,}2$ (*г*). Следовательно, в полученном сплаве чистого золота содержится $165{,}6 + 75{,}2 = 240{,}8$ (*г*). Общий вес сплава равен $180 + 100 = 280$ (*г*). Его проба равна

$$\frac{240{,}8}{280} \cdot 1000 = 860.$$

Ответ. Получен сплав 860-й пробы.

Задача 2. К 2 *кг* воды прибавили 8 *кг* 70-процентного раствора серной кислоты. Определить процентную концентрацию полученного раствора.

1) Сколько в растворе чистой (безводной) кислоты?

$$8\ кг \cdot 0{,}7 = 5{,}6\ кг.$$

2) Чему равен вес раствора?

$$2\ кг + 8\ кг = 10\ кг.$$

3) Чему равна процентная концентрация раствора?

$$5{,}6\ кг : 10\ кг = 0{,}56 = 56\%.$$

Примечание. Если количество кислоты выражено не в килограммах, а в литрах, то подобные задачи можно решать только с помощью таблиц удельных весов растворов серной кислоты. Рассмотрим, например, такую задачу. К 2 *л* воды прибавили 8 *л* 70-процентного раствора серной кислоты. Определить процентную концентрацию полученного раствора.

В таблице находим удельный вес 70-процентного раствора серной кислоты. Он равен 1,6. Следовательно, 8 *л* этого раствора весят $1{,}6 \times 8 = 12{,}8$ (*кг*). Безводной кислоты в нем содержится $12{,}8 \cdot 0{,}7 = 8{,}96$ (*кг*). Концентрации раствора равна $8{,}96 : 14{,}8 \approx 0{,}6 = 60\%$.

Рассмотренные задачи относятся к *задачам на смешение первого рода*. Они сравнительно не трудны. Более сложными являются *задачи на смешение второго рода*.

Задача 3. В каком отношении нужно взять два сорта товара стоимостью по 7,5 руб. за 1 *кг* и по 7 руб. за 1 *кг*, чтобы получить смесь стоимостью по 7,2 руб. за 1 *кг*?

Обозначив неизвестные количества товара ценой 7,5 руб. и 7 руб. за 1 *кг* соответственно через x_1 и x_2, составляем таблицу:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - 7{,}5 \text{ руб.} \\ x_2 - 7 \text{ руб.} \end{array}\right\} 7{,}2 \text{ руб.} \quad \begin{array}{l} \text{на 0,3 руб. дороже} \\ \text{на 0,2 руб. дешевле} \end{array}$$

Далее рассуждаем так. При стоимости 1 *кг* смеси по 7,2 руб. каждый килограмм товара первого сорта оценивался дешевле его стоимости на 0,3 руб., а каждый килограмм второго сорта, вошедший в смесь, оценивался дороже на 0,2 руб.

Для того чтобы уменьшение стоимости первого сорта могло быть покрыто повышением стоимости второго сорта (стоимость всей покупки не изменилась), необходимо, чтобы каждый раз, когда берут 0,2 *кг* товара первого сорта, брали 0,3 *кг* второго сорта, т. е. $x_1 : x_2 = 0{,}2 : 0{,}3$ или $x_1 : x_2 = 2 : 3$.

Ответ. В отношении 2 : 3.

Задача 4. Из двух сплавов с 60-процентным и 80-процентным содержанием меди надо изготовить сплав весом 40 *кг* с 75-процентным содержанием меди. Сколько килограммов каждого сплава надо взять для этого?

Выражаем содержание меди в граммах на 1 *кг* сплава:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - 600\ г \\ x_2 - 800\ г \end{array}\right\} 750\ г \quad \begin{array}{l} \text{меньше на 150 } г \\ \text{больше на 50 } г \end{array}$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{50}{150}; \quad x_1 : x_2 = 1 : 3;$$

$$x_1 = \frac{40}{4} = 10\ (кг); \qquad x_2 = \frac{40}{4} \cdot 3 = 30\ (кг).$$

Ответ. 10 *кг* и 30 *кг**.

Задачи на движение. К арифметическим задачам на движение принадлежат такие, в которых на основании зависимости между временем, скоростью и расстоянием при равномерном движении надо найти одну из этих величин. В зависимости от их содержания различают задачи на встречное движение и на движение в одном направлении.

Встречное движение. Задача 1. Из города *А* в 11 *ч* выехала легковая машина и движется со средней скоростью 50 *км/ч* по направлению к городу *В*. Через 30 *мин* навстречу ей из города *В* вышла грузовая машина со средней скоростью 35 *км/ч*. В котором часу произойдет их встреча, если расстояние между городами равно 195 *км* (рис. 3)?

Рис. 3.

1) Какое расстояние пройдет легковая машина до выхода грузовой?

$$50 \cdot 0{,}5 = 25\ (км)$$

* Задачи 2 и 4 удобнее решать с помощью уравнений.

2) Какое расстояние пройдут до встречи при совместном движении легковая и грузовая машины?

$$195 - 25 = 170 \text{ (км)}.$$

3) На сколько километров сближаются за один час легковая и грузовая машины?

$$50 + 35 = 85 \text{ (км)}.$$

4) Через сколько часов после выхода грузовой машины они встретятся?

$$170 : 85 = 2 \text{ (ч)}.$$

5) В котором часу произойдет встреча машин?

$$11 \text{ ч} + 30 \text{ мин} + 2 \text{ ч} = 13 \text{ ч } 30 \text{ мин}.$$

Ответ. В 13 *ч* 30 *мин*.

Задача 2. Из двух пунктов, расстояние между которыми 37 *км*, вышли одновременно навстречу друг другу два туриста. Первый проходил за час на 0,5 *км* больше второго. С какой скоростью шел каждый турист, если через 2,5 *ч* после выхода расстояние между ними было 18,25 *км*?

Оба туриста прошли за 2,5 *ч* расстояние: $37 - 18{,}25 = 18{,}75$ (*км*). За час они прошли $18{,}75 : 2{,}5 = 7{,}5$ (*км*). Если бы скорость первого туриста была такая же, как и второго, они за час прошли бы $7{,}5 - 0{,}5 = 7$ (*км*). Тогда второй турист за час проходил $7 : 2 = 3{,}5$ (*км*), а первый — $3{,}5 + 0{,}5 = 4$ (*км*).

Ответ. 4 *км* и 3,5 *км*.

Движение в одном направлении. Задача 3. Из пункта *A* выехал велосипедист и едет по направлению пункта *B* со средней скоростью 12 *км/ч*. Через 2 *ч* из этого же пункта отправился в том же направлении второй велосипедист со скоростью 18 *км/ч*. Через сколько часов и на каком расстоянии от *A* второй велосипедист догонит первого (рис. 4)?

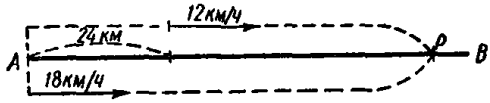


Рис. 4.

1) Какое расстояние проходит первый велосипедист до выезда второго?

$$12 \cdot 2 = 24 \text{ (км)}.$$

2) На сколько километров больше проходит в час второй велосипедист, чем первый?

$$18 - 12 = 6 \text{ (км)}.$$

3) Через сколько часов после своего выезда второй велосипедист догонит первого?

$$24 \text{ км} : 6 \text{ км} = 4 \text{ (ч)}.$$

4) На каком расстоянии от *A* второй велосипедист догонит первого?

$$18 \times 4 = 72 \text{ (км)}.$$

Ответ. 4 *ч*, 72 *км*.

II. АЛГЕБРА И ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ О РАЗВИТИИ АЛГЕБРЫ

Первые алгебраические задачи были поставлены и решены еще математиками древнего Египта и Вавилона. Папирус Ахмеса, относящийся к XVIII в. до н. э., содержит решение одиннадцати задач, приводящих к уравнениям с одним неизвестным. Значительно более глубокими знаниями обладали вавилоняне. До нашего времени сохранились тексты с решением системы двух уравнений с двумя неизвестными, квадратных и кубических уравнений, систем квадратных уравнений с двумя и с тремя неизвестными.

В древней Греции алгеброй занимались очень мало. Однако замечательный труд Диофанта Александрийского, написанный около 250 г. н. э., является доказательством того, что в древней Греции уже тогда существовала алгебра как наука, связанная, очевидно, с вавилонской математикой. Этот труд, носивший название «Арифметика», содержал решения задач, приводимых к уравнениям первой и второй степени и к неопределенным уравнениям. Все рассуждения Диофанта — чисто аналитического типа, но при решении каждой задачи он пользовался специальным способом: общих способов решений он не знал. Диофант не знал также отрицательных чисел, а при решении квадратного уравнения давал только положительный корень в качестве ответа. В своих алгебраических рассуждениях он пользовался некоторой символикой.

В истории математики, и в частности алгебры, различают три способа изложения — риторический, синкопированный и символический. *Риторическим* способом называется такой, когда все предложения записываются словами, символика отсутствует полностью. Этим способом изложения пользовалось большинство математиков вплоть до нового времени.

Синкопированный способ также характеризуется словесной записью математических выражений, однако для часто встречающихся действий и понятий применяется символика. Таким способом выполнен трактат Диофанта, которым вплоть до середины XVII в. пользовались западноевропейские алгебранисты.

Символический способ изложения, при котором математические выражения полностью записываются математическими символами, впервые в Европе был разработан французским математиком Виетом

(1540—1603) и применяется со второй половины XVII в. Однако задолго до этого времени он уже применялся индийскими математиками.

Индийцы внесли в алгебру значительный вклад. Во II в. н. э. они пользовались иррациональными числами. В VII в. математик Брахмагупта уже полностью владеет теорией уравнений первой и второй степеней с одним неизвестным. Он пользуется также и понятием отрицательного числа. К XII в. относятся два трактата математика Бхаскары — «Лилавати» и «Биджаганита». В последнем Бхаскара занимается решением квадратных уравнений, причем рассматривает оба корня, считая, однако, второй корень ненужным.

Некоторыми познаниями в алгебре обладали также математики древнего и средневекового Китая. Последняя часть «Математики в девяти книгах», написанной во II—III вв. н. э., посвящена применению алгебры к некоторым задачам геометрии. В XIII в. выдающийся китайский математик Цинь Цзю-Шао написал трактат «Девять отделов искусства счета», в котором он дает численные решения уравнений вплоть до четвертой степени. Это было наивысшим достижением китайцев в области алгебры; дальнейшее развитие математики в Китае последовало лишь в XIX в., после овладения европейскими методами исследования.

Начиная с IX в. алгеброй начали заниматься ученые ряда стран, входивших тогда в состав Арабского халифата. Они пользовались поэтому для своих сочинений арабским языком. Сирийскими, египетскими, иракскими и иранскими учеными были переведены на арабский язык, тщательно изучены и прокомментированы сочинения греческих математиков. Особенно значительный вклад принадлежит среднеазиатским ученым, которые, кроме греческой математики, изучили и индийскую, чем облегчили свои дальнейшие исследования.

Великий хорезмский математик Мухаммед ибн Муса написал трактат под названием «Книга восстановления и противопоставления».

«Восстановлением» Мухаммед называет перенос вычитаемого из одной части уравнения в другую, где оно становится слагаемым; «противопоставлением» — собирание неизвестных в одну сторону уравнения, а известных — в другую сторону. «Восстановление» по-арабски называется «ал-джебр». Отсюда и произошло слово «алгебра». В этом трактате Мухаммед дает учение об уравнениях первой и второй степеней, рассматривает применение алгебры к геометрии, а также к ряду вопросов, связанных с наследованием и делением имущества по сложным законам мусульманского права.

Значение Мухаммеда в истории науки велико. В сущности, он подытожил и свел воедино знания греков, индийцев и среднеазиатских народов по арифметике и алгебре.

Знаменитый таджикский поэт и ученый Омар Хайям (1040—1123) написал около 1070 г. трактат по алгебре, содержащий решение уравнений первой, второй и третьей степеней, а также некоторых специальных видов уравнений методом геометрических построений.

Много алгебраических задач было решено среднеазиатскими и арабскими учеными в связи с развитием астрономии и геометрии. Так, астроном Улуг-Бек (1394—1449) разработал численное решение кубических уравнений типа

$$x^3 + ax + b = 0,$$

необходимое для составления тригонометрических таблиц. Его современник ал-Каши разработал правило извлечения корней любой степени

из целых чисел. Ал-Каши принадлежит также первое в истории науки применение правила возведения двучлена в любую степень («бином Ньютона»).

В Западной Европе алгебра начала развиваться начиная с XIII в. В 1202 г. Леонардо Фибоначчи (Леонардо Пизанский) написал «Книгу аб абаке», энциклопедическое сочинение, в котором свел знания своего времени в области арифметики и алгебры, в значительной степени заимствованные у восточных математиков. Как это сочинение, так и его прообразы — труды среднеазиатских и восточных ученых — написаны часто риторическим способом и совершенно не содержали символики.

К самостоятельным достижениям Леонардо Фибоначчи относится приближенное алгебраическое решение кубического уравнения.

Точное алгебраическое решение этого уравнения было уже результатом трудов математиков эпохи Возрождения. В сущности, нахождение этого решения явилось одним из тех шагов, которые продвигают науку вперед и дают ей импульс для дальнейшего развития. Поэтому нахождение решения уравнения третьей степени явилось одним из крупнейших достижений математиков XVI в. В 1541 г. итальянский ученый Н. Тарталья нашел общее решение кубического уравнения, но опубликовал его другой итальянский ученый Джеронимо Кардано (1501—1576) в своей книге «Великое искусство». Там же Кардано привел и решение уравнений четвертой степени, найденное его учеником Феррари.

В течение следующих трех веков математики безуспешно искали алгебраические решения уравнений выше четвертой степени и только знаменитый норвежский математик Нильс Генрик Абель (1802—1829) и Эварист Галуа доказали, что общее алгебраическое уравнение выше четвертой степени не разрешимо в радикалах.

В своем труде Кардано указал также, что уравнение третьей степени имеет три корня. Правда, он не дал общего теоретического вывода этого положения, а привел его лишь в нескольких частных случаях. Он впервые решает задачу с комплексными числами: делит 10 на две части, произведение которых равно 40, и в результате получает $5+\sqrt{-15}$; $5-\sqrt{-15}$. Перемножив эти числа, он получает $25+15=40$.

Наибольшего развития алгебра как наука достигла в XVI в. во Франции. Труд Франсуа Виета «Введение в аналитическое искусство», опубликованный в 1591 г., был первой из работ в области алгебры, написанной полностью в символической форме. Виета усовершенствовал методы алгебры и тригонометрии и весьма подробно и систематически изложил применение алгебры к геометрии.

При решении уравнений третьей и четвертой степеней он пользовался методом приведения. Однако все корни, кроме положительных, отвергал.

В 1629 г. Жирар (1590—1633) опубликовал труд под названием «Новые изобретения в алгебре», где оценил пользу отрицательных корней и установил, что каждое уравнение имеет столько корней, сколько единиц содержится в его показателе степени.

Значительные исследования в области алгебры принадлежали великому французскому ученому Пьеру Ферма (1601—1665), который разработал прием исключения одного неизвестного из двух уравнений одинаковой степени.

В 1707 г. была опубликована «Универсальная арифметика» И. Ньютона (1642—1727), в которой содержался ряд полученных им

результатов из области алгебры. Частично эти результаты были опубликованы несколько раньше, в 1685 г., в «Алгебре» Валлиса (1616—1703). Ньютон усовершенствовал метод исключения Ферма, открыл теорему о биноме, хотя и не дал ее доказательства.

«Алгебра» Джона Валлиса долгое время служила наиболее полным руководством по этому предмету. Кроме глав из области теории и практики алгебры и арифметики, книга содержала также раздел по истории алгебры.

Над доказательством биномиальной теоремы в течение XVIII в. работало много выдающихся математиков. Якоб Бернулли (1654—1705) доказал ее, пользуясь теорией сочетаний, для случая целых положительных показателей. Теорема для случая отрицательных и дробных показателей была доказана Леонардом Эйлером (1707—1783). Строгое доказательство было дано лишь в XIX в. Абелем.

Л. Эйлер написал «Полное введение в алгебру», которое было переведено на русский язык и издано в 1769 г. под названием «Универсальная арифметика». Книга представляла для своего времени наиболее полное и научно изложенное руководство по алгебре. Особенно хорошо была изложена теория логарифмов, совершенно переработанная Эйлером. Книга была дважды переиздана, а также неоднократно издавалась на немецком и французском языках.

Молодой французский математик Эварист Галуа (1811—1832), погибший в возрасте 21 года, положил основу новому учению в алгебре — теории групп, которое развилось уже в наше время. Однако этот раздел выходит за пределы элементарной алгебры.

В русской школе отдельные сведения из области алгебры излагались в течение всего XVIII в. Сюда относилось учение об уравнениях первой и второй степеней, действия с буквенными выражениями, логарифмы, применение алгебры к решению геометрических задач. С конца XVIII в. под влиянием Эйлера и его учеников в русских учебных заведениях начинает читаться систематический курс алгебры.

Особенно много сделал для постановки преподавания алгебры академик С. Е. Гурьев (1764—1813).

В 1826—1839 гг. издал «Ручную математическую энциклопедию» профессор Московского университета Д. М. Перевощиков (1788—1880); третий том энциклопедии представлял собой учебник алгебры. Он дважды переиздан; третье издание вышло в 1854 г. Учебники Д. М. Перевощикова явились значительным вкладом в дело математического образования в России.

Следует отметить, что вопросами преподавания элементарной математики в средней школе занимались в середине XIX в. такие выдающиеся математики, как Н. И. Лобачевский (1792—1856), М. В. Остроградский (1801—1861), В. Я. Буняковский (1804—1889), О. И. Сомов (1815—1876), П. Л. Чебышев (1821—1894) и другие. Лобачевским и Сомовым, в частности, были составлены учебники по элементарной алгебре для средней школы.

Рациональные числа и алгебраические выражения

§ 1. Рациональные числа

Положительные и отрицательные числа. По мере развития математики происходило обобщение понятия числа. Обнаружилось, что чисел, которые использует арифметика, недостаточно для решения многих теоретических и практических задач. Были введены новые — *отрицательные числа*. Для их обозначения используют знак минус, например: —2, —19, —0,7 и т. д.

Отрицательные числа бывают целые и дробные. Например, числа —4, —306 — целые отрицательные, а числа —0,7, —4,18, $-\frac{2}{3}$, $-5\frac{1}{2}$ — дробные отрицательные. Чтобы не смешивать с отрицательными числами те натуральные и дробные числа, которые рассматривались в арифметике, условились называть их *положительными*. Перед положительными числами иногда пишут знак плюс, но можно его и не писать. Например, числа +7 и 7 — одно и то же.

Число *нуль* не принадлежит ни к положительным, ни к отрицательным числам. Перед ним можно ставить и плюс, и минус; числа +0, —0 и 0 — обозначают одно и то же.

Целые положительные (т. е. натуральные), целые отрицательные числа и нуль все вместе называют *целыми числами*. Все целые и дробные числа (положительные и отрицательные) называют *рациональными числами*.

Числовая ось. Рациональные числа удобно изображать на прямой линии. Для этого достаточно взять на прямой какую-нибудь точку O (ее называют *начальной*, или *нулевой*), в обе стороны от нее отложить равные отрезки и их концы обозначить числами, как показано на рис. 5. Тогда каждому рациональному числу на прямой будет соответствовать определенная точка. Например, число 2 изображает точка A, число —2,3 — точка B.

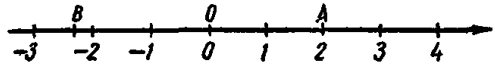


Рис. 5.

Прямая, точки которой изображают числа, называется *числовой прямой* или *числовой осью*.

Каждому рациональному числу на числовой оси соответствует единственная точка.

Примечание. Однако не каждой точке числовой оси соответствует рациональное число (см. стр. 100).

Двум рациональным числам, которые отличаются только знаками, на числовой оси соответствуют точки, расположенные по обе стороны от нулевой точки и на одинаковых расстояниях от нее. Такие пары чисел называют *противоположными числами*. Например, число 9 противоположно числу —9, и наоборот.

Противоположными называют также знаки + и —.

Абсолютная величина числа. Два противоположных числа, например $+7$ и -7, отличаются знаками, но записываются одинаковыми цифрами. Говорят, что они имеют одинаковые *абсолютные величины*. Абсолютная величина каждого из них равна 7.

Абсолютной величиной положительного числа называется само это число, абсолютной величиной отрицательного числа называется противоположное ему число, абсолютной величиной числа 0 называется само число 0.

Обозначают абсолютную величину числа a знаком $|a|$.

Таким образом, $|a| = a$, если $a > 0$; $|a| = -a$, если $a < 0$; $|0| = 0$.

Например, $|-13| = 13$; $|4| = 4$; $|0| = 0$.

Вместо термина *абсолютная величина* числа теперь часто употребляют — *модуль* числа.

Сравнение рациональных чисел. Отрицательные числа сравнивают как между собой, так и с положительными числами. Из двух рациональных чисел больше то, которому на числовой оси соответствует точка, расположенная правее.

Отсюда вытекают следующие положения:

а) *всякое положительное число больше нуля и больше отрицательного числа;*

б) *всякое отрицательное число меньше нуля;*

в) *из двух отрицательных чисел больше то, у которого абсолютная величина меньше.*

Например,

$$3 > 0;\ 1 > -5;\ -\frac{1}{2} < 0;\ -3 > -10;\ -4 < -1.$$

Равными считаются только такие числа, у которых и знаки, и абсолютные величины равны, например $-0{,}5 = -\frac{1}{2}$.

§ 2. Действия с рациональными числами

Сложение. *Чтобы сложить рациональные числа с одинаковыми знаками, складывают их абсолютные величины и перед суммой ставят их общий знак.*

Примеры. $(+8) + (+11) = 19$; $(-7) + (-3) = -10$.

Чтобы сложить два рациональных числа с разными знаками, необходимо из большей абсолютной величины вычесть меньшую абсолютную величину и поставить знак числа с большей абсолютной величиной.

Примеры. $(+19) + (-7) = 12$; $(-2{,}4) + 15{,}8 = 13{,}4$.

Сумма двух противоположных чисел равна нулю.

Примеры. $(-15) + (+15) = 0$; $\left(-4\frac{3}{8}\right) + \left(+4\frac{3}{8}\right) = 0$.

Если одно из двух слагаемых равно нулю, то сумма равна другому слагаемому: $a + 0 = 0 + a = a$.

Законы сложения положительных чисел справедливы для всех рациональных чисел.

Сложение нескольких чисел с разными знаками можно выполнить последовательно: сначала найти сумму первых двух слагаемых, к этой сумме прибавить третье и т. д. Однако удобней сложение выполнять

по такому правилу: *чтобы сложить несколько рациональных чисел с разными знаками, надо сложить отдельно все положительные и все отрицательные числа и полученные два числа сложить по правилу сложения чисел с разными знаками.*

Пример. $(+15) + (-4) + (-8) + (+9) + (-1) = (+24) + (-13) = +11$.

Вычитание. *Чтобы вычесть одно число из другого, достаточно к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому.*

Примеры. $(-3) - (+8) = (-3) + (-8) = -11$; $-7 - (-4) = -7 + (+4) = -3$.

Вычитание рациональных чисел заменяется сложением. Поэтому вычитание рациональных чисел всегда возможно.

Алгебраическая сумма. Так как вычитание рациональных чисел можно заменять сложением, то каждое выражение, состоящее из нескольких сложений и вычитаний, можно подать в виде суммы чисел с теми же абсолютными величинами. Поэтому на такие выражения можно смотреть как на суммы. Их называют *алгебраическими суммами.*

Примеры алгебраических сумм:

$$3 + 7 - 4,\ (-2) + (-7) + (+8) - (-4),\ a + b - c + d.$$

Умножение. *Чтобы перемножить два рациональных числа, надо перемножить их абсолютные величины и перед результатом поставить знак плюс, если оба сомножителя имеют одинаковые знаки, или минус, если сомножители имеют разные знаки.*

Примеры. $(-2) \cdot (-3) = +6$; $(-0,5) \cdot (+2) = -1$;
$(+2) \cdot (+3) = +6$; $(+0,5) \cdot (-4) = -2$.

Если хоть один сомножитель равен нулю, то и произведение равно нулю, например $0 \cdot (-5) = 0$; $(+2,5) \cdot 0 = 0$.

Чтобы умножить несколько сомножителей с разными знаками, надо перемножить абсолютные величины чисел и определить знак произведения: если число отрицательных сомножителей четное, то произведение будет положительным, если число отрицательных сомножителей нечетное, то произведение будет отрицательным.

Примеры. $(-5) \cdot (+4) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (+10) = -1200$ (число отрицательных сомножителей нечетное — три).

$(+2,5) \cdot (-7,3) \cdot (+4) \cdot (-2) \cdot (-1) \cdot \left(+\frac{1}{3}\right) \cdot (-6) = +292$ (число отрицательных сомножителей четное — четыре).

Законы умножения положительных чисел справедливы для всех рациональных чисел.

Возведение в степень. Степень любого рационального числа с натуральным показателем определяется так же, как и степень положительного числа, т. е. представляет собой произведение нескольких равных сомножителей.

Четная степень отрицательного числа положительная, нечетная степень — отрицательная.

Примеры. $(+2,1)^2 = +4,41$; $\left(-\frac{3}{4}\right)^3 = -\frac{27}{64}$; $(-0,03)^2 = 0,0009$.

Деление. *Частное от деления двух рациональных чисел с одинаковыми знаками равно частному их абсолютных величин, взятому со знаком плюс.*

Примеры. $(-16) : (-4) = +4$; $(+28) : (+4) = +7$.

Частное от деления двух рациональных чисел с противоположными знаками равно частному их абсолютных величин, взятому со знаком минус.

Примеры. $(-48) : (+12) = -4$; $(+16{,}8) : (-8) = -2{,}1$.

Исторические сведения о развитии понятия отрицательного числа. Впервые отрицательные числа появились у китайских математиков незадолго до начала нашего летоисчисления. В IV—V вв. индийские математики развили учение об отрицательных числах, а в VII в. Брахмагупта дал и истолкование действиям над отрицательными числами, называя положительные числа имуществом, а отрицательные — долгом: «Сумма двух имуществ есть имущество, двух долгов — долг, сумма имущества и долга — их разность, или, если они равны,— нуль. Сумма нуля и долга есть долг, имущества и нуля — имущество, двух нулей — нуль. Меньшее вычитается из большего, имущество из имущества, долг из долга, но если вычитается большее из меньшего, значение избытка меняется. Долг, будучи вычтен из нуля, делается имуществом, имущество превращается в долг».

Однако, несмотря на логичность и увязку с практикой, учение индийских ученых не было воспринято на Западе. Лука Пачиоли (1445—1514) пользуется отрицательными числами, но лишь в составе многочленов. Он пользуется правилом «минус на минус дает плюс» в применении к выражениям типа $(a - b) \times (a - b)$.

В большей степени пользуется отрицательными числами Кардано. М. Штифель исходя из положения, что отрицательные числа «меньше, чем ничто», назвал их «нелепыми числами». Большинство европейских ученых придерживалось такого же взгляда и оперировало исключительно с положительными числами.

Декарт тоже называл отрицательные числа «ложными», однако он представлял их в виде отрезков, имеющих направление, противоположное отрезкам, соответствующим положительным числам.

Дальнейшее развитие теории отрицательных чисел в конце XVII и начале XVIII вв. связано было с открытием Ньютоном и Лейбницем дифференциального и интегрального исчислений. Развитие новых областей высшей математики потребовало нового освещения отрицательных величин и выяснения их роли. Это было сделано в трудах Ньютона и Эйлера. Однако и во второй половине XVIII в. многие математики, даже такие крупные ученые, как Даламбер и Карно, не признавали отрицательных чисел, считали их «ложными», недействительными. Они считали, что в математику не следует вводить отрицательных чисел, так как последние суть нечто иное, как вычитаемые положительные числа, а следовательно, и все действия должны сводиться исключительно к действиям с положительными числами.

Только в XIX в. отрицательные числа получили окончательное признание.

§ 3. Алгебраические выражения

Употребление букв. В алгебре для обозначения чисел, кроме цифр, пользуются буквами, чаще всего латинского алфавита.

Буквы употребляют:

1) для обозначения неизвестных чисел, например в упражнении «Определить x, если $x + 0{,}9 = 2{,}7$»;

2) для обозначения произвольных чисел; например, когда хотят сказать, что переместительный закон сложения имеет место для любых

рациональных чисел, пишут: какие бы ни были рациональные числа a и b, $a + b = b + a$.

Обычно неизвестные числа обозначают последними буквами латинского алфавита (x, y, z), а известные — первыми (a, b, c, d и т. д.). Целые числа чаще всего обозначают буквами m, n, k, l и др. Однако этих соглашений не всегда придерживаются: могут быть неизвестными и числа, обозначенные буквами a, b, n, и известными считаться x, y, z и т. д.

Алгебраические выражения. Так как под буквами в алгебре подразумевают числа, то с ними оперируют, как с числами, обозначенными цифрами. Например, если требуется сложить a и b, пишут $a + b$. Эту запись и называют суммой чисел a и b.

Примечание. Перед множителями, выраженными буквами, знак умножения не ставят, а только подразумевают. Например, вместо $a \cdot b \cdot c$, $4 \cdot x$ пишут abc, $4x$. Однако перед множителями, обозначенными цифрами, знак умножения пишут обязательно. Например, вместо $9 \cdot 3$, $3 \cdot \frac{1}{2}$ писать 93, $3\frac{1}{2}$ нельзя.

Совокупность чисел, обозначенных буквами или цифрами и соединенных знаками действий, называют *алгебраическим выражением*.

Примеры алгебраических выражений:

$$\frac{a+3}{b+4};\quad 3m^2n;\quad 9(p^2+q^2);\quad a;\quad (13+18)7;\quad 3{,}7.$$

Алгебраическое выражение может состоять из одной буквы, может совсем не содержать чисел, обозначенных буквами. В последнем случае (см. два последних примера) их называют также *арифметическими выражениями*.

Числовое значение алгебраического выражения. *Числовым значением* алгебраического выражения при данном значении входящих в него букв* называется число, полученное в результате подстановки вместо букв соответствующих чисел и выполнения указанных действий.

Пример. Определить числовое значение выражения $3a + 5$ при $a = 5{,}7$.

Если $a = 5{,}7$, то $3a + 5 = 3 \cdot 5{,}7 + 5 = 22{,}1$.

Ответ. При $a = 5{,}7$ числовое значение данного выражения равно 22,1.

Можно записать и так: $3a + 5|_{a=5,7} = 3 \cdot 5{,}7 + 5 = 22{,}1$.

Пример. Определить числовое значение выражения $\frac{a}{2n+5a}$ при $a = 1$ и $n = -2{,}5$.

$$\left.\frac{a}{2n+5a}\right|_{\substack{a=1\\n=-2,5}} = \frac{1}{2\cdot(-2{,}5)+5\cdot 1} = \frac{1}{0}.$$

Однако на 0 делить нельзя, следовательно, при данных значениях букв данное алгебраическое выражение не имеет числового значения. Говорят также, что при $a = 1$ и $n = -2{,}5$ это выражение лишено смысла или что эти значения *недопустимы* для данного выражения.

---

* В новых учебниках вместо «букв» пишут «переменные»: многочлен с одной переменной и т. п.

Числовые значения, которые могут принимать буквы в данном алгебраическом выражении, не лишая его смысла, называются *допустимыми значениями* для этих букв.

Одночлен и многочлен. *Алгебраические выражения, составленные из цифр и букв с помощью действий сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень с натуральным показателем, называются рациональными алгебраическими выражениями.*

Примеры. $a-b$; a^2b; $\frac{x}{y}$; $\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$; $a+\frac{2}{b}$.

Рациональное алгебраическое выражение называется *целым*, если оно не содержит деления на буквенное выражение.

Примеры. $3a^2+\frac{1}{2}b$; $x-y$; $\frac{5x-4y}{8}$; a^2b.

Из целых выражений наиболее простыми являются одночлены. Алгебраическое выражение, которое содержит только *действия умножения и возведения в степень, называется одночленом.*

Примеры. $7ab^2$; $-\frac{2}{5}b$; $\frac{4}{5}x^2y^2$; $-0{,}2^3$; c.

Эти одночлены записаны в простейшем (каноническом) виде.

Алгебраическая сумма нескольких одночленов *называется многочленом*, или *полиномом*.

Примеры. $2a+7b-c$; $a^3-b^3-\frac{2}{3}c^2$; x^2+x-5.

Каждый одночлен, входящий в состав многочлена, называется его *членом*. Многочлен, состоящий из двух членов, называется также *двучленом*, или *биномом* (например, $2a-b$); многочлен, состоящий из трех членов, называется *трехчленом* (например, $3a-2b+8$) и т. д.

Одночлен принято также считать многочленом.

Расположенные многочлены. Пусть дан многочлен, содержащий только одну букву в различных степенях. Пользуясь переместительным законом сложения, мы можем переставить его члены так, чтобы они были расположены или по возрастающим, или по убывающим степеням этой буквы.

Пример. Многочлен $-15x^2+7x^4-8x+3-5x^3$ расположить: а) по возрастающим степеням x; б) по убывающим степеням x.

Решение. а) $3-8x-15x^2-5x^3+7x^4$ (по возрастающим степеням); б) $7x^4-5x^3-15x^2-8x+3$ (по убывающим степеням).

Если многочлен содержит две или несколько букв, то выбирают одну из них, которую называют главной, и располагают многочлен по степеням этой главной буквы. Например, выражение $8x^3-2ax^2+a^4x-5a^2$ является многочленом, расположенным по убывающим степеням буквы x. Первый член расположенного многочлена, содержащий главную букву в наивысшей степени, называется старшим, а последний — низшим членом этого многочлена. Степень старшего члена называется *степенью* и самого многочлена. Так, в нашем случае $8x^3$ — старший член, $-5a^2$ — низший член, 3 — будет степенью старшего члена и степенью самого многочлена.

Коэффициент. *Числовой множитель*, стоящий впереди буквенных множителей, называется *коэффициентом*.

Если выражение содержит только буквенные множители, то его коэффициент равен единице, например, вместо $1c$ пишут просто c, вместо $1\,ab$ пишут ab. Коэффициент может быть целым числом, например

в выражении $5cd$, а также дробным, например в выражении $\frac{5}{6}ab$. Если коэффициент — натуральное число, то он показывает, сколько раз стоящее за ним выражение берется слагаемым, например $5cd = cd + cd + cd + cd + cd$. Если же коэффициент — дробное положительное число, то он показывает, какую дробь надо взять от значения стоящего за ним выражения. Например, в выражении $\frac{5}{6}ab$ коэффициент означает, что при любых значениях a и b надо взять $\frac{5}{6}$ от их произведения.

С помощью коэффициентов можно короче записать многие выражения, содержащие одинаковые буквы, соединенные знаками $+$ и $-$, например:

$$c + c + c + c + c = 5c;$$
$$x + x - y - y - y = 2x - 3y;$$
$$\frac{z}{3} + \frac{z}{3} + \frac{z}{3} + \frac{z}{3} = \frac{4z}{3}.$$

Примечание. В дальнейшем понятие коэффициента обобщается, даже буквенные множители можно рассматривать как коэффициенты. Например, в выражении $2abx$ коэффициентом при x есть $2ab$.

Порядок действий. В алгебре сохраняются правила о порядке выполнения действий, которые приняты в арифметике (если не учитывать одного исключения, рассмотренного на стр. 16). В выражениях без скобок, содержащих действия разных ступеней, сначала надо выполнять возведение в степень, затем умножение, деление и, наконец, сложение и вычитание. Если в выражении есть скобки, то действия над числами, заключенными в скобки, выполняются первыми.

Пример. Найти числовое значение выражения $a + \frac{b(b-2a)}{a} : ab^2$ при $a = -1$, $b = 0{,}5$.

Если $a = -1$, $b = 0{,}5$, то

$$a + \frac{b(b-2a)}{a} : ab^2 = -1 + \frac{0{,}5[0{,}5 - 2 \cdot (-1)]}{-1} : (-1) \cdot 0{,}5^2 =$$
$$= -1 + \frac{0{,}5 \cdot (0{,}5 + 2)}{-1} : (-1) \cdot 0{,}25 = -1 + \frac{0{,}5 \cdot 2{,}5}{-1} : (-0{,}25) =$$
$$= -1 - 1{,}25 : (-0{,}25) = -1 + 5 = 4.$$

§ 4. Тождественные преобразования целых выражений

Тождественные выражения и преобразования. Два выражения называются *тождественными*, если они имеют одинаковые числовые значения при всех допустимых значениях входящих в них букв.

Пример. Выражение $3(a - 2) + 6$ и $3a$ тождественны: при $a = 1$ и $3(a - 2) + 6 = 3$, и $3a = 3$; при $a = 2$ и $3(a - 2) + 6 = 6$, и $3a = 6$ и т. д.

Два тождественных выражения, соединенные знаком равенства, составляют *тождество*. Можно сказать и так: равенство, верное при

всех допустимых значениях входящих в него букв, называется *тождеством*.

Примеры. $3(a-2)+6=3a$;

$$x+2x+5x=8x \text{ — тождества.}$$

Тождествами являются также все равенства, выражающие законы сложения и умножения:

$$a+b=b+a,$$
$$a+b+c=a+(b+c),$$
$$ab=ba,$$
$$abc=a(bc),$$
$$(a+b)c=ac+bc.$$

Замена одного выражения другим, тождественным ему, называется *тождественным преобразованием* этого выражения.

Дальше будут приведены примеры простейших тождественных преобразований целых алгебраических выражений.

Приведение подобных членов. Два одночлена *равны*, если у них равны коэффициенты и они составлены из одинаковых букв с соответственно равными показателями. Одночлены называются *подобными*, если они равны или отличаются только коэффициентами.

Примеры. Одночлены $2a^2b^3$ и $\frac{6}{3}a^2b^3$ равны; одночлены $2a^3$, $-3a^3$ и $\frac{1}{2}a^3$ подобны.

Замена алгебраической суммы подобных членов одним членом, тождественным этой сумме, называется *приведением подобных членов. Чтобы привести подобные члены, надо сложить их коэффициенты и полученную сумму записать коэффициентом того же буквенного выражения.*

Примеры. $3a^2b-a^2b+7{,}4a^2b=(3-1+7{,}4)a^2b=9{,}4a^2b$; $14m^2n-27m^3n^2+0{,}7m^2n+2m^3n^2-0{,}5m^3n^2-6m^2n=8{,}7m^2n-25{,}5m^3n^2$.

Раскрытие скобок и заключение в скобки. Раскрыть в алгебраическом выражении скобки—значит заменить его тождественным ему выражением, не содержащим скобок. Правила раскрытия скобок следуют из свойств сложения и вычитания:

$$a+(b+c)=a+b+c,$$
$$a-(b-c)=a-b+c.$$

Формулируют эти правила так:

а) *чтобы раскрыть скобки, перед которыми стоит знак плюс, надо записать без скобок все члены, стоящие в скобках, с их знаками;*

б) *чтобы раскрыть скобки, перед которыми стоит знак минус, надо записать без скобок все члены, стоящие в скобках, с противоположными знаками.*

Пример. $9a^2+[7a^2-2a-(a^2-3a)]=9a^2+(7a^2-2a-a^2+3a)=9a^2+7a^2-2a-a^2+3a=15a^2+a$.

При заключении в скобки пользуются такими правилами:

а) *чтобы заключить в скобки многочлен со знаком плюс перед скобками, надо записать в скобках все члены многочлена с их знаками;*

б) *чтобы заключить в скобки многочлен со знаком минус перед скобками, надо записать в скобках все члены многочлена с противоположными знаками.*

Пример 1. В выражении $2x^3+5x^2y-4xy^2-y^3$ заключить в скобки крайние члены со знаком плюс перед скобками, а средние члены — со знаком минус.

$$2x^3+5x^2y-4xy^2-y^3=(2x^3-y^3)-(4xy^2-5x^2y).$$

Пример 2. В выражении $x^2-y^2-(y-x)$ изменить перед скобками знак на противоположный.

$$x^2-y^2-(y-x)=x^2-y^2+(x-y).$$

§ 5. Действия над целыми алгебраическими выражениями

Сложение одночленов и многочленов. *Чтобы сложить одночлены, достаточно записать их один за другим с их знаками и привести подобные члены, если они есть.*

Пример. $(-0{,}2xy)+(3{,}7x^2)+(-3{,}5xy)+(-6{,}8x^2)=$
$=-0{,}2xy+3{,}7x^2-3{,}5xy-6{,}8x^2=-3{,}7xy-3{,}1x^2.$

Чтобы сложить многочлены, надо записать последовательно все их члены с их знаками и привести подобные члены, если они есть.

Пример. $(12a+7b-c)+(c-7b+8a)=12a+7b-c+$
$+c-7b+8a=20a.$

Сложение расположенных многочленов выполняют так: подписывают многочлены так, чтобы подобные члены находились один под другим; после этого сразу приводят подобные члены и записывают окончательный результат.

Пример. Сложить многочлены:

$$3x^4+7x^3y-x^2y^2-5xy^3;$$
$$-7x^4-5x^3y+8x^2y^2+10xy^3;\quad 4x^4+10x^3y-2x^2y^2-7xy^3.$$

$$\begin{array}{r} 3x^4+7x^3y-x^2y^2-5xy^3 \\ +\ -7x^4-5x^3y+8x^2y^2+10xy^3 \\ 4x^4+10x^3y-2x^2y^2-7xy^3 \\ \hline 12x^3y+5x^2y^2-2xy^3. \end{array}$$

Вычитание одночленов и многочленов. *Чтобы вычесть одночлен, достаточно прибавить его к уменьшаемому с противоположным знаком и привести подобные члены, если они есть.*

Примеры. $10a^3-(+7a^3)=10a^3-7a^3=3a^3;$
$-0{,}2m^2n-(+7{,}3mn)=-0{,}2m^2n-7{,}3mn.$

Чтобы вычесть многочлен, надо записать после уменьшаемого все его члены с противоположными знаками и привести подобные члены, если они есть.

Пример. $(5x^2-3xy+y^2)-(6x^2-8xy+y^3)=5x^2-3xy+$
$+y^2-6x^2+8xy-y^3=-x^2+5xy+y^2-y^3.$

Вычитание расположенных многочленов можно выполнять так: у вычитаемого многочлена заменить знаки всех членов на противоположные, подписать его под уменьшаемым так же, как и при сложении, и привести подобные члены.

Пример. Выполнить вычитание в столбик: $(8x^4 - 3x^3 + 7x^2 + x - 18) - (5x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 4x - 7)$.

Решение.

$$\begin{array}{r} 8x^4 - 3x^3 + 7x^2 + x - 18 \\ + \quad -5x^4 + 6x^3 - 3x^2 - 4x + 7 \\ \hline 3x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 3x - 11. \end{array}$$

Умножение одночленов и многочленов. *Чтобы перемножить одночлены, надо перемножить их коэффициенты и к произведению приписать множителем каждую букву из перемножаемых одночленов с показателем, равным сумме показателей этой буквы в сомножителях.* Если буква входит только в один из сомножителей, то ее записывают в произведение с тем же показателем.

Примеры. $\left(-\frac{2}{7}x^3y^2z\right) \cdot 21xy = -6x^4y^3z;$

$$(-8x^{n+1}) \cdot (-0{,}5x^3y) = 4x^{n+4}y.$$

Чтобы умножить многочлен на одночлен, надо умножить на этот одночлен каждый член многочлена и полученные произведения сложить.

Примеры. $(5m^2 - 10mn - 4n^2) \cdot \left(-\frac{1}{2}mn\right) = -2\frac{1}{2}m^3n + 5m^2n^2 + 2mn^3;$

$$1\frac{1}{3}ab \cdot \left(\frac{3}{4}a^2b - \frac{3}{2}ab^2 - \frac{5}{6}b^3\right) = a^3b^2 - 2a^2b^3 - 1\frac{1}{9}ab^4.$$

Чтобы умножить многочлен на многочлен, надо каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого и полученные произведения сложить.

Примеры. $(4z^2 - 1) \cdot (z^2 + 5) = 4z^4 + 20z^2 - z^2 - 5 = 4z^4 + 19z^2 - 5;$

$$(x^2 + 3x + 2) \cdot (x - 5) = x^3 - 5x^2 + 3x^2 - 15x + 2x - 10 = x^3 - 2x^2 - 13x - 10.$$

Умножение расположенных многочленов покажем на следующем примере:

$$\begin{array}{r} \times \quad 3x^3 - 2ax + 5a^2 \\ \quad -x^2 + 3ax + 4a^2 \\ \hline -3x^4 + 2ax^3 - 5a^2x^2 \\ + \quad 9ax^3 - 6a^2x^2 + 15a^3x \\ \quad 12a^2x^2 - 8a^3x + 20a^4 \\ \hline -3x^4 + 11ax^3 + a^2x^2 + 7a^3x + 20a^4. \end{array}$$

При умножении многочленов их располагают по убывающим степеням одной из букв. Умножение выполняют в следующем порядке. Все члены множимого умножают на первый член множителя и результат записывают в строку под чертой. Затем все члены множимого умножают на второй член множителя и результат записывают во второй строке так, чтобы подобные члены оказались друг под другом. Так же

записывают произведения всех членов множимого на третий член множителя и так далее до конца. Подобные члены приводят и окончательный результат записывают внизу под чертой.

Возведение в степень одночленов. *Чтобы возвести одну степень в другую, надо основание возвести в степень, равную произведению показателей степеней.*

Примеры. $(a^3)^2 = a^6$; $(x^2)^4 = x^8$; $(a^m)^n = a^{mn}$.

Чтобы возвести в степень одночлен, надо возвести в эту степень каждый сомножитель и полученные результаты перемножить.

Примеры. $(2x^2y^3z)^4 = 16x^8y^{12}z^4$; $[-(-a)^2]^3 = [-a^2]^3 = -a^6$.

Деление одночленов. *При делении степеней одного и того же основания из показателя делимого вычитается показатель делителя, а основание остается прежним.*

Примеры. $x^6 : x^2 = x^4$; $a^m : a^n = a^{m-n}$ (при $m > n$).

Примечание. Если m равно n, то в этом случае делитель и делимое равны, значит, частное равно единице: $a^m : a^m = 1$.

Чтобы разделить одночлен на одночлен, надо разделить коэффициент делимого на коэффициент делителя и к полученному частному приписать множителями каждую букву делимого с показателем, равным разности показателей этой буквы в делимом и делителе.

Примеры. $(-15ax^2) : 7{,}5x = -2ax$; $30m^4x^5 : (-18m^4x^2) = -1\frac{2}{3}x^3$.

Деление одночленов нацело невыполнимо, если показатель какой-либо буквы в делителе больше показателя той же буквы в делимом или если делитель содержит букву, которой нет в делимом.

Деление многочлена на одночлен. *Чтобы разделить многочлен на одночлен, надо разделить на этот одночлен каждый член многочлена и полученные частные сложить.*

Примеры. $\left(\frac{3}{4}a^6x^3 + 1\frac{1}{5}a^3x^4 - \frac{9}{10}ax^5\right) : \frac{3}{5}ax^3 = 1\frac{1}{4}a^5 + 2a^2x - 1\frac{1}{2}x^2$;

$$[5(a+b)^4 - 10(a+b)^3 - 15(a+b)^2] : 5(a+b)^2 = (a+b)^2 - 2(a+b) - 3.$$

Деление многочлена на многочлен. Рассмотрим деление многочленов на примере, когда оба многочлена зависят от одной буквы.

Пусть надо разделить многочлен $6x^4 - 11x^3 + 5x^3 + 9x - 5$ на многочлен $3x^2 + 4x - 5$. Для этого располагают многочлены по убывающим степеням буквы x. Затем выполняют деление в следующем порядке:

а) делят первый член делимого на первый член делителя и получают первый член частного;

б) умножают делитель на первый член частного и произведение вычитают из делимого. Получают первый остаток;

в) делят первый (старший) член остатка на первый член делителя, получают второй член частного и так делят до тех пор, пока деление не окончится или пока не получится остаток, старший член которого не делится на старший член делителя.

Записывают это так:

$$\begin{array}{r|l} 6x^4+5x^3-11x^2+9x-5 & 3x^2+4x-5 \\ \underline{-\,6x^4+8x^3-10x^2} & \underline{} \\ -3x^3-x^2+9x & 2x^2-x+1 \\ \underline{-\,-3x^3-4x^2+5x} & \\ 3x^2+4x-5 & \\ \underline{-\,3x^2+4x-5} & \\ 0 & \end{array}$$

Если многочлены зависят от двух или нескольких букв, выбирают какую-нибудь букву главной и располагают многочлены по убывающим степеням этой буквы. Тогда остальные буквы рассматривают как коэффициенты, и деление таких многочленов выполняют так же, как и в первом случае.

Пример.
$$\begin{array}{r|l} a^6+2a^3x+x^2 & a^3+x \\ \underline{-\,a^6+a^3x} & \underline{} \\ a^3x+x^2 & a^3+x \\ \underline{-\,a^3x+x^2} & \\ 0 & \end{array}$$

Деление многочленов не всегда выполняется нацело. В большинстве случаев при делении многочлена на многочлен получается *остаток*.

Пример.
$$\begin{array}{r|l} a^6-2a^5-a^4+2a^3-a+1 & a^3-2a^2+3a-1 \\ \underline{-\,a^6-2a^5+3a^4-a^3} & \underline{} \\ -4a^4+3a^3-a & a^3-4a-5 \\ \underline{-\,-4a^4+8a^3-12a^2+4a} & \\ -5a^3+12a^2-5a+1 & \\ \underline{-\,-5a^3+10a^2-15a+5} & \\ 2a^2+10a-4 & \end{array}$$

Здесь многочлен $2a^2+10a-4$ уже не делится на a^3-2a^2+3a-1, следовательно, в результате деления получено частное a^3-4a-5 и остаток $2a^2+10a-4$.

Между делимым A, делителем B, частным Q и остатком R существует следующая зависимость:

$$A=BQ+R.$$

В рассмотренном примере имеем

$$a^6-2a^5-a^4+2a^3-a+1=(a^3-2a^2+3a-1)(a^3-4a-5)+2a^2+10a-4.$$

Примечание. В случае деления многочленов от нескольких букв частное и остаток определяются не однозначно в зависимости от выбора главной буквы. Например,

$$\begin{array}{r|l} a^2+ab+b^2 & a+b, \\ \underline{-\,a^2+ab} & \underline{} \\ b^2 & a \end{array}$$ но $$\begin{array}{r|l} b^2+ba+a^2 & b+a. \\ \underline{-\,b^2+ba} & \underline{} \\ a^2 & b \end{array}$$

Здесь делимое и делитель в обоих случаях одинаковы, но частные и остатки — разные.

§ 6. Формулы сокращенного умножения

Произведение суммы двух чисел на их разность. Произведение суммы двух чисел на их разность равно разности квадратов этих чисел:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Примеры.

$$(7x + 2y^3)(7x - 2y^3) = 49x^2 - 4y^6;$$

$$\left(\frac{2}{3}x + \frac{7}{8}y\right)\left(\frac{7}{8}y - \frac{2}{3}x\right) = \frac{49}{64}y^2 - \frac{4}{9}x^2.$$

Квадрат суммы. *Квадрат суммы двух чисел равен квадрату первого числа, плюс удвоенное произведение первого числа на второе, плюс квадрат второго числа:*

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Пример.

$$\left(\frac{2}{5}xy + 10x^2\right)^2 = \left(\frac{2}{5}xy\right)^2 + 2 \cdot \frac{2}{5}xy \cdot 10x^2 + (10x^2)^2 =$$

$$= \frac{4}{25}x^2y^2 + 8x^3y + 100x^4.$$

Геометрически формулу квадрата суммы двух чисел можно изобразить, как показано на рис. 6.

Квадрат суммы нескольких слагаемых можно определить по формуле

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 + 2a_1a_2 + \cdots + 2a_{n-1}a_n.$$

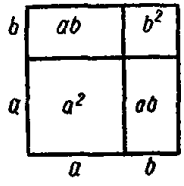


Рис. 6.

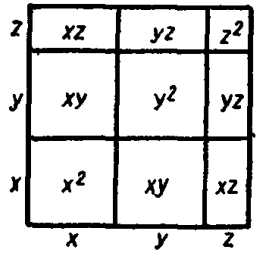


Рис. 7.

Квадрат многочлена равен сумме квадратов всех его членов, сложенной с суммой всевозможных удвоенных произведений его членов, взятых по два.

Пример. $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz$ (рис. 7).

Квадрат разности. *Квадрат разности двух чисел равен квадрату первого числа, минус удвоенное произведение первого числа на второе, плюс квадрат второго числа:*

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Примеры.

$$(x^3 - 3a)^2 = (x^3)^2 - 2(x^3)(3a) + (3a)^2 = x^6 - 6x^3a + 9a^2,$$

$$(1 - 0{,}5c)^2 = 1 - c + 0{,}25c^2.$$

Куб суммы и разности. *Куб суммы двух чисел равен кубу первого числа, плюс утроенное произведение квадрата первого на второе, плюс утроенное произведение первого на квадрат второго, плюс куб второго числа:*

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Куб разности двух чисел равен кубу первого числа, минус утроенное произведение квадрата первого на второе, плюс утроенное произведение первого на квадрат второго, минус куб второго числа:

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Примеры.

$(a^2 + 4b^3)^3 = (a^2)^3 + 3(a^2)^2 \cdot 4b^3 + 3a^2 \cdot (4b^3)^2 + (4b^3)^3 = a^6 + 12a^4b^3 + 48a^2b^6 + 64b^9$; $(2a - 5b)^3 = (2a)^3 - 3(2a)^2 \cdot 5b + 3 \cdot 2a(5b)^2 - (5b)^3 = 8a^3 - 60a^2b + 150ab^2 - 125b^3$.

Сумма и разность кубов. *Сумма кубов двух чисел равна произведению суммы этих чисел на неполный квадрат их разности:*

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Примечание. *Неполным квадратом разности чисел* a и b называют выражение $a^2 - ab + b^2$. От полного квадрата разности $a^2 - 2ab + b^2$ оно отличается только средним коэффициентом. Выражение $a^2 + ab + b^2$ называют *неполным квадратом суммы.*

Если приведенную выше формулу прочесть справа налево, получим: *произведение суммы двух чисел на неполный квадрат их разности равно сумме кубов этих чисел.*

Разность кубов двух чисел равна произведению разности этих чисел на неполный квадрат их суммы:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Эта формула читается и справа налево: *произведение разности двух чисел на неполный квадрат их суммы равно разности кубов этих чисел.*

Примеры.

$$\frac{27}{512}x^3 + \frac{8}{729}y^9 = \left(\frac{3}{8}x\right)^3 + \left(\frac{2}{9}y^3\right)^3 = \left(\frac{3}{8}x + \frac{2}{9}y^3\right) \times \left(\frac{9}{64}x^2 - \frac{1}{12}xy^3 + \frac{4}{81}y^6\right);$$

$$(0{,}8a^2 - 5b)(0{,}64a^4 + 4a^2b + 25b^2) = (0{,}8a^2)^3 - (5b)^3 = 0{,}512a^6 - 125b^3.$$

Примечание. Все приведенные выше формулы сокращенного умножения для двух чисел — это частные случаи (при $n = 2$ и 3, $x = b$ и $-b$) двух более общих формул (см. стр. 199).

Применение формул сокращенного умножения. При помощи формул сокращенного умножения можно сравнительно быстро выполнять тождественные преобразования многих алгебраических выражений.

Пример. Упростить $(x - 1)(x + 1)(x^4 + x^2 + 1) - (x^2 + 1)^3$.

Решение (по частям).

$$(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1;$$
$$(x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1) = x^6 - 1;$$
$$(x^2 + 1)^3 = x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1;$$
$$x^6 - 1 - (x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1) = -3x^4 - 3x^2 - 2.$$

Однако удобней преобразования выполнять цепочкой:

$$(x-1)(x+1)(x^4+x^2+1)-(x^2+1)^3=(x^2-1)(x^4+x^2+1)-$$
$$-(x^2+1)^3=(x^6-1)-(x^6+3x^4+3x^2+1)=-3x^4-3x^2-2.$$

Можно использовать формулы сокращенного умножения и при делении многочленов.

Примеры. $(49x^4-64y^2):(7x^2-8y)=[(7x^2)^2-(8y)^2]:(7x^2-8y)=7x^2+8y;$

$$(16a^2-25b^6):(5b^3+4a)=[(4a)^2-(5b^3)^2]:(5b^3+4a)=4a-5b^3;$$
$$(a^3-8b^3):(a-2b)=[a^3-(2b)^3]:(a-2b)=a^2+2ab+4b^2;$$
$$(27x^3+8y^9):(3x+2y^3)=[(3x)^3+(2y^3)^3]:(3x+2y^3)=$$
$$=9x^2-6xy^3+4y^6.$$

Формулы сокращенного умножения используют также при устных вычислениях. Пусть, например, надо вычислить $50{,}5^2-49{,}5^2$. В данном случае возводить в квадраты было бы нерационально, лучше воспользоваться формулой разности квадратов:

$$50{,}5^2-49{,}5^2=(50{,}5+49{,}5)\cdot(50{,}5-49{,}5)=100\cdot 1=100.$$

Еще пример: $31\cdot 29=(30+1)\cdot(30-1)=900-1=899$. Такие вычисления можно выполнять устно.

§ 7. Разложение многочленов на множители

Разложить многочлен на множители — значит представить его в инде произведения многочленов, тождественного данному многочлену.

Ниже укажем простейшие способы разложения многочленов на множители.

Вынесение за скобки общего множителя. Чтобы разложить многочлен на множители вынесением общего множителя за скобки, надо: а) определить этот общий множитель; б) разделить на него все члены многочлена; в) записать произведение общего множителя на полученное частное, взяв это частное в скобки.

Примеры.

$$2ax^3-4a^2x^2=2ax^2(x-2a);$$
$$40m^2n-25mn^2+30mn=5mn(8m-5n+6);$$
$$x(p-a)-y(p-a)-z(p-a)=(p-a)(x-y-z);$$
$$a^2(x-1)-b(1-x)=a^2(x-1)+b(x-1)=(x-1)(a^2+b).$$

Способ группировки. Этот способ изложим на примере.

Пример. Разложить на множители $3a-3b+ax-bx$. Общего множителя все члены данного многочлена не имеют, но если сгруппируем члены по два в том порядке, как они написаны, то выражение примет вид

$$(3a-3b)+(ax-bx).$$

Если вынесем в первой группе общий множитель 3, а во второй общий множитель x, получим

$$3(a-b)+x(a-b).$$

В этом выражении общим множителем является $a - b$. Следовательно

$$3a - 3b + ax - bx = (a - b)(3 + x).$$

Примечание. Данный пример можно решить также другим способом: $3a - 3b + ax - bx = (3a + ax) - (3b + bx) = a(3 + x) - b(3 + x) = (3 + x)(a - b)$.

В некоторых случаях, прежде чем группировать члены, нужно отдельные члены многочлена представить в виде суммы или разности.

Примеры. $x^2 + 8x + 12 = x^2 + 6x + 2x + 12 = x(x + 6) + 2(x + 6) = (x + 6)(x + 2)$.

$$x^2 - 2x - 8 = x^2 - 4x + 2x - 8 = x(x - 4) + 2(x - 4) = (x - 4)(x + 2).$$

$$6x^2 - x - 1 = 6x^2 - 3x + 2x - 1 = 3x(2x - 1) + (2x - 1) = (2x - 1)(3x + 1).$$

Разложение на множители по формулам сокращенного умножения. Способ разложения на множители заключается в использовании формул сокращенного умножения, которые надо читать не только слева направо, но и справа налево, т. е. надо пользоваться следующими формулами:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b);$$
$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2;$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2;$$
$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3;$$
$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3;$$
$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2);$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Примеры.

$$(x + y)^2 - (x - y)^2 = (x + y + x - y)(x + y - x + y) = 2x \cdot 2y = 4xy;$$

$$-6a - a^2 - 9 = -(a^2 + 6a + 9) = -(a + 3)^2;$$

$$m^2 + n^2 - 2mn = (m - n)^2;$$

$$125m^3 - 75m^2n + 15mn^2 - n^3 = (5m - n)^3;$$

$$x^3 + 8y^3 = (x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2);$$

$$125a^3 - \frac{1}{64}b^6 = \left(5a - \frac{1}{4}b^2\right)\left(25a^2 + 1\frac{1}{4}ab^2 + \frac{1}{16}b^4\right).$$

Применение различных способов разложения на множители. При разложении многочленов на множители часто используются несколько приемов.

В каждом отдельном случае надо предварительно изучить состав данного многочлена и затем определить, какие приемы разложения на множители здесь следует использовать. В большинстве случаев приходится применять все указанные выше приемы разложения на множители в различной последовательности. Иногда при этом используют искусственные приемы.

Примеры.

а) $mp - np + m^2 - 2mn + n^2 = (mp - np) + (m^2 - 2mn + n^2) = p(m - n) + (m - n)^2 = (m - n)(p + m - n)$;

б) $1 - p^2 - 2pq - q^2 = 1 - (p^2 - 2pq - q^2) = 1 - (p + q)^2 = (1 + p + q)(1 - p - q)$;

в) $x^3+5x^2+3x-9=(x^3-1)+(5x^2-5)+(3x-3)=$
$=(x-1)(x^2+x+1)+5(x^2-1)+3(x-1)=(x-1)(x^2+x+$
$+1)+5(x-1)(x+1)+3(x-1)=(x-1)[x^2+x+1+5(x+$
$+1)+3]=(x-1)(x^2+x+1+5x+5+3)=(x-1)(x^2+6x+$
$+9)=(x-1)(x+3)^2$.

§ 8. Алгебраические дроби

Дробные выражения и алгебраические дроби. Алгебраическое выражение называется *дробным*, если среди указанных в нем действий есть деление на буквенное выражение.

Примеры дробных выражений:

$$\frac{3ax}{a+x},\quad 2a-\frac{1}{a^2},\quad \frac{a-\dfrac{1}{b}}{b-\dfrac{1}{a}},\quad \frac{1}{a+\dfrac{1}{b+c}}.$$

Простейшими среди дробных выражений считаются выражения вида $\frac{A}{B}$, где A и B — многочлены. Они называются *алгебраическими дробями*. Многочлены A и B называются соответственно *числителем* и *знаменателем* алгебраической дроби. Числитель и знаменатель называются также членами дроби.

Примеры алгебраических дробей:

$$\frac{3ax+c}{x-0{,}5c^2},\quad \frac{2a}{a-1},\quad \frac{a^2+b-a}{2},\quad \frac{0{,}7}{4x}.$$

Примечание. Напомним, что одночлен считается частным видом многочлена (стр. 81). В частности, число 1 также можно рассматривать как многочлен. Поэтому каждое целое алгебраическое выражение можно считать алгебраической дробью со знаменателем равным 1. Каждую обыкновенную дробь также можно рассматривать как алгебраическую дробь.

Основное свойство алгебраической дроби. Если числитель и знаменатель алгебраической дроби умножить на один и тот же многочлен, то получится алгебраическая дробь, тождественная данной. С помощью букв это свойство можно записать так:

$$\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}.$$

Здесь a и b — члены алгебраической дроби, а m — произвольный многочлен. В частности, m может быть и любым числом не равным 0.

Из этого свойства вытекают следующие положения.

Значение дроби не изменится, если у числителя и знаменателя одновременно изменить знаки на противоположные. Например:

$$\frac{-3x}{-4y}=\frac{-3x(-1)}{-4y(-1)}=\frac{3x}{4y};$$

$$\frac{8a}{-13b^2}=\frac{8a(-1)}{-13b^2(-1)}=\frac{-8a}{13b^2},$$

Значение дроби не изменится, если изменить знак у одного из членов дроби и перед самой дробью. Например:

$$-\frac{a-b}{-c}=+\frac{a-b}{-c(-1)}=\frac{a-b}{c};$$

$$\frac{a-1}{b-2}=-\frac{(a-1)(-1)}{b-2}=-\frac{1-a}{b-2}.$$

Сокращение дробей. *Сократить дробь* — значит разделить ее числитель и знаменатель на их общий делитель. Если числитель и знаменатель дроби одночлены, то общие делители находят устно и затем сокращают.

Пример. $\frac{24a^4b^2c}{40a^3b^2}=\frac{3ac}{5}$.

Если числитель и знаменатель дроби многочлены, то их надо предварительно разложить на множители (если это возможно) и после того произвести сокращение.

Примеры.

$$\frac{ac-bc+ad-bd}{ac+bc+ad+bd}=\frac{(ac-bc)+(ad-bd)}{(ac+bc)+(ad+bd)}=$$

$$=\frac{c(a-b)+d(a-b)}{c(a+b)+d(a+b)}=\frac{(a-b)(c+d)}{(a+b)(c+d)}=\frac{a-b}{a+b};$$

$$\frac{a^4+a^2b^2+b^4}{a^3+2a^2b+2ab^2+b^3}=\frac{(a^2+b^2)^2-a^2b^2}{(a^3+b^3)+2ab(a+b)}=$$

$$=\frac{(a^2+b^2-ab)(a^2+b^2+ab)}{(a+b)(a^2-ab+b^2+2ab)}=\frac{a^2-ab+b^2}{a+b};$$

$$\frac{x^4+x^2+1}{x^5+x+1}=\frac{x^4+2x^2+1-x^2}{x^5-x^2+x^2+x+1}=\frac{(x^2+1)^2-x^2}{x^2(x^3-1)+(x^2+x+1)}=$$

$$=\frac{(x^2+1-x)(x^2+1+x)}{(x^2+x+1)(x^3-x^2+1)}=\frac{x^2-x+1}{x^3-x^2+1}.$$

Приведение дробей к общему знаменателю. Приведение алгебраических дробей к общему знаменателю выполняется так же, как и в арифметике.

Простейшим общим знаменателем дробей с одночленными знаменателями есть наименьшее общее кратное коэффициентов знаменателей (если они — натуральные числа), умноженное на все различные буквы, входящие в знаменатели, причем каждую букву берут с наибольшим показателем, с каким она входит в знаменатели.

Так, например, простейший общий знаменатель дробей

$$\frac{5x}{ab},\ \frac{2y}{3a^2b}\ \text{и}\ -\frac{1}{2a^2b^2}$$

равен $6a^2b^2$.

Дополнительные множители следующие:

$$6a^2b^2 : ab = 6ab,$$
$$6a^2b^2 : 3a^2b = 2b,$$
$$6a^2b^2 : 2a^2b^2 = 3.$$

Поэтому имеем

$$\frac{5x}{ab}=\frac{5x\cdot 6ab}{ab\cdot 6ab}=\frac{30xab}{6a^2b^2};\quad \frac{2y}{3a^2b}=\frac{2y\cdot 2b}{3a^2b\cdot 2b}=\frac{4yb}{6a^2b^2};$$
$$-\frac{1}{2a^2b^2}=-\frac{1\cdot 3}{2a^2b^2\cdot 3}=-\frac{3}{6a^2b^2}.$$

Для вычисления простейшего общего знаменателя дробей с многочленными знаменателями сначала надо их разложить на множители.

Пример. Привести к общему знаменателю алгебраические дроби $\frac{m+n}{2m-2n}$ и $\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$.

$$2m-2n=2(m-n),\quad m^2-n^2=(m-n)(m+n).$$

Следовательно,

$$\frac{m+n}{2m-2n}=\frac{(m+n)(m+n)}{(2m-2n)(m+n)}=\frac{m^2+2mn+n^2}{2m^2-2n^2};$$
$$\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}=\frac{(m^2+n^2)\cdot 2}{(m^2-n^2)\cdot 2}=\frac{2m^2+2n^2}{2m^2-2n^2}.$$

Ответ. $\frac{m^2+2mn+n^2}{2m^2-2n^2}$, $\frac{2m^2+2n^2}{2m^2-2n^2}$.

Примечание. Если не требуется, чтобы общий знаменатель был *простейшим*, можно, не тратя времени на разложение многочленов, просто взять за общий знаменатель произведение знаменателей данных дробей.

§ 9. Действия с алгебраическими дробями

Сложение и вычитание. *Чтобы сложить (вычесть) алгебраические дроби с одинаковыми знаменателями, надо сложить (вычесть) их числители и результат разделить на их общий знаменатель.*

Пример. Сложить $\frac{a}{2x^2}$, $\frac{1}{2x^2}$ и $\frac{a-5}{2x^2}$.

$$\frac{a}{2x^2}+\frac{1}{2x^2}+\frac{a-5}{2x^2}=\frac{a+1+a-5}{2x^2}=\frac{2a-4}{2x^2}=\frac{a-2}{x^2}.$$

Чтобы сложить (вычесть) дроби с разными знаменателями, надо привести их к общему знаменателю, сложить (вычесть) числители и результат разделить на их общий знаменатель.

Пример. Упростить выражение

$$\frac{a-1}{a^2+2a+1}-\frac{a+1}{a^2-2a+1}-\frac{1}{a^2-1}.$$

Разложим знаменатели на множители

$$a^2+2a+1=(a+1)^2,\quad a^2-2a+1=(a-1)^2,\quad a^2-1=$$
$$=(a-1)(a+1).$$

Общий знаменатель равен $(a+1)^2(a-1)^2$. Следовательно,

$$\frac{a-1}{a^2+2a+1}-\frac{a+1}{a^2-2a+1}-\frac{1}{a^2-1}=\frac{(a-1)(a-1)^2}{(a+1)^2(a-1)^2}-$$
$$-\frac{(a+1)(a+1)^2}{(a+1)^2(a-1)^2}-\frac{(a+1)(a-1)}{(a+1)^2(a-1)^2}=$$
$$=\frac{(a-1)^3-(a+1)^3-(a^2-1)}{(a^2-1)^2}=$$
$$=\frac{(a^3-3a^2+3a-1)-(a^3+3a^2+3a+1)-(a^2-1)}{(a^2-1)^2}=$$
$$=\frac{a^3-3a^2+3a-1-a^3-3a^2-3a-1-a^2+1}{(a^2-1)^2}=\frac{-7a^2-1}{(a^2-1)^2}.$$

Так как каждое целое алгебраическое выражение можно рассматривать как алгебраическую дробь со знаменателем 1, пользуясь изложенными выше правилами, можно складывать и вычитать также алгебраические дроби и целые выражения.

Пример.

$$a-b+\frac{b^2}{a+b}=\frac{a-b}{1}+\frac{b^2}{a+b}=\frac{a^2-b^2+b^2}{a+b}=\frac{a^2}{a+b}.$$

Умножение и деление дробей. *Чтобы перемножить дроби, надо перемножить отдельно их числители и знаменатели и первое произведение записать числителем, а второе знаменателем.*

Чтобы разделить дробь на дробь, надо делимое умножить на дробь, обратную делителю.

Примеры.

$$\frac{3p^2mq}{2a^2b^2}\cdot\frac{3abc}{8pq}=\frac{3p^2mq\cdot 3abc}{2a^2b^2\cdot 8pq}=\frac{9pmc}{16ab},$$
$$\frac{8b^2cd}{9a^5}:\frac{7cd}{12a^3}=\frac{8b^2cd}{9a^5}\cdot\frac{12a^3}{7cd}=\frac{8b^2cd\cdot 12a^3}{9a^5\cdot 7cd}=\frac{32b^2}{21a^2}.$$

При умножении и делении дробей с многочленными числителями и знаменателями их числители и знаменатели разлагают на множители и сокращают, если это возможно.

Примеры.

$$\frac{x^2-4y^2}{x^2-xy}\cdot\frac{x-y}{x^2+2xy}=\frac{(x-2y)(x+2y)}{x(x-y)}\cdot\frac{x-y}{x(x-2y)}=$$
$$=\frac{(x+2y)(x-2y)(x-y)}{x(x-y)x(x+2y)}=\frac{x-2y}{x^2};$$
$$\frac{a^2-a^2}{(a+b)^2}:\frac{4a-4b}{3a+3b}=\frac{(a-b)(a+b)}{(a+b)^2}:\frac{4(a-b)}{3(a+b)}=$$
$$=\frac{(a+b)(a-b)\cdot 3(a+b)}{(a+b)^2\cdot 4(a-b)}=\frac{3}{4}.$$

Пользуясь правилом умножения алгебраических дробей, можно также умножать алгебраическую дробь на целое выражение, и наоборот (целое выражение можно рассматривать как алгебраическую дробь со знаменателем 1).

Примеры.

$$\frac{a}{x-c}\cdot 2x=\frac{a}{x-c}\cdot\frac{2x}{1}=\frac{a\cdot 2x}{(x-c)\cdot 1}=\frac{2ax}{x-c};$$

$$\frac{1}{x^2-1}\cdot(x^4-1)=\frac{1}{x^2-1}\cdot\frac{x^4-1}{1}=\frac{x^4-1}{x^2-1}=x^2+1.$$

Возведение в степень. *Чтобы возвести алгебраическую дробь в какую-нибудь степень, надо возвести в эту степень отдельно числитель и знаменатель и первый результат разделить на второй.*

Примеры. $\left(\frac{a}{3x^2}\right)^4=\frac{a^4}{(3x^2)^4}=\frac{a^4}{81x^8}$, $\left(\frac{a-1}{a+c}\right)^3=\frac{(a-1)^3}{(a+c)^3}$.

Упражнения на все действия. Если надо выполнить несколько действий над данными алгебраическими дробями или упростить громоздкое выражение с алгебраическими дробями, можно выполнять преобразования двумя способами: *по частям* и *цепочкой.*

Пример. Упростить выражение

$$\left(\frac{a^2+ab}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}+\frac{b}{a^2+b^2}\right):\left(\frac{1}{a-b}-\frac{2ab}{a^3-a^2b+ab^2-b^3}\right).$$

Решение первым способом:

1) $a^2+ab=a(a+b)$;

2) $a^3+a^2b+ab^2+b^3=a^2(a+b)+b^2(a+b)=(a+b)(a^2+b^2)$;

3) $\frac{a(a+b)}{(a+b)(a^2+b^2)}=\frac{a}{a^2+b^2}$;

4) $\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{b}{a^2+b^2}=\frac{a+b}{a^2+b^2}$;

5) $a^3-a^2b+ab^2-b^3=a^2(a-b)+b^2(a-b)=(a-b)(a^2+b^2)$;

6) $\frac{1}{a-b}-\frac{2ab}{(a-b)(a^2+b^2)}=\frac{a^2+b^2-2ab}{(a-b)(a^2+b^2)}=\frac{a-b}{a^2+b^2}$;

7) $\frac{a+b}{a^2+b^2}:\frac{a-b}{a^2+b^2}=\frac{a+b}{a-b}$.

Решение вторым способом:

$$\left(\frac{a^2+ab}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}+\frac{b}{a^2+b^2}\right):\left(\frac{1}{a-b}-\frac{2ab}{a^3-a^2b+ab^2-b^3}\right)=$$

$$=\left[\frac{a(a+b)}{a^2(a+b)+b^2(a+b)}+\frac{b}{a^2+b^2}\right]:\left[\frac{1}{a-b}-\right.$$

$$\left.-\frac{2ab}{a^2(a-b)+b^2(a-b)}\right]=\left(\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{b}{a^2+b^2}\right):\left(\frac{1}{a-b}-\right.$$

$$\left.-\frac{2ab}{(a-b)(a^2+b^2)}\right)=\frac{a+b}{a^2+b^2}:\frac{a^2+b^2-2ab}{(a-b)(a^2+b^2)}=$$

$$=\frac{(a+b)\cdot(a-b)(a^2+b^2)}{(a^2+b^2)\cdot(a-b)^2}=\frac{a+b}{a-b}.$$

Иррациональные числа и алгебраические выражения

§ 10. Квадратные корни

Квадратным корнем из числа a называется число, квадрат которого равен a. Например, квадратный корень из 9 равен 3, так как $3^2 = 9$. Однако -3 также есть квадратный корень из 9, так как $(-3)^2 = 9$. Квадратный корень из 9 имеет два значения: 3 и -3.

Положительное значение квадратного корня называется также *арифметическим значением*. Арифметическое значение квадратного корня из числа a обозначают символом $\sqrt{a}$. Знак $\sqrt{\ }$ называют *знаком квадратного корня* или *радикалом*. Число или выражение a, которое стоит под радикалом, называется *подкоренным числом* или *выражением*.

Подкоренное число может быть не только целым, но и дробным.

Например, $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$, $\sqrt{6{,}25} = 2{,}5$.

Квадратный корень из 0 имеет только одно значение: 0.

Квадратного корня из отрицательного числа не существует: нет рационального числа, квадрат которого был бы отрицательным.

Извлечение квадратных корней. Вычисление квадратных корней называют также *извлечением* квадратных корней. Действие извлечения квадратного корня обратно действию возведения в квадрат: если из положительного числа a извлечь квадратный корень и результат возвести в квадрат, получим то же число a, т. е.

$$(\sqrt{a})^2 = a.$$

Из небольших чисел, являющихся *точными квадратами* натуральных чисел, например 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 и т. д., квадратные корни можно извлекать устно.

Чтобы извлечь квадратный корень из многоцифрового целого числа, разбивают его справа налево на *грани*, содержащие по две цифры (в крайней левой грани может оказаться и одна цифра). Записывают так:

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{27'98'41} = 529 & \\ \underline{-\ 25} & \\ 102 & 298 \\ \quad 2 & 204 \\ \hline 1049 & 9441 \\ \quad 9 & 9441 \\ \hline \quad 0 & \end{array}$$

Чтобы получить первую цифру корня (5), извлекают квадратный корень из наибольшего точного квадрата, содержащегося в первой слева грани (27). Потом вычитают из первой грани квадрат первой цифры корня (25) и к разности приписывают (сносят) следующую грань (98). Слева от полученного числа (298) пишут удвоенную первую цифру корня (10), делят на нее число всех десятков ранее полученного числа ($29 : 10 \approx 2$), испытывают частное ($102 \cdot 2 = 204$ должно быть не больше чем 298) и записывают его (2) после первой цифры корня и т. д.

Аналогично извлекают квадратные корни из десятичных дробей. Только подкоренное число надо разбивать на грани так, чтобы запятая была между гранями.

Пример.

$$\sqrt{0,'00'95'64'84'} = 0,0978$$

$$\begin{array}{r|l} -81 & \\ \hline 187 & 1464 \\ 7 & 1309 \\ \hline 1948 & 15584 \\ 8 & 15584 \\ \hline 0 & \end{array}$$

Примечание. Если десятичная дробь имеет нечетное число десятичных знаков, из нее точно квадратный корень не извлекается.

Приближенные значения квадратных корней. Если подкоренное число приближенное, то квадратный корень из него также будет приближенным числом. Квадратные корни из приближенных чисел можно извлекать точно так же, как из точных, но с учетом следующего правила подсчета цифр.

При извлечении квадратного корня из приближенных чисел в результате сохраняют столько значащих цифр, сколько их содержит подкоренное число. Чтобы правильно определить последнюю значащую цифру, ищут в результате на одну значащую цифру больше, чем в подкоренном числе, а затем результат округляют по правилу округления, отбрасывая эту запасную цифру.

Однако приближенные значения квадратных корней получают не только в результате извлечения квадратных корней из приближенных чисел, но также из точных. Пусть, например, требуется извлечь квадратный корень из точного числа 2. Имеем

$$\sqrt{2} = 1,414...$$

$$\begin{array}{r|l} -1 & \\ \hline 24 & 100 \\ 4 & 96 \\ \hline 281 & 400 \\ 1 & 281 \\ \hline 2824 & 11900 \\ 4 & 11296 \end{array}$$

Этот процесс можно продолжать без конца. Поэтому $\sqrt{2}$ в виде десятичной дроби можно дать только приближенно с любой точностью.

§ 11. Иррациональные числа

Понятие иррационального числа. Если продолжать извлекать квадратный корень из 2, получим *бесконечную непериодическую* десятичную дробь*.

$$\sqrt{2} = 1,4142...$$

* Можно доказать, что не существует рационального числа, квадрат которого равен 2. Из этого следует, что $\sqrt{2}$ не равен ни конечной десятичной дроби, ни бесконечной периодической десятичной дроби.

Это — не рациональное число, так как каждое рациональное число равно или конечной, или бесконечной периодической десятичной дроби. Рассмотренный пример приводит к следующему заключению: или мы не должны считать $\sqrt{2}$ числом, или должны расширить уже известное множество рациональных чисел, прибавив к ним новые, не рациональные числа, представляющие собой бесконечные непериодические десятичные дроби. Но если не считать $\sqrt{2}$ числом, тогда мы не смогли бы, например, выражать числами длины многих отрезков. Получилось бы, что диагональ квадрата со стороной 1 *см* не имеет длины. В самом деле, если сторона квадрата $ABCD$ (рис. 8) равна 1 *см*, то его площадь равна 1 *кв. см*, а площадь квадрата $ACKL$ равна 2 *кв. см* (сравните, сколько равных треугольников содержится в каждом квадрате). Значит, длина стороны AC должна выражаться числом, квадрат которого равен 2. А среди рациональных чисел такого числа нет. Вот почему условились считать числами и $\sqrt{2}$, и все бесконечные непериодические десятичные дроби. Но они — не рациональные числа, их называют *иррациональными числами*.

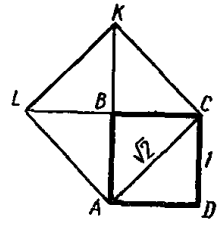


Рис. 8.

Иррациональным называют каждое число, которое можно выразить бесконечной непериодической десятичной дробью.

Иррациональные числа бывают и положительные, и отрицательные.

Примеры иррациональных чисел: $\sqrt{2} = 1{,}4142...$, $\sqrt{10} = 3{,}162...$, $-0{,}5050050005...$, $\pi = 3{,}14159...$, $\lg 2 = 0{,}3010...$, $\cos 10° = 0{,}9848...$ и др.

Рациональные и иррациональные числа вместе называются *действительными*, или *вещественными числами*.

Несмотря на то что существование отрезков, длины которых нельзя выразить рациональным числом, обнаружили еще в древней Греции (Пифагор, Евклид), древние греки не ввели иррациональных чисел. Считалось, что длина таких отрезков не может быть выражена числом, так как рассматривались только рациональные числа.

Впервые к понятию иррационального числа пришли ученые ближнего и среднего Востока.

В начале XIII в. иррациональные числа появляются и у западноевропейских ученых, прежде всего у Леонардо Пизанского, однако рассматриваются они лишь с геометрической точки зрения как неравноправные числа. Это мнение разделяло большинство математиков до XVII в. Однако развитие математики в XVII в. и ознакомление с новыми фактами заставило задуматься над самим понятием иррационального числа. К началу XVIII в. большинство математиков придерживалось мнения, что иррациональное число является корнем некоторой степени из целого или дробного числа, который не может быть выражен точно. Несколько иначе рассматривал иррациональные числа Ньютон, исходивший из отношения некоторого числа к числу, принятому за единицу; при несоизмеримости обоих чисел первое из них и получило название иррационального.

Сравнение действительных чисел. *Из двух положительных действительных чисел больше то, у которого целая часть больше.* Если целые части равны, большим считается то число, у которого первый из неравных десятичных знаков больше, а все предшествующие одинаковы. Из двух отрицательных действительных чисел большим считается то,

у которого абсолютная величина меньше. Каждое отрицательное число меньше нуля и любого положительного числа.

Примеры. $1{,}4142\ldots > 1{,}4139\ldots$
$-1{,}4152\ldots < -1{,}4139\ldots$
$-0{,}0674\ldots < 0{,}00176\ldots$
$9{,}8691\ldots < 9{,}87$

Равными считаются такие действительные числа, которые изображаются одной и той же десятичной дробью.

Геометрическое изображение действительных чисел. Действительные числа, как и рациональные, можно изображать на числовой оси точками. Пусть дана числовая ось (рис. 9) с начальной (нулевой) точ-

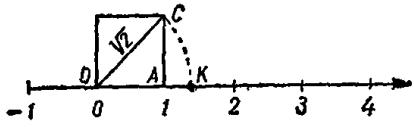


Рис. 9.

кой O и единичным отрезком OA. Изобразим на этой оси точку, отвечающую иррациональному числу $\sqrt{2}$. Для этого строим на отрезке OA квадрат, его диагональ $OC = \sqrt{2}$. Если раствором циркуля OC, как показано на рисунке, сделать засечку на оси, то полученная точка K пересечения дуги с осью и будет соответствовать числу $\sqrt{2}$.

Каждому действительному числу на числовой оси соответствует единственная точка. Наоборот, каждой точке на числовой оси соответствует единственное действительное число. Говорят, что между всеми точками числовой оси и всеми действительными числами существует *взаимно однозначное соответствие*.

Примечание. Между точками числовой оси и всеми рациональными числами не существует взаимно однозначного соответствия, так как не каждой точке оси соответствует рациональное число.

Приближение иррациональных чисел рациональными. Пусть иррациональное число α выражается такой бесконечной непериодической десятичной дробью:

$$\alpha = p_0 + \frac{p_1}{10} + \frac{p_2}{100} + \cdots + \frac{p_n}{10^n} + \ldots$$

Тогда конечные дроби

$$p_0 + \frac{p_1}{10} + \frac{p_2}{100} + \cdots + \frac{p_n}{10^n} \text{ и } p_0 + \frac{p_1}{10} + \frac{p_2}{100} + \cdots + \frac{p_n + 1}{10^n},$$

между которыми заключено число α, называются его десятичными приближенными значениями по недостатку и по избытку с точностью до $\frac{1}{10^n}$.

Для получения десятичного приближенного значения по недостатку данного действительного числа с точностью до $\frac{1}{10^n}$ следует в десятичной дроби, изображающей это число, сохранить n первых десятичных знаков и отбросить все последующие. Увеличив на 1 последний

десятичный знак приближенного значения по недостатку, мы получим приближенное значение по избытку с точностью до $\frac{1}{10^n}$.

Пример. Рассмотрим число 3,5781... . Его приближенные значения приведены в таблице 2.

Таблица 2

По недостатку	По избытку	С точностью до
3	4	1
3,5	3,6	0,1
3,57	3,58	0,01
3,578	3,579	0,001

§ 12. Действия над действительными числами

Обозначения. Если α данное действительное число, то его десятичные приближенные значения по недостатку с точностью до 1, 0,1, 0,01 и т. д. до $\frac{1}{10^n}$ ... будем обозначать соответственно символами $\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_n, \ldots$, а приближенные значения по избытку — символами $\overset{+}{\alpha}_0, \overset{+}{\alpha}_1, \overset{+}{\alpha}_2, \ldots, \overset{+}{\alpha}_n, \ldots$. Пусть, например, $\alpha = 3{,}1471\ldots$. Тогда

$$\bar{\alpha}_0 = 3;\ \bar{\alpha}_1 = 3{,}1;\ \bar{\alpha}_2 = 3{,}14;\ \bar{\alpha}_3 = 3{,}147\ \ldots.$$
$$\overset{+}{\alpha}_0 = 4;\ \overset{+}{\alpha}_1 = 3{,}2;\ \overset{+}{\alpha}_2 = 3{,}15;\ \overset{+}{\alpha}_3 = 3{,}148;\ \ldots.$$

Сложение. Суммой двух положительных действительных чисел называется действительное число, большее суммы любых приближенных значений слагаемых по недостатку, но меньшее суммы любых приближенных значений слагаемых по избытку.

Пример. Положим $\alpha = 3{,}3121\ldots$ и $\beta = 2{,}5483\ldots$, складываем приближенные значения по недостатку:

$\bar{\alpha}_0 = 3$	$\bar{\beta}_0 = 2$	$\bar{\alpha}_0 + \bar{\beta}_0 = 5$
$\bar{\alpha}_1 = 3{,}3$	$\bar{\beta}_1 = 2{,}5$	$\bar{\alpha}_1 + \bar{\beta}_1 = 5{,}8$
$\bar{\alpha}_2 = 3{,}31$	$\bar{\beta}_2 = 2{,}54$	$\bar{\alpha}_2 + \bar{\beta}_2 = 5{,}85$
$\bar{\alpha}_3 = 3{,}312$	$\bar{\beta}_3 = 2{,}548$	$\bar{\alpha}_3 + \bar{\beta}_3 = 5{,}860$
$\bar{\alpha}_4 = 3{,}3121$	$\bar{\beta}_4 = 2{,}5483$	$\bar{\alpha}_4 + \bar{\beta}_4 = 5{,}8604$

Складываем приближенные значения по избытку:

$\overset{+}{\alpha}_0 = 4$	$\overset{+}{\beta}_0 = 3$	$\overset{+}{\alpha}_0 + \overset{+}{\beta}_0 = 7$
$\overset{+}{\alpha}_1 = 3{,}4$	$\overset{+}{\beta}_1 = 2{,}6$	$\overset{+}{\alpha}_1 + \overset{+}{\beta}_1 = 6{,}0$
$\overset{+}{\alpha}_2 = 3{,}32$	$\overset{+}{\beta}_2 = 2{,}55$	$\overset{+}{\alpha}_2 + \overset{+}{\beta}_2 = 5{,}87$
$\overset{+}{\alpha}_3 = 3{,}313$	$\overset{+}{\beta}_3 = 2{,}549$	$\overset{+}{\alpha}_3 + \overset{+}{\beta}_3 = 5{,}862$
$\overset{+}{\alpha}_4 = 3{,}3122$	$\overset{+}{\beta}_4 = 2{,}5484$	$\overset{+}{\alpha}_4 + \overset{+}{\beta}_4 = 5{,}8606$

Так последовательно определяют десятичные знаки суммы

$$\alpha + \beta = 5{,}860\ldots .$$

Примечание. Если какое-нибудь слагаемое рациональное и выражается конечной десятичной дробью или даже является целым числом, его тоже можно записать в виде бесконечной десятичной дроби, приписав в качестве десятичных знаков бесконечное число нулей, например:

$$2{,}3 = 2{,}3000\ldots; \quad 7 = 7{,}000\ldots .$$

Тогда сумму рационального и иррационального чисел можно также определять изложенным выше способом.

Аналогично можно определить и сумму двух отрицательных действительных чисел, и отрицательного с положительным.

Вообще, сложение двух действительных чисел всегда возможно и однозначно.

Умножение. *Произведением двух положительных действительных чисел α и β называется действительное число, большее произведения любых приближенных значений сомножителей по недостатку, но меньшее произведения любых приближенных значений сомножителей по избытку.*

Пример. Положим $\alpha = 1{,}7320\ldots$; $\beta = 1{,}4142\ldots$, тогда получим

$\underline{\alpha}_0 = 1$	$\underline{\beta}_0 = 1$	$\underline{\alpha}_0\underline{\beta}_0 = 1$
$\underline{\alpha}_1 = 1{,}7$	$\underline{\beta}_1 = 1{,}4$	$\underline{\alpha}_1\underline{\beta}_1 = 2{,}38$
$\underline{\alpha}_2 = 1{,}73$	$\underline{\beta}_2 = 1{,}41$	$\underline{\alpha}_2\underline{\beta}_2 = 2{,}4393$
$\underline{\alpha}_3 = 1{,}732$	$\underline{\beta}_3 = 1{,}414$	$\underline{\alpha}_3\underline{\beta}_3 = 2{,}449048$
$\underline{\alpha}_4 = 1{,}7320$	$\underline{\beta}_4 = 1{,}4142$	$\underline{\alpha}_4\underline{\beta}_4 = 2{,}44939440$

$+$	$+$	$++$
$\overline{\alpha}_0 = 2$	$\overline{\beta}_0 = 2$	$\overline{\alpha}_0\overline{\beta}_0 = 4$
$+$	$+$	$++$
$\overline{\alpha}_1 = 1{,}8$	$\overline{\beta}_1 = 1{,}5$	$\overline{\alpha}_1\overline{\beta}_1 = 2{,}70$
$+$	$+$	$++$
$\overline{\alpha}_2 = 1{,}74$	$\overline{\beta}_2 = 1{,}42$	$\overline{\alpha}_2\overline{\beta}_2 = 2{,}4708$
$+$	$+$	$++$
$\overline{\alpha}_3 = 1{,}733$	$\overline{\beta}_3 = 1{,}415$	$\overline{\alpha}_3\overline{\beta}_3 = 2{,}452195$
$+$	$+$	$++$
$\overline{\alpha}_4 = 1{,}7321$	$\overline{\beta}_4 = 1{,}4143$	$\overline{\alpha}_4\overline{\beta}_4 = 2{,}44970903$

Так последовательно определяют десятичные знаки произведения

$$\alpha\beta = 2{,}449\ldots$$

Умножение отрицательных действительных чисел выполняют согласно с правилами, данными для рациональных чисел: произведение двух отрицательных чисел считается положительным, а отрицательного и положительного — отрицательным.

Действия вычитание, деление и возведение в степень действительных чисел определяются так же, как и для рациональных чисел.

Законы арифметических действий для множества всех действительных чисел остаются справедливыми, как и для множества рациональных чисел.

§ 13. Иррациональные выражения

Корень m-й степени. Раньше (см. стр. 97) было введено понятие квадратного корня, или, как его еще называют, корня второй степени. Но в математике рассматриваются корни не только второй, но и третьей, четвертой, пятой и вообще m-й степени.

Пусть m — произвольное натуральное число больше 1, а a — любое вещественное число. Корнем m-й степени из a называется такое число, m-я степень которого равна a.

Примеры. Корень 3-й степени из 64 равен 4, так как $4^3 = 64$; корень 5-й степени из -32 равен -2, так как $(-2)^5 = -32$; корень 4-й степени из 81 имеет (в множестве действительных чисел) два значения: 3 и -3, так как $3^4 = 81$ и $(-3)^4 = 81$.

Корень m-й степени из числа a обозначают символом $\sqrt[m]{a}$. Однако в случае корня четной степени, например 2-й, 4-й и т. д., этим символом обозначают только неотрицательное значение корня, например $\sqrt[4]{81} = 3$, $\sqrt[6]{0{,}000001} = 0{,}1$. Их называют арифметическими значениями корней или короче *арифметическими корнями*.

Следовательно, $\sqrt[m]{a}$ только при отрицательном a и нечетном m имеет отрицательное значение. При положительном a число $\sqrt[m]{a}$ всегда положительное. Если же $a < 0$, а m четное, то $\sqrt[m]{a}$ (в множестве действительных чисел) не существует.

Примечание. Знак радикала впервые ввели немецкие алгебраисты в XV в. В 1525 г. математик Христоф Рудольф фон Яуэр издал первое сочинение по алгебре на немецком языке. Знак корня он применял в форме $\sqrt{}$. Горизонтальную черту над подрадикальным выражением ввел французский геометр Рене Декарт (1637 г.), а показатель корня над радикалом — голландский математик Альбер Жирар (1629 г.).

Иррациональные выражения. Раньше мы рассматривали рациональные алгебраические выражения, содержащие только действия сложение, вычитание, умножение, деление и возведение в степень с натуральным показателем. Дальше будут рассматриваться и такие выражения, которые, кроме этих пяти действий, содержат также и действие извлечения корня m-й степени. Такие алгебраические выражения называются *иррациональными*.

Примеры иррациональных выражений:

$$\sqrt{2{,}5a}, \quad c^2d\sqrt[5]{m-n}, \quad \frac{a}{\sqrt[3]{c}} + \sqrt{3}.$$

Иррациональные выражения вида $a\sqrt{b}$ называют также радикалами.

Тождественные преобразования иррациональных выражений. Определение тождественных иррациональных выражений и тождественного преобразования остаются такими же, как и для рациональных выражений (см. стр. 82).

Дальше рассмотрим важнейшие тождественные преобразования иррациональных выражений.

Основное свойство радикала. *Значение радикала не изменится, если показатель корня и показатель подкоренного выражения умножим на одно и то же число*, т. е.

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mp]{a^{np}}.$$

Из этого свойства получаем следствия:

1. *Радикалы разных степеней можно привести к одинаковым показателям.*

Выполняют это так: находят общее кратное (лучше всего наименьшее) показателей всех радикалов и умножают показатель каждого из них на соответствующий дополнительный множитель, возвышая вместе с тем каждое подкоренное выражение в надлежащую степень.

Примеры. Привести к общему показателю радикалы:

$$\text{А. } \sqrt{ax},\quad \sqrt[3]{a^2};$$

$$\text{Б. } \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}},\quad \sqrt[2n]{\frac{x+1}{x-1}},\quad \sqrt[n]{\frac{x}{y}}.$$

Решение. А. Наименьшее общее кратное показателей радикалов 6; дополнительные множители будут: для первого радикала 3, для второго 2. Тогда

$$\sqrt{ax}=\sqrt[6]{(ax)^3}=\sqrt[6]{a^3x^3};\quad \sqrt[3]{a^2}=\sqrt[6]{(a^2)^2}=\sqrt[6]{a^4}.$$

Б. Наименьшее кратное показателей радикалов $4n$; дополнительные множители соответственно будут n, 2 и 4. Тогда

$$\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}=\sqrt[4n]{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n}=\sqrt[4n]{\frac{(x-1)^n}{(x+1)^n}};$$

$$\sqrt[2n]{\frac{x+1}{x-1}}=\sqrt[4n]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}=\sqrt[4n]{\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}};$$

$$\sqrt[n]{\frac{x}{y}}=\sqrt[4n]{\left(\frac{x}{y}\right)^4}=\sqrt[4n]{\frac{x^4}{y^4}}.$$

2. *Если подкоренное выражение есть степень, показатель которой имеет общий множитель с показателем радикала, то на этот множитель можно разделить оба показателя*, т. е.

$$\sqrt[mn]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^p}.$$

Примечание. Эта теорема требует дополнительного условия: $\sqrt[n]{a^p}$ должен существовать, так как без этого теорема может быть неверной. Например, вместо $\sqrt[8]{(-2)^6}$ нельзя писать $\sqrt[4]{(-2)^3}$, так как последний корень в области действительных чисел не существует. Всегда верно следующее равенство:

$$\sqrt[mn]{|a^{mp}|}=\sqrt[n]{|a|^p}.$$

В частности,

$$\sqrt[m]{|a^{mp}|}=|a^p|;$$

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a, & \text{если } a\geqslant 0,\\ -a, & \text{если } a<0.\end{cases}$$

Примеры. $\sqrt[6]{x^6} = \sqrt{x^3}$; $\sqrt[4]{0{,}04} = \sqrt[4]{(0{,}2)^2} = \sqrt{0{,}2}$;

$$\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3; \quad \sqrt[8]{(1-\sqrt{2})^6} = \sqrt[4]{|1-\sqrt{2}|^3} = \sqrt[4]{(\sqrt{2}-1)^3}.$$

3. *Если подкоренное выражение есть произведение нескольких степеней, показатели которых имеют один и тот же общий множитель с показателем радикала, то на этот множитель можно разделить все показатели.*

Пример 1. Сократить показатели корней и подкоренных выражений.

Решения. а) $\sqrt[6]{b^4c^8} = \sqrt[3]{b^2c^4}$;

б) $\sqrt[6]{8x^3y^3} = \sqrt[6]{2^3x^3y^3} = \sqrt{2xy}$.

Пример 2. Сократить показатель корня и показатель степени подкоренного выражения при заданных условиях:

$$\sqrt[4]{(x-1)^2} \text{ при } x<1; \quad \sqrt[8]{(3-x)^4} \text{ при } x>3.$$

Воспользуемся формулой

$$\sqrt[2mk]{a^{2m}} = \sqrt[2mk]{|a|^{2m}} = \sqrt[k]{|a|} = \begin{cases} \sqrt[k]{a}, & \text{если } a>0, \\ \sqrt[k]{-a}, & \text{если } a<0. \end{cases}$$

Тогда получим

$$\sqrt[4]{(x-1)^2} = \sqrt[4]{|x-1|^2} = \sqrt{|x-1|} = \sqrt{-(x-1)} = \sqrt{-x+1} \quad (x<1);$$

$$\sqrt[8]{(3-x)^4} = \sqrt[8]{|3-x|^4} = \sqrt{|3-x|} = \sqrt{-(3-x)} = \sqrt{-3+x} \quad (x>3).$$

Основные теоремы о радикалах. *Корень из произведения нескольких чисел равен произведению корней той же степени из каждого числа, если корень из каждого числа существует*, т. е.

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}.$$

Чтобы извлечь корень из дроби, надо извлечь его из числителя и знаменателя, если эти корни существуют, и первый результат разделить на второй, т. е.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Примечания. Оговорки о существовании корней в предыдущих теоремах необходимы, так как при четных n и отрицательных a и b корни $\sqrt[n]{ab}$ и $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ существуют, а $\sqrt[n]{a}$ и $\sqrt[n]{b}$ не существуют. В этих

случаях приведенные выше равенства неверны. Однако всегда верны равенства

$$\sqrt[n]{|ab|} = \sqrt[n]{|a|} \cdot \sqrt[n]{|b|} \text{ и } \sqrt[n]{\left|\frac{a}{b}\right|} = \frac{\sqrt[n]{|a|}}{\sqrt[n]{|b|}}.$$

Чтобы извлечь корень из степени, показатель которой делится на показатель корня, нужно разделить показатель степени на показатель корня, т. е.

$$\sqrt[n]{a^{mn}} = a^m.$$

Примечание. При a отрицательном, n четном и m нечетном приведенное выше равенство неверно. Однако всегда справедливо равенство

$$\sqrt[n]{|a^{mn}|} = |a^m|.$$

Пользуясь этими теоремами, можно извлекать корни из различных алгебраических выражений.

Примеры. Извлечь корни *:

а) $\sqrt[5]{32 \cdot 10^5}$; б) $\sqrt[3]{\frac{125}{64} a^6 c^9}$; в) $\sqrt{\frac{9a^4b^2}{(a-b)^4}}$.

Решения.

а) $\sqrt[5]{32 \cdot 10^5} = \sqrt[5]{2^5 \cdot 10^5} = \sqrt[5]{2^5} \cdot \sqrt[5]{10^5} = 2 \cdot 10 = 20$;

б) $\sqrt[3]{\frac{125}{64} a^6 c^9} = \sqrt[3]{\frac{125}{64}} \cdot \sqrt[3]{a^6} \cdot \sqrt[3]{c^9} = \frac{5}{4} a^2 c^3$;

в) $\sqrt{\frac{9a^4b^2}{(a-b)^4}} = \frac{\sqrt{9a^4b^2}}{\sqrt{(a-b)^4}} = \frac{3a^2b}{(a-b)^2}$.

Вынесение множителей за знак радикала. *Если подкоренное выражение разлагается на такие множители, что из некоторых можно извлечь точный корень, то такие множители, по извлечении из них корня, могут быть написаны перед знаком корня* (т. е. могут быть вынесены за знак корня).

Это выполняется по формуле $\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}$ $(a > 0)$.

Примеры. а) $\sqrt[3]{a^6 c} = a^2 \sqrt[3]{c}$; б) $\sqrt{300} = \sqrt{100 \cdot 3} = 10\sqrt{3}$; в) $\sqrt[n]{a^{2n} c^{n+1}} = \sqrt[n]{a^{2n} \cdot c^n \cdot c} = a^2 c \sqrt[n]{c}$.

Примечание. При отрицательном a и четном n равенство $\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}$ неверно, но при любых значениях a, b и n

$$\sqrt[n]{|a^n b|} = |a| \cdot \sqrt[n]{|b|}.$$

* Здесь и в следующих примерах на преобразования раднкалов с четными показателями, где не даются дополнительные условия, следует под буквами понимать положнтельные числа.

Примеры. Вынести множители за знак радикала, учитывая допустимые значения букв или ограничения на них:

а) $\sqrt{a^5(b-3)^2}$ при $a>0$, $b\geqslant 3$;

б) $\sqrt{a^3(3-a)^2}$ при $0<a\leqslant 3$;

в) $\sqrt{\dfrac{3(x^2-2xy+y^2)}{4(x^2+2xy+y^2)}}$.

Решение.

а) $\sqrt{a^5(b-3)^2}=a^2(b-3)\sqrt{a}$;

б) $\sqrt{a^3(3-a)^2}=a(3-a)\sqrt{a}$;

в) $\sqrt{\dfrac{3(x^2-2xy+y^2)}{4(x^2+2xy+y^2)}}=\sqrt{\dfrac{3(x-y)^2}{4(x+y)^2}}=\dfrac{|x-y|}{|x+y|}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Внесение множителей под знак корня. Для подведения под знак корня множителей, стоящих перед ним, достаточно возвысить такие множители в степень, показатель которой равен показателю корня, а затем написать эти степени под знаком корня.

Это выполняется по формуле

$$a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n b}\quad (a>0).$$

Пример 1. $2xy\sqrt{\dfrac{3x}{2y}}=\sqrt{4x^2y^2\cdot\dfrac{3x}{2y}}=\sqrt{\dfrac{12x^3y^2}{2y}}=\sqrt{6x^3y}$.

Пример 2. $\dfrac{x}{y^2}\sqrt[4]{\dfrac{y}{x}}=\sqrt[4]{\dfrac{x^4}{y^8}\cdot\dfrac{y}{x}}=\sqrt[4]{\dfrac{x^4y}{xy^8}}=\sqrt[4]{\dfrac{x^3}{y^7}}$.

Пример 3. $(a-b)\sqrt{\dfrac{2}{a^2-b^2}}=\sqrt{(a-b)^2\cdot\dfrac{2}{a^2-b^2}}=$

$=\sqrt{\dfrac{2(a-b)}{a+b}}$.

В примерах 1—3 все множители перед радикалами считаются положительными.

Пример 4. Внести множители под знак радикала при заданных значениях букв:

$$(2-a)\sqrt{\frac{2a}{a-2}}\quad\text{при } a>2;$$

$$(2-a)\sqrt{\frac{2a}{a-2}}=-(a-2)\sqrt{\frac{2a}{a-2}}=-\sqrt{(a-2)^2\cdot\frac{2a}{a-2}}=$$

$=-\sqrt{2a(a-2)}$.

Пример 5. Не извлекая корни, определить, которое из чисел больше:

$$2\sqrt{3}\text{ или }3\sqrt{2}.$$

$2\sqrt{3}=\sqrt{2^2\cdot 3}=\sqrt{12}$; $3\sqrt{2}=\sqrt{3^2\cdot 2}=\sqrt{18}$, так как

$\sqrt{18}>\sqrt{12}$, то $2\sqrt{3}<3\sqrt{2}$.

Освобождение подкоренного выражения от дроби. Используя два предыдущих преобразования радикалов, можно освобождать подкоренные выражения от дроби.

Примеры. Освободить подкоренные выражения от дроби:

$$\text{а) } \sqrt{\frac{2}{7}}; \quad \text{б) } \sqrt[3]{\frac{1}{3}}; \quad \text{в) } \sqrt[4]{\frac{3}{8}}.$$

Решение: а) чтобы в первом радикале из знаменателя можно было извлечь квадратный корень, умножим оба члена дроби на 7:

$$\sqrt{\frac{2}{7}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 7}{7^2}} = \sqrt{\frac{14}{7^2}} = \sqrt{\frac{14}{7}} = \frac{1}{7}\sqrt{14};$$

б) чтобы во втором радикале из знаменателя можно было извлечь кубический корень, умножим оба члена дроби на 3^2:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1 \cdot 3^2}{3^3}} = \frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{3^3}} = \frac{\sqrt[3]{9}}{3} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{9};$$

в) чтобы в третьем радикале из знаменателя можно было извлечь корень четвертой степени, умножим оба числа на 2 (так как $8 = 2^3$):

$$\sqrt[4]{\frac{3}{8}} = \sqrt[4]{\frac{3 \cdot 2}{2^3 \cdot 2}} = \sqrt[4]{\frac{6}{2^4}} = \frac{1}{2}\sqrt[4]{6}.$$

Если подкоренное выражение — алгебраическая дробь, подобные примеры решают аналогично.

Примеры.

$$\sqrt{\frac{m}{n}} = \sqrt{\frac{mn}{n^2}} = \frac{1}{n}\sqrt{mn};$$

$$\sqrt[3]{\frac{3m}{2a}} = \sqrt[3]{\frac{3m(2a)^2}{(2a)^3}} = \frac{1}{2a}\sqrt[3]{12a^2m};$$

$$(x-y)^2\sqrt[4]{\frac{xy}{(x-y)^2}} = (x-y)^2\sqrt[4]{\frac{xy(x-y)^2}{(x-y)^4}} =$$

$$= (x-y)^2 \cdot \frac{1}{|x-y|}\sqrt[4]{xy(x-y)^2} = |x-y|\sqrt[4]{xy(x-y)^2}.$$

Примечание. Последний пример можно решать и другим способом:

$$(x-y)^2\sqrt[4]{\frac{xy}{(x-y)^2}} = |x-y| \cdot \sqrt[4]{\frac{(x-y)^4 xy}{(x-y)^2}} =$$

$$= |x-y|\sqrt[4]{(x-y)^2 xy}.$$

Приведение радикалов к простейшему виду. Для того чтобы привести радикал к простейшему, или нормальному виду, надо выполнить последовательно такие операции:

1) упростить подкоренное выражение (если это возможно);

2) сократить показатели корня и подкоренного выражения (если они имеют общий множитель);

3) вынести из-под радикала рациональные миожители;

4) освободить подкоренное выражение от дроби.

Примеры. Привести к простейшему виду следующие радикалы:

а) $\frac{3xy^2}{2}\sqrt{\frac{8}{xy}}$; б) $\frac{2ab^2}{c}\sqrt[3]{\frac{5a}{16b^2c^3}}$; в) $\frac{1}{a}\sqrt[3]{a^8-a^6b^2}$.

Решение:

а) $\frac{3xy^2}{2}\sqrt{\frac{8}{xy}}=\frac{3xy^2}{2}\sqrt{\frac{4\cdot 2xy}{x^2y^2}}=\frac{3xy^2}{2}\cdot\frac{2}{xy}\sqrt{2xy}=3y\sqrt{2xy}$;

б) $\frac{2ab^2}{c}\sqrt[3]{\frac{5a}{16b^2c^3}}=\frac{2ab^2}{c}\sqrt[3]{\frac{5a\cdot 2^2b}{2^4b^2c^3\cdot 2^2b}}=\frac{2ab^2}{c}\times$

$\times\frac{1}{2^2bc}\sqrt[3]{20ab}=\frac{ab}{2c^2}\sqrt[3]{20ab}$;

в) $\frac{1}{a}\sqrt[3]{a^8-a^6b^2}=\frac{1}{a}\sqrt[3]{a^6(a^2-b^2)}=\frac{1}{a}\cdot a^2\sqrt[3]{a^2-b^2}=$

$=a\sqrt[3]{a^2-b^2}$.

Подобие радикалов. Два или несколько радикалов называются *подобными*, если они одинаковой степени и имеют одинаковые подкоренные выражения. Например, $a\sqrt[3]{x^2c}$ и $4x\sqrt[3]{x^2c}$ — подобные радикалы, так как они оба третьей степени и имеют одинаковые подкоренные выражении x^2c. Иногда данные радикалы оказываются подобными только после некоторых преобразований.

Пример 1. Подобны ли радикалы $\sqrt{18}$, $\sqrt{128}$, $\sqrt{32}$?

$\sqrt{18}=\sqrt{2\cdot 9}=3\sqrt{2}$; $\sqrt{128}=\sqrt{2\cdot 64}=8\sqrt{2}$; $\sqrt{32}=\sqrt{2\cdot 16}=$
$=4\sqrt{2}$.

Ответ. Подобны.

Пример 2. Подобны ли радикалы $\sqrt[3]{\frac{8}{3}}$ и $\sqrt[3]{\frac{8}{9}}$?

$$\sqrt[3]{\frac{8}{9}}=2\sqrt[3]{\frac{1}{9}}=2\sqrt[3]{\frac{1\cdot 3}{3^3}}=\frac{2}{3}\sqrt[3]{3};$$

$$\sqrt[3]{\frac{8}{3}}=2\sqrt[3]{\frac{1}{3}}=2\sqrt[3]{\frac{3^2}{3^3}}=\frac{2}{3}\sqrt[3]{9}.$$

Ответ. Не подобны.

§ 14. Действия с радикалами

Сложение и вычитание. *Чтобы сложить (или вычесть) радикалы, их соединяют знаками плюс (или минус) и приводят подобные члены, если они окажутся.*

Примеры. Выполнить указанные действия:

$$1.\ (2\sqrt{20}-\sqrt{45}+3\sqrt{18})+(\sqrt{72}-\sqrt{80}).$$

Решение.

$$(2\sqrt{20}-\sqrt{45}+3\sqrt{18})+(\sqrt{72}-\sqrt{80})=2\sqrt{20}-\sqrt{45}+$$
$$+3\sqrt{18}+\sqrt{72}-\sqrt{80}=4\sqrt{5}-3\sqrt{5}+9\sqrt{2}+6\sqrt{2}-4\sqrt{5}=$$
$$=15\sqrt{2}-3\sqrt{5}.$$

$$2.\ (\sqrt{9x}-\sqrt[3]{8y})-(\sqrt[3]{27y}-\sqrt{16x}).$$

Решение.

$$(\sqrt{9x}-\sqrt[3]{8y})-(\sqrt[3]{27y}-\sqrt{16x})=\sqrt{9x}-\sqrt[3]{8y}-$$
$$-\sqrt[3]{27y}+\sqrt{16x}=3\sqrt{x}-2\sqrt[3]{y}-3\sqrt[3]{y}+4\sqrt{x}=7\sqrt{x}-$$
$$-5\sqrt[3]{y}.$$

Умножение. *Чтобы перемножить несколько радикалов одинаковой степени, надо перемножить подкоренные выражения и из произведения извлечь корень той же степени.*

Если перемножаются радикалы с различными показателями, то их надо предварительно привести к одному показателю. Если перед радикалами имеются коэффициенты, то их перемножают.

Пример 1. Выполнить умножение:

$$\text{А.}\ 5\sqrt[4]{2a}\cdot 2\sqrt[4]{8a^3}.$$

Решение. $5\sqrt[4]{2a}\cdot 2\sqrt[4]{8a^3}=10\sqrt[4]{16a^4}=10\cdot 2a=20a.$

$$\text{Б.}\ (4x\sqrt[3]{x^2}-5y\sqrt[3]{xy}+xy\sqrt[3]{y^2})\cdot 2xy\sqrt[3]{xy}.$$

Решение. $(4x\sqrt[3]{x^2}-5y\sqrt[3]{xy}+xy\sqrt[3]{y^2})\cdot 2xy\sqrt[3]{xy}=$
$=8x^2y\sqrt[3]{x^3y}-10xy^2\sqrt[3]{x^2y^2}+2x^2y^2\sqrt[3]{xy^3}=8x^3y\sqrt[3]{y}-$
$-10xy^2\sqrt[3]{x^2y^2}+2x^2y^3\sqrt[3]{x}.$

$$\text{В.}\ (7\sqrt{5}-4)(2\sqrt{5}-1).$$

Решение. $(7\sqrt{5}-4)(2\sqrt{5}-1)=14\sqrt{25}-8\sqrt{5}-7\sqrt{5}+$
$+4=70+4-15\sqrt{5}=74-15\sqrt{5}.$

Пример 2. Перемножить радикалы с различными показателями:

$$\text{А.}\ \sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[6]{2}.$$

Решение. $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[6]{2}=\sqrt[6]{4}\cdot\sqrt[6]{2}=\sqrt[6]{8}=\sqrt{2}.$

$$\text{Б.}\ (a\sqrt{a}+\sqrt[6]{a})\cdot(\sqrt[3]{a^2}-a\sqrt[4]{a^3}).$$

Решение. $(a\sqrt{a}+\sqrt[6]{a})\cdot(\sqrt[3]{a^2}-a\sqrt[4]{a^3})=(a\sqrt[12]{a^6}+$
$+\sqrt[12]{a^2})\cdot(\sqrt[12]{a^8}-a\sqrt[12]{a^9})=a\sqrt[12]{a^{14}}-a^2\sqrt[12]{a^{15}}+\sqrt[12]{a^{10}}-$
$-a\sqrt[12]{a^{11}}=a^2\sqrt[12]{a^2}-a^3\sqrt[12]{a^3}+\sqrt[12]{a^{10}}-a\sqrt[12]{a^{11}}=a^2\sqrt[6]{a}-$
$-a^3\sqrt[4]{a}+\sqrt[6]{a^5}-a\sqrt[12]{a^{11}}$.

Деление. *Чтобы разделить радикалы с одинаковыми показателями, надо разделить их подкоренные выражения и из частного извлечь корень той же степени.*

Чтобы разделить радикалы с различными показателями, их надо привести предварительно к одинаковым показателям. Если есть коэффициенты, то их делят.

Пример 1. Выполнить деление:

$$\text{А. } \sqrt[3]{6a^4}:\sqrt[3]{2a}.$$

Решение. $\sqrt[3]{6a^4}:\sqrt[3]{2a}=\sqrt[3]{\frac{6a^4}{2a}}=\sqrt[3]{3a^3}=a\sqrt[3]{3}$.

$$\text{Б. } \left(\frac{3x}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}-0{,}4\sqrt{\frac{3}{xy}}+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{xy}{2}}\right):\frac{4}{15}\sqrt{\frac{3y}{2x}}.$$

Решение. $\left(\frac{3x}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}-0{,}4\sqrt{\frac{3}{xy}}+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{xy}{2}}\right):\frac{4}{15}\sqrt{\frac{3y}{2x}}=$
$=\frac{45x}{8}\sqrt{\frac{2x^2}{3y^2}}-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{y^2}}+\frac{5}{4}\sqrt{\frac{x^2}{3}}=\frac{15x^2}{8y}\sqrt{6}-\frac{3}{2y}\sqrt{2}+\frac{5x}{12}\sqrt{3}$.

$$\text{В. } (\sqrt{8x^2y}-2y\sqrt{x}-x\sqrt{x}):(\sqrt{2y}-\sqrt{x}).$$

Решение. $(\sqrt{8x^2y}-2y\sqrt{x}-x\sqrt{x}):(\sqrt{2y}-\sqrt{x})=(2x\sqrt{2y}-$
$-2y\sqrt{x}-x\sqrt{x}):(\sqrt{2y}-\sqrt{x})=[(x\sqrt{2y}-x\sqrt{x})+(x\sqrt{2y}-$
$-2y\sqrt{x})]:(\sqrt{2y}-\sqrt{x})=[x(\sqrt{2y}-\sqrt{x})-\sqrt{2xy}(\sqrt{2y}-\sqrt{x})]:$
$:(\sqrt{2y}-\sqrt{x})=(\sqrt{2y}-\sqrt{x})(x-\sqrt{2xy}):(\sqrt{2y}-\sqrt{x})=x-\sqrt{2xy}$.

Пример 2. Выполнить деление с помощью формул сокращенного умножения:

$(\sqrt[3]{25a^2}-\sqrt[3]{16b^2}):(\sqrt[3]{5a}-\sqrt[3]{4b})=[(\sqrt[3]{5a})^2-(\sqrt[3]{4b})^2]:(\sqrt[3]{5a}-$
$-\sqrt[3]{4b})=(\sqrt[3]{5a}-\sqrt[3]{4b})(\sqrt[3]{5a}+\sqrt[3]{4b}):(\sqrt[3]{5a}-\sqrt[3]{4b})=$
$=\sqrt[3]{5a}+\sqrt[3]{4b}$.

Возведение в степень. Чтобы возвести радикал в степень, надо возвести в эту степень подкоренное выражение, оставив тот же показатель корня:

$$(\sqrt[n]{a})^k=\sqrt[n]{a^k}.$$

Примеры. $\left(\sqrt[3]{2ax^2}\right)^2 = \sqrt[3]{4a^2x^4} = x\sqrt[3]{4a^2x}$;

$\left(\sqrt[3]{(x+y)^2}\right)^5 = \sqrt[3]{(x+y)^{10}} = (x+y)^3\sqrt[3]{x+y}$;

$\left(\sqrt[n]{(x^2+y^2)^m}\right)^{np} = \sqrt[n]{(x^2+y^2)^{mnp}} = (x^2+y^2)^{mp}$.

Алгебраические суммы радикалов можно возводить в степень, пользуясь формулами сокращенного умножения.

Примеры. $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 = 3-2\sqrt{6}+2 = 5-2\sqrt{6}$;

$(\sqrt{3}-2\sqrt[3]{2})^3 = \sqrt{3^3}-3\cdot 3\cdot 2\sqrt[3]{2}+3\sqrt{3}\cdot 4\sqrt[3]{4}-8\sqrt[3]{2^3} =$

$= 3\sqrt{3}-18\sqrt[3]{2}+12\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{4}-16 = 3\sqrt{3}-18\sqrt[3]{2}+$

$+12\sqrt[6]{432}-16$.

Извлечение корня. *Чтобы извлечь корень из корня, надо перемножить показатели корней:*

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}.$$

Примеры. $\sqrt{\sqrt[3]{a^2}} = \sqrt[6]{a^2} = \sqrt[3]{a}$; $\sqrt[4]{a^2\sqrt[3]{a^4}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{a^{10}}} =$

$= \sqrt[12]{a^{10}} = \sqrt[6]{a^5}$.

Квадратный корень из двучлена вида $A \pm \sqrt{B}$. При преобразовании выражений, содержащих квадратные радикалы, иногда пользуются формулой

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}},$$

где $A > 0$, $B > 0$ и $A^2 > B$, а знаки в правой и левой части одновременно берутся либо верхние, либо нижние (соответственно). Эта формула называется *формулой сложного радикала.*

Примеры. $\sqrt{2}+\sqrt{3} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{4-3}}{2}} + \sqrt{\frac{2-\sqrt{4-3}}{2}} =$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3}+1)$;

$\sqrt{3\sqrt{3}-2\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{(3\sqrt{3})^2-24}}{2}} -$

$-\sqrt{\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{(3\sqrt{3})^2-24}}{2}} = \sqrt{\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2}} -$

$-\sqrt{\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{2\sqrt{3}}-\sqrt{\sqrt{3}} = \sqrt[4]{12}-\sqrt[4]{3}$.

Уничтожение иррациональности в знаменателе или числителе дроби. Замена дроби, у которой знаменатель (числитель) — иррациональ-

ное выражение, тождественной ей дробью с рациональным знаменателем (числителем) называется уничтожением иррациональности в знаменателе (числителе) дроби.

Ниже рассмотрены основные приемы уничтожения иррациональностей в знаменателях. Уничтожение иррациональностей в числителях дробей выполняется аналогично.

1. Дробь вида $\frac{a}{\sqrt[n]{b^k}}$, $n>k$. В этом случае умножают числитель и знаменатель на такой множитель, чтобы в знаменателе корень извлекался бы нацело, т. е. на $\sqrt[n]{b^{n-k}}$.

Примеры. $\frac{5}{\sqrt[4]{125}}=\frac{5}{\sqrt[4]{5^3}}=\frac{5\cdot\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{5^3}\cdot\sqrt[4]{5}}=\frac{5\sqrt[4]{5}}{5}=\sqrt[4]{5}$;

$$\frac{a}{\sqrt[n]{x^{n-1}}}=\frac{a\cdot\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{x^{n-1}}\sqrt[n]{x}}=\frac{a\sqrt[n]{x}}{x}.$$

2. Дробь вида $\frac{A}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}$. Числитель и знаменатель умножают на *сопряженное** выражение $\sqrt{a}\mp\sqrt{b}$.

В частном случае, когда дробь вида $\frac{A}{p\sqrt{a}\pm q}$, то ее члены умножают на $p\sqrt{a}\mp q$.

Примеры. $\frac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{8}}=\frac{6(\sqrt{5}+\sqrt{8})}{(\sqrt{5}-\sqrt{8})(\sqrt{5}+\sqrt{8})}=$

$$=\frac{6(\sqrt{5}+\sqrt{8})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{8})^2}=\frac{6(\sqrt{5}+\sqrt{8})}{5-8}=-2(\sqrt{5}+\sqrt{8});$$

$$\frac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}=\frac{(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})}{(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b})(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})}=$$

$$=\frac{(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})^2}{(\sqrt{a+b})^2-(\sqrt{a-b})^2}=\frac{a+b-2\sqrt{a+b}\sqrt{a-b}+a-b}{a+b-(a-b)}=$$

$$=\frac{2a-2\sqrt{a^2-b^2}}{2b}=\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}.$$

3. Дробь вида $\frac{A}{\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}}$. В этом случае числитель и знаменатель дроби умножают на неполный квадрат разности или суммы: $\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$.

---

* *Сопряженным* множителем относительно иррационального выражения M называется всякое выражение B, неравное тождественно нулю, такое, что произведение MB не содержит радикалов.

Примеры. $\dfrac{6}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{4}}=\dfrac{6\left(\sqrt[3]{7^2}+\sqrt[3]{7\cdot 4}+\sqrt[3]{4^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{4}\right)\left(\sqrt[3]{7^2}+\sqrt[3]{7\cdot 4}+\sqrt[3]{4^2}\right)}=$

$=\dfrac{6\left(\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{28}+\sqrt[3]{16}\right)}{\left(\sqrt[3]{7}\right)^3-\left(\sqrt[3]{4}\right)^3}=2\left(\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{28}+\sqrt[3]{16}\right);$

$\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{5}}=\dfrac{1\cdot\left(1-\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{5^2}\right)}{\left(1+\sqrt[3]{5}\right)\left(1-\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{5^2}\right)}=\dfrac{1-\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25}}{1+5}=$

$=\dfrac{1}{6}\left(1-\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25}\right).$

4. Если в знаменателе встречаются радикалы с разными показателями, то можно уничтожить сначала один радикал, а затем второй.

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}}=\frac{1\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}\right)}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}}{3-\sqrt[3]{4}}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}\right)\left(9+3\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16}\right)}{\left(3-\sqrt[3]{4}\right)\left(9+3\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16}\right)}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}\right)\left(9+3\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}\right)}{23}.$$

5. Если в знаменателе имеются три и более радикалов, то иногда полезно предварительно сгруппировать члены и свести данный случай к уже разобранным.

Пример.

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2+2\sqrt{6}+3-5}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})\sqrt{6}}{12}.$$

Примеры более сложных преобразований.

1. Доказать, что при $x=\dfrac{2ab}{b^2+1}$ $(b>0,\ a>0)$

$$\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\begin{cases} b \text{ при } b\geqslant 1, \\ \dfrac{1}{b} \text{ при } 0<b<1. \end{cases}$$

Доказательство.

$$\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\frac{(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})^2}{(\sqrt{a+x})^2-(\sqrt{a-x})^2}=\frac{2a+2\sqrt{a^2-x^2}}{2x}=$$

$$= \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} = \frac{a + \sqrt{a^2 - \left(\frac{2ab}{b^2+1}\right)^2}}{\frac{2ab}{b^2+1}} =$$

$$= \frac{a(b^2+1) + \sqrt{a^2(b^2-1)^2}}{2ab}.$$

Если $0 < b < 1$ и $a > 0$, то

$$\sqrt{a^2(b^2-1)^2} = -a(b^2-1).$$

Следовательно, данное выражение равно

$$\frac{a(b^2+1) - a(b^2-1)}{2ab} = \frac{1}{b}.$$

Если $b \geqslant 1$, то данное выражение равно

$$\frac{a(b^2+1) + a(b^2-1)}{2ab} = b.$$

2. Упростить выражение $\frac{(1-ax)\sqrt{1+bx}}{(1+ax)\sqrt{1-bx}}$ при $x = \frac{\sqrt{\frac{2a}{b} - 1}}{a}$, если $a < b < 2a$.

Из условия $x = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a}{b} - 1}$ следует $a^2x^2 = \frac{2a}{b} - 1$ или $b = \frac{2a}{1 + a^2x^2}$; поэтому

$$\frac{(1-ax)\sqrt{1+bx}}{(1+ax)\sqrt{1-bx}} = \frac{(1-ax)\sqrt{1 + \frac{2ax}{1+a^2x^2}}}{(1+ax)\sqrt{1 - \frac{2ax}{1+a^2x^2}}} =$$

$$= \frac{(1-ax)\sqrt{(1+ax)^2}}{(1+ax)\sqrt{(1-ax)^2}} = 1.$$

Так как при $a < b < 2a$ $\sqrt{\frac{2a}{b} - 1} < 1$, следовательно, $1 - ax > 0$ и $1 + ax > 0$.

§ 15. Степени с отрицательными, нулевыми и дробными показателями

Раньше мы рассматривали степени только с натуральными показателями. Возведение в n-ю степень понимали как повторение некоторого числа сомножителем n раз. С этой точки зрения выражения 10^{-2}, $3^{0,3}$, $(1 - \sqrt{3})^0$ представляются бессмысленными, ведь нельзя число взять сомножителем минус два раза, 0,3 раза, 0 раз. Однако в математике рассматривают и такие выражения, т. е. степени с любыми

рациональными и даже иррациональными показателями. Какой же смысл вкладывают в эти понятия?

Степени с отрицательным и нулевым показателями. Под степенью какого-либо отличного от нуля числа с *отрицательным показателем* понимают дробь, числитель которой равен единице, а знаменатель — степени того же числа с положительным показателем, противоположным данному отрицательному, т. е. если $a \neq 0$, то

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Примеры. $10^{-3} = 0{,}001$; $x^{-1} = \frac{1}{x}$; $(3-\sqrt{2})^{-2} = \frac{1}{(3-\sqrt{2})^2}$.

Действия над степенями с отрицательными показателями можно выполнять по тем же правилам, что и действия над степенями с положительными показателями. Равенства

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n};\quad (a^m)^n = a^{mn};\quad a^m : a^n = a^{m-n}$$

верны не только при положительных m и n, но и при отрицательных. Последнее из этих равенств теперь уже верно не только при $m > n$ (см. стр. 86), но и при $m < n$. Чтобы это равенство было справедливо при любых m и n, а также при $m = n$, вводят понятие о степени с нулевым показателем.

Под степенью любого отличного от нуля числа с *нулевым показателем* понимают единицу, т. е. если $a \neq 0$, то $a^0 = 1$

Примеры. $3^0 = 1$, $0{,}2^0 = 1$, $(\sqrt{3}-1)^0 = 1$, $(3+x^2)^0 = 1$.

Примечание. Выражение 0^0 неопределенно.

Степени с дробными показателями. Под степенью какого-либо числа a с дробным показателем $\frac{m}{n}$ понимают корень $\sqrt[n]{a^m}$, т. е.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Примеры. $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$; $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = 4$; $(9+x^2)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{9+x^2}$.

Примечание. Формулу $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ в элементарной математике обычно рассматривают только при $a \geqslant 0$, так как при отрицательных значениях a выражение $\sqrt[n]{a^m}$, а следовательно, и $a^{\frac{m}{n}}$ может не иметь значения (в множестве действительных чисел).

Дробные показатели могут быть не только положительные, но и отрицательные, т. е. любыми рациональными числами.

Действия над степенями с любыми рациональными показателями выполняют по тем же правилам, что и действия над степенями с натуральными показателями. Для любых рациональных u и v и действительного $a > 0$ верны равенства

$$a^u \cdot a^v = a^{u+v},\quad a^u : a^v = a^{u-v},\quad (a^u)^v = a^{uv}.$$

Преобразования выражений, содержащих степени с рациональными показателями. Ниже показаны некоторые наиболее часто встре-

чающиеся виды преобразований алгебраических выражений, содержащих степени с различными рациональными показателями.

Пример 1. Вычислить значения следующих выражений:

$$\left[\frac{3}{4}-\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\right]^{-1};\quad \frac{2^{-3}-\left(\frac{3}{4}\right)^{-4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{2}}{10^{-1}+\left(-\frac{1}{8}\right)^{0}}.$$

$$\left[\frac{3}{4}-\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\right]^{-1}=\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{\frac{2}{3}}\right)^{-1}=\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{2}\right)^{-1}=\left(-\frac{3}{4}\right)^{-1}=$$

$$=\frac{1}{-\frac{3}{4}}=-\frac{4}{3};$$

$$\frac{2^{-3}-\left(\frac{3}{4}\right)^{-4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{2}}{10^{-1}+\left(-\frac{1}{8}\right)^{0}}=\frac{\frac{1}{2^3}-\frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^4}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{1}{10}+1}=\frac{\frac{1}{8}-\frac{4^3}{3^4}}{1\frac{1}{10}}=\frac{\frac{1}{8}-\frac{64}{81}}{1\frac{1}{10}}=$$

$$=-\frac{431\cdot 10}{81\cdot 8\cdot 11}=-\frac{2155}{3564}.$$

Пример 2. Преобразовать следующие выражения так, чтобы они не содержали отрицательных показателей степеней:

$$\frac{5^{-1}xy^{-2}}{2^{-3}ab^{-4}},\quad \frac{5a(a-b)^{-4}}{b^{-2}(x-y)^{-2}}.$$

$$\frac{5^{-1}xy^{-2}}{2^{-3}ab^{-4}}=\frac{x\cdot 2^3b^4}{a\cdot 5y^2}=\frac{8b^4x}{5ay^2};\quad \frac{5a(a-b)^{-4}}{b^{-2}(x-y)^{-2}}=\frac{5ab^2(x-y)^2}{(a-b)^4}.$$

Пример 3. Выполнить действия

$$\left(-\frac{5a^{n+1}}{3b^n}\right)^{-2};\ (x^{-2}+a^{-3})\cdot(x^{-2}-a^{-3}).$$

$$\left(-\frac{5a^{n+1}}{3b^n}\right)^{-2}=\frac{1}{\left(-\frac{5a^{n+1}}{3b^n}\right)^2}=\frac{1}{\frac{25a^{2n+2}}{9b^{2n}}}=\frac{9b^{2n}}{25a^{2n+2}};$$

$$(x^{-2}+a^{-3})(x^{-2}-a^{-3})=(x^{-2})^2-(a^{-3})^2=x^{-4}-a^{-6}=$$

$$=\frac{1}{x^4}-\frac{1}{a^6}=\frac{a^6-x^4}{a^6x^4}.$$

Пример 4. Заменить выражениями с дробными показателями следующие радикалы:

$$\sqrt[3]{x^4};\ \sqrt[4]{a^3},\ \sqrt{(a+b)^{-1}},\ \sqrt[3]{(x-y)^{-2}}.$$

$$\sqrt[3]{x^4} = x^{\frac{4}{3}}, \quad \sqrt[4]{a^3} = a^{\frac{3}{4}}, \quad \sqrt{(a+b)^{-1}} = (a+b)^{-\frac{1}{2}},$$

$$\sqrt[3]{(x-y)^{-2}} = (x-y)^{-\frac{2}{3}}.$$

Пример 5. Заменить выражения с дробными показателями дикалами:

$$m^{-1,5}, \quad (x^2+y^2)^{\frac{3}{4}}, \quad (p+q)^{-\frac{m}{n}}.$$

$$m^{-1,5} = m^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{m^3}}; \quad (x^2+y^2)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{(x^2+y^2)^3};$$

$$(p+q)^{-\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(p+q)^{-m}}.$$

Пример 6. Упростить выражения (при $a > 1$, $x > 1$):

А. $$\left[\frac{(a-1)^{-1}}{a^{-3}} - (1-a)^{-1}\right] : \frac{a^0 + a(a-2)}{\frac{1}{a^{-2}} - a + 1} \cdot \sqrt{\frac{1}{(a+1)^{-2}}}.$$

Б. $$\left[x(1-x)^{-\frac{2}{3}} + \frac{x^2}{(1-x)^{\frac{5}{3}}}\right] : [(1-x)^{\frac{1}{3}} \cdot (1-2x+x^2)^{-1}].$$

Решение А. $$\left[\frac{(a-1)^{-1}}{a^{-3}} - (1-a)^{-1}\right] \cdot \frac{a^0 + a(a-2)}{\frac{1}{a^{-2}} - a + 1} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{1}{(a+1)^{-2}}} = \left(\frac{a^3}{a-1} - \frac{1}{1-a}\right) \cdot \frac{1 + a^2 - 2a}{a^2 - a + 1} \cdot (a+1) =$$

$$= \frac{a^3+1}{a-1} \cdot \frac{(a-1)^2}{a^2-a+1} \times (a+1) = (a+1)(a^2-1).$$

Б. $$\left[x(1-x)^{-\frac{2}{3}} + \frac{x^2}{(1-x)^{\frac{5}{3}}}\right] : [(1-x)^{\frac{1}{3}} (1-2x+x^2)^{-1}] =$$

$$= \left[\frac{x}{(1-x)^{\frac{2}{3}}} + \frac{x^2}{(1-x)^{\frac{5}{3}}}\right] : \frac{(1-x)^{\frac{1}{3}}}{(1-x)^2} =$$

$$= \frac{x}{(1-x)(1-x)^{\frac{2}{3}}} : \frac{(1-x)^{\frac{1}{3}}}{(1-x)^2} = x.$$

Уравнения и неравенства

§ 16. Общие сведения об уравнениях

Два числа или какие-нибудь выражения, соединенные знаком равенства (=), образуют *равенство*. В математике равенства употребляются в двух случаях: когда утверждают, что данные числа или выражения при таких-то значениях букв равны, и когда ставят вопрос, при каких значениях букв, входящих в выражения, эти выражения равны. В первом случае равенства называют *тождествами*, а во втором — *уравнениями*. Например, когда утверждают «при любом a действительном $a + 1 = 1 + a$», здесь равенство есть тождество; когда же ставят вопрос «при каком значении x $x + 3 = 10$?», здесь имеем уравнение.

Уравнением называют равенство, содержащее неизвестные числа, обозначенные буквами. Эти буквы, обозначающие неизвестные числа в уравнении, называются *неизвестными*. Неизвестных в уравнении может быть несколько. Например, в уравнении $2x + y = 7x - 3$ два неизвестных: x и y.

Выражения, стоящие в уравнении слева и справа от знака равенства, называют соответственно *левой и правой частями* уравнения. Так, в приведенном выше уравнении $2x + y$ — левая часть, а $7x - 3$ — правая.

Виды уравнений. Различают уравнения с одним, двумя, тремя и т. д. *неизвестными* в зависимости от того, сколько неизвестных оно содержит*. Например,

$3x - 5 = 10$ — уравнение с одним неизвестным x;

$x^2 = \sqrt{y - z}$ — уравнение с тремя неизвестными x, y и z.

В уравнении могут быть буквы, не являющиеся неизвестными *(параметры)*. Например, уравнение $ax + 3 = c$ имеет одно неизвестное x, а параметры a и c можно считать произвольными известными числами. Такие уравнения называют *буквенными*. Уравнения, которые, кроме неизвестных, не содержат никаких букв, называются *числовыми*. Числовыми являются, например, следующие уравнения:

$$2x + 3 = 7, \quad x^y = y^x.$$

По характеру операций, выполняемых над неизвестными, уравнения делятся на алгебраические, дробные, иррациональные и трансцендентные.

Обозначим левую и правую части уравнения буквами A и B. Тогда уравнение $A = B$ называется:

алгебраическим, если A и B — многочлены;

дробным (рациональным), если A и B — рациональные выражения, причем хотя бы одно из них дробное;

иррациональным, если A и B — алгебраические выражения, причем хотя бы одно из них иррациональное;

---

* В новых учебниках вместо «неизвестного» употребляют термин «переменная»; различаются уравнения с одной, двумя и т. д. переменными.

трансцендентным, если хотя бы одно из выражений A и B содержит трансцендентные* операции над неизвестными.

Уравнения

$2x^2 + 3 = 7x$ и $ax + by = c$ — алгебраические;

$x^2 + \frac{1}{x} = \frac{3}{1-x}$ и $\frac{a}{x-1} + x^2 = \frac{x-1}{c}$ — дробные;

$\sqrt{3-x} = 5$ и $\sqrt{a+x} + \sqrt{x^2-1} = 0$ — иррациональные;

$x^y = \log_y x$ и $\sin x - \operatorname{tg} x = 0$ — трансцендентные.

Алгебраические уравнения бывают *первой, второй, третьей* и т. д. степени в зависимости от степеней многочленов A и B. Например,

$3x = 2(x-5) + 1$ — уравнение первой степени;
$0{,}5x^2 - 3{,}2x = 0$ — уравнение второй степени;
$7xy + x - y = 5$ — тоже уравнение второй степени,

так как сумма показателей при неизвестных в первом члене $7xy$ равна 2.

Алгебраическое уравнение вида $ax + by + cz = d$ называют также *линейным* уравнением, а уравнения второй и выше степеней называют *нелинейными*.

Решения уравнений. Если в уравнение с одним неизвестным вместо неизвестных подставить какое-нибудь число, выраженное цифрами или буквами, и в результате получится, что левая часть тождественно равна правой, то говорят, что данное число (значение неизвестного) *удовлетворяет* уравнению. В противном случае говорят, что оно *не удовлетворяет* уравнению. Значение неизвестного, удовлетворяющее уравнению, называется *решением, или корнем*, уравнения.

Например, если в уравнение $3x + 7 = 13$ вместо неизвестного x подставить число 2, получим тождество $3 \cdot 2 + 7 = 13$. Следовательно, значение $x = 2$ удовлетворяет данному уравнению, число 2 есть решение, или корень, этого уравнения. А значение $x=3$ не удовлетворяет этому уравнению, так как $3 \cdot 3 + 7 \neq 13$.

Уравнение $2x + c = 3$ с неизвестным x имеет решение $x = 0{,}5(3 - c)$, так как $0{,}5(3 - c) \cdot 2 + c = 3$ — тождество.

Решением уравнения с несколькими неизвестными называют систему значений всех неизвестных, удовлетворяющих данному уравнению. Пусть, например, имеем уравнение с двумя неизвестными.

$$x^2 + 2y = 7.$$

Пара значений $x = 1$, $y = 3$ удовлетворяет этому уравнению, так как $1^2 + 2 \cdot 3 = 7$. Эта пара чисел считается *одним решением* данного уравнения (в таких случаях слово «корень» не употребляют). Существуют и другие решения этого уравнения, например $x = -1$, $y = 3$; $x = 3$, $y = -1$ и т. д.

Уравнение может не иметь совсем решений, может иметь единственное решение, несколько решений и бесконечное множество решений.

Примеры. Уравнение $x + 8 = x + 5$ не имеет решений, так как при любых действительных значениях x левая часть больше правой;

---

* Трансцендентными называют неалгебраические операции, например возведение в степень с иррациональным показателем, логарифмирование, вычисление значений тригонометрических функций и т. п.

уравнение $3x + 2 = 11$ имеет единственный корень $x + 3$; уравнение $x + \frac{12}{x} = 7$ имеет два корня: 3 и 4 $\left(\text{так как } 3 + \frac{12}{3} = 7;\ 4 + \frac{12}{4} = 7\right)$;

уравнение $5(x - 3) + 2 = 3(x - 4) + 2x - 1$ удовлетворяется при любом значении x, т. е. является тождеством. Приведенное выше уравнение $x^2 + 2y = 7$ также имеет бесконечное множество решений, но не является тождеством.

Равносильные уравнения. Два уравнения называются *равносильными* (или эквивалентными), если все решения первого уравнения являются решениями второго и, наоборот, все решения второго уравнения являются решениями первого. К равносильным уравнениям относятся также уравнения, не имеющие решений.

Примеры. Уравнения $2x - 5 = 11$ и $7x + 6 = 62$ равносильны, так как они имеют один и тот же корень $x = 8$;

уравнения $x^2 + y + 1 = 8 - y$ и $x^2 + 2y = 7$ равносильны, так как каждое решение первого удовлетворяет второе и любое решение второго удовлетворяет первое уравнение;

уравнения $x + 2 = x + 5$ и $2x + 7 = 2x$ равносильны, потому что оба не имеют решений;

уравнения $x + 2 = 2(x + 1) - x$ и $3x = 3(x - 1) + 3$ равносильны, поскольку любое значение x удовлетворяет и первое и второе уравнения.

Примечание. Согласно приведенному выше определению, уравнения

$$x^2 - 14x + 49 = 0 \text{ и } x - 7 = 0$$

равносильны, так как каждый корень одного уравнения удовлетворяет также другое уравнение, и наоборот. Однако многие авторы считают их неравносильными, так как они имеют разное число корней: считают, что уравнение второй степени $x^2 - 14x + 49 = 0$ имеет два одинаковых корня: $x_1 = 7$; $x_2 = 7$, а уравнение первой степени $x - 7 = 0$ имеет только один корень: $x_1 = 7$.

Понятие об эквивалентности уравнений является относительным: два уравнения, рассматриваемые в одной области чисел, могут быть эквивалентными, в другой же области — неэквивалентными. Например, $(x - 2)(x^2 + 1) = 0$, $(x - 2)(x^2 + 4) = 0$.

В области действительных чисел данные уравнения эквивалентны, в области комплексных чисел — неэквивалентны.

Два уравнения, равносильные третьему, равносильны между собой.

Теоремы о равносильных уравнениях.

Теорема 1. *К обеим частям уравнения можно прибавить любое выражение, имеющее смысл при всех допустимых значениях неизвестного; полученное уравнение будет равносильно данному.*

В частности, если к обеим частям уравнения прибавить одно и то же число или многочлен, то новое уравнение будет равносильно данному.

Так, уравнение $2x - 1 = 7$ имеет корень $x = 4$; прибавив к обеим частям по 5, получим уравнение $2x + 4 = 12$, которое имеет тот же корень $x = 4$.

Следствия из первой теоремы:

1. Если в обеих частях уравнения имеются одинаковые члены, то их можно опустить.

Так, уравнение $9x + 5x = 18 + 5x$ имеет один корень $x = 2$; опустив в обеих частях $5x$, получим уравнение $9x = 18$, которое имеет тот же корень $x = 2$.

2. Любой член уравнения можно перенести из одной части уравнения в другую, переменив его знак на противоположный.

Так, уравнение $7x - 11 = 3$ имеет один корень $x = 2$. Если перенести 11 в правую часть с противоположным знаком, получим уравнение $7x = 3 + 11$, которое имеет то же решение $x = 2$.

Теорема 2. *Обе части уравнения можно умножить на любое выражение, имеющее смысл и отличное от нуля при всех допустимых значениях неизвестного, полученное уравнение будет равносильно данному.*

В частности, если обе части уравнения умножить на одно и то же число, не равное нулю, то получим уравнение, равносильное данному.

Пример. Уравнение $2x - 15 = 10 - 3x$ имеет корень $x = 5$. Умножив обе части на 3, получим уравнение

$$(2x - 15) \cdot 3 = (10 - 3x) \cdot 3, \text{ или } 6x - 45 = 30 - 9x,$$

которое имеет тот же корень $x = 5$.

Деление на какое-либо число, отличное от нуля, можно рассматривать как умножение на число, ему обратное. Поэтому обе части уравнения можно также и разделить на одно и то же число, отличное от нуля.

Пример. Уравнение $12x^2 - 3 = 6x + 33$ имеет два корня: $x_1 = 2$ и $x_2 = -1{,}5$.

Разделив все его члены на 3, получим уравнение $4x^2 - 1 = 2x + 11$, равносильное данному, так как оно имеет те же два корня: $x_1 = 2$ и $x_2 = -1{,}5$.

Следствия из второй теоремы: 1. Знаки всех членов уравнения можно изменить на противоположные (это равносильно умножению обеих частей уравнения на -1).

Пример. Уравнение $-3x + 7 = -8$ после умножения обеих частей на -1 примет вид $3x - 7 = 8$. Первое и второе уравнения имеют единственный корень $x = 5$.

2. Уравнение, в котором коэффициенты всех или некоторых членов дробные числа, можно заменить равносильным ему уравнением с целыми коэффициентами (для этого обе части уравнения надо умножить на наименьшее общее кратное знаменателей дробных коэффициентов).

Пример. Уравнение $\frac{5x - 4}{2} = \frac{16x + 1}{7}$ после умножения обеих его частей на 14 принимает вид:

$$\frac{5x - 4}{2} \cdot 14 = \frac{16x + 1}{7} \cdot 14; \quad (5x - 4) \cdot 7 = (16x + 1) \cdot 2;$$

$$35x - 28 = 32x + 2.$$

Легко убедиться в том, что первое и последнее уравнения удовлетворяются только при $x = 10$.

3. Уравнение можно сократить (разделить все его члены на одно и то же число).

Пример. Уравнение $75x^2 - 200x = 900 + 60x^2 - 50x$ можно сократить на 5. Тогда получим уравнение $15x^2 - 40x = 180 + 12x^2 - 10x$, равносильное данному.

Примечание. Иногда приходится умножать обе части уравнения на какое-нибудь выражение, содержащее неизвестное. В результате этого может получиться уравнение, не равносильное данному.

Пример. Пусть дано уравнение $2x - 1 = 5$, имеющее один корень $x = 3$. Если умножить обе части этого уравнения на $x - 2$, получим новое уравнение $(2x - 1)(x - 2) = 5(x - 2)$, не равносильное данному, так как, кроме корня $x = 3$, оно имеет еще один $x = 2$, не удовлетворяющий данному уравнению. Если бы умножили на $\frac{1}{x-3}$, то получили бы уравнение $\frac{2x-1}{x-3} = \frac{5}{x-3}$, которое вообще не имеет корней и, следовательно, тоже не равносильное данному.

Рассмотренные теоремы (их называют также свойствами уравнений) и следствия из них дают возможность сравнительно легко решать многие уравнения. Преобразуя уравнение согласно упомянутым свойствам и следствиям, мы каждый раз получаем новое, более простое уравнение, равносильное данному. Таким способом можно прийти к очень простому уравнению, корни которого определить нетрудно. А так как полученное уравнение равносильно данному, то и корни его есть не что иное как корни данного уравнения.

§ 17. Уравнения первой степени

Уравнение с одним неизвестным, которое после раскрытия скобок и приведения подобных членов принимает вид $ax + b = 0$, где $a \neq 0$ и b — произвольные числа, а x — неизвестное, называется *уравнением первой степени с одним неизвестным*.

Уравнение вида $ax + b = 0$ при $a \neq 0$ называется *нормальным видом* уравнения первой степени с одним неизвестным.

Уравнение с одним неизвестным, которое после раскрытия скобок и приведения подобных членов принимает вид $ax + b = 0$, где a и b — произвольные числа, называется *линейным уравнением с одним неизвестным*.

Каждое уравнение первой степени — линейное, но не каждое линейное уравнение есть уравнение первой степени. Например, все уравнения

$$2x + 3 = 7 - 0{,}5x, \quad 0{,}3y = 0, \quad \frac{x}{2} + 3 = \frac{1}{2}(x - 2)$$

линейные, но только два первых являются уравнениями первой степени. Уравнение первой степени с одним неизвестным всегда имеет одно решение; линейное уравнение может не иметь решений ($0x = 5$) или иметь их бесконечное множество ($0x = 0$).

Общая схема решения уравнений первой степени. Пусть надо решить уравнение

$$\frac{x-4}{3} + \frac{2(x+1)}{4} - 1 = \frac{5(x-3)}{2} + 2x - \frac{11x+43}{6}.$$

1. Умножим все члены на наименьшее общее кратное знаменателей, равное 12. После сокращения получим

$$4(x - 4) + 6(x + 1) - 12 = 30(x - 3) + 24x - 2(11x + 43).$$

2. Чтобы отделить члены, содержащие неизвестное и свободные члены, раскроем скобки:

$$4x - 16 + 6x + 6 - 12 = 30x - 90 + 24x - 22x - 86.$$

3. Сгруппируем в одной части члены, содержащие неизвестные, а в другой — свободные члены:

$$4x + 6x - 30x - 24x + 22x = -90 - 86 + 16 - 6 + 12.$$

4. Приведем подобные члены: $-22x = -154$.

5. Разделим обе части на -22. Получим $x = 7$.

Как видим, корень полученного уравнения, а значит и данного, равен $x = 7$.

Вообще такие уравнения можно решать по следующей схеме:

а) привести уравнение к целому виду;

б) раскрыть скобки;

в) сгруппировать члены, содержащие неизвестное, в одной части уравнения, а свободные члены — в другой;

г) привести подобные члены;

д) решить уравнение вида $ax = b$, которое получили после приведения подобных членов.

Однако эта схема не обязательна для всякого уравнения. Во-первых, при решении многих более простых уравнений приходится начинать не с первого, а со второго, третьего и даже сразу с пятого этапа. Во-вторых, некоторые промежуточные этапы могут оказаться ненужными. В третьих, иногда бывает выгодиее для простоты решения нарушить порядок, указываемый схемой.

Аналогично можно решать уравнения первой степени с одним неизвестным с буквенными коэффициентами.

Пример 1. $cx - b(c - x) = a(b - x) - b(a - x)$;

$$cx - bc + bx = ab - ax - ab + bx;$$

$$cx - bc = -ax;$$

$$cx + ax = bc;\ x(a + c) = bc;$$

$$x = \frac{bc}{a + c} \text{ (если } a \neq -c).$$

Пример 2. $\frac{a - x}{b - a} + \frac{3x}{a + b} = \frac{3a^2 - ab - 4b^2}{a^2 - b^2}$;

$$-\frac{a - x}{a - b} + \frac{3x}{a + b} = \frac{3a^2 - ab - 4b^2}{a^2 - b^2};$$

$$-(a - x)(a + b) + 3x(a - b) = 3a^2 - ab - 4b^2;$$

$$-a^2 - ab + ax + bx + 3ax - 3bx = 3a^2 - ab - 4b^2;$$

$$4ax - 2bx = 4a^2 - 4b^2;\ 2x(2a - b) = 4(a^2 - b^2);$$

$$x = \frac{4(a^2 - b^2)}{2(2a - b)};\ x = \frac{2(a^2 - b^2)}{2a - b} \text{ (если } 2a \neq b \text{ и } a \neq \pm b).$$

Уравнения, содержащие неизвестное в знаменателе. К уравнениям первой степени приводятся многие дробные уравнения с одним неизвестным. Чтобы решить такое уравнение, часто приходится умножать обе части на выражение, содержащее неизвестное, а это, как показано на стр. 123, может привести к нарушению эквивалентности уравнений.

Поэтому при решении этих уравнений надо все полученные корни проверять подстановкой в начальное уравнение. Корни, не удовлетворяющие начальному уравнению, надо отбросить как посторонние.

Пример 1. Решить уравнение $\frac{2}{x-1}+\frac{5}{x+2}=\frac{13}{x^2+x-2}$

Разлагая x^2+x-2 на множители, получаем $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$. Следовательно, x^2+x-2 — общий знаменатель дробей. Тогда дополнительными множителями будут соответственно $x+2$, $x-1$, 1.

$$\frac{\overset{x+2}{2}}{x-1}+\frac{\overset{x-1}{5}}{x+2}=\frac{\overset{1}{13}}{x^2+x-2};$$

$$\frac{2(x+2)}{(x-1)(x+2)}+\frac{5(x-1)}{(x-1)(x+2)}=\frac{13}{(x-1)(x+2)}.$$

Для упрощения уравнения надо обе части его умножить на $(x-1)\times(x+2)$; получим

$$2(x+2)+5(x-1)=13;$$
$$2x+4+5x-5=13;$$
$$7x=13-4+5;$$
$$7x=14;\quad x=2.$$

Проверка. $\frac{2}{2-1}+\frac{5}{2+2}=\frac{13}{4+2-2}$; $2+\frac{5}{4}=\frac{13}{4}$; $\frac{13}{4}=\frac{13}{4}$.

$x=2$ удовлетворяет данному уравнению.

Ответ. $x=2$.

Пример 2. Решить уравнение

$$\frac{2}{x-1}+\frac{5}{x+2}=\frac{6}{x^2+x-2}. \qquad (1)$$

Общий знаменатель: x^2+x-2; дополнительные множители: $x+2$, $x-1$, 1.

$$\frac{\overset{x+2}{2}}{x-1}+\frac{\overset{x-1}{5}}{x+2}=\frac{\overset{1}{6}}{x^2+x-2}; \qquad (2)$$

$$\frac{2(x+2)}{(x-1)(x+2)}+\frac{5(x-1)}{(x-1)(x+2)}=\frac{6}{(x-1)(x+2)}.$$

Умножаем обе части уравнения на $(x-1)(x+2)$, получаем

$$2(x+2)+5(x-1)=6;$$
$$2x+4+5x-5=6; \qquad (3)$$
$$7x=7;$$
$$x=1.$$

Уравнение (3) имеет корень $x=1$. Но он является посторонним для данного уравнения, так как 1 не может быть допустимым значением для x: при $x=1$ знаменатель первой и третьей дроби уравнения (1) обращается в нуль. Эквивалентность нарушилась при переходе от уравнения (2) к уравнению (3).

Ответ. Данное уравнение не имеет решений.

§ 18. Решение задач с помощью уравнений первой степени с одним неизвестным

Чтобы решить задачу с помощью уравнения, необходимо:

1) выбрать неизвестное и обозначить его буквой; 2) выразить остальные неизвестные в задаче значения величин при помощи этой буквы; 3) составить уравнение; 4) решить уравнение; 5) проверить полученное решение и ответ по условию задачи. Дальше в качестве иллюстрации приведены решения нескольких задач с помощью составления уравнений первой степени.

З а д а ч а 1. На первом складе было 185 *т* угля, а на втором — 237 *т*. Первый склад начал отпускать ежедневно по 15 *т* угля, а второй — по 18 *т*. Через сколько дней на втором складе будет угля в полтора раза больше, чем на первом?

Предположим, что через x дней на втором складе будет угля в полтора раза больше, чем на первом. Первый склад отпускал ежедневно по 15 *т* угля, поэтому за x дней с первого склада было выдано угля $15x$ (*т*). Значит, на первом складе осталось угля $185 - 15x$ (*т*). Второй склад отпускал ежедневно по 18 *т*, поэтому за x дней со второго склада было выдано угля $18x$ (*т*). На втором складе осталось угля $237 - 18x$ (*т*). По условию задачи, остаток угля на втором складе в полтора раза больше, чем на первом.

Составляем уравнение $237 - 18x = \frac{3}{2}(185 - 15x)$, $2(237 - 18x) = 3(185 - 15x)$, откуда

$$474 - 36x = 555 - 45x;\ -36x + 45x = 555 - 474;\ 9x = 81;\ x = 9.$$

П р о в е р к а. 1) За 9 дней было выдано угля: с первого склада $15 \cdot 9 = 135$ (*т*); со второго склада $18 \cdot 9 = 162$ (*т*); 2) осталось угля на первом складе $185 - 135 = 50$ (*т*); на втором складе $237 - 162 = 75$ (*т*); остаток угля на втором складе в полтора раза больше, чем на первом. Задача решена верно.

О т в е т. 9 дней.

З а д а ч а 2. Сумма цифр двузначного числа равна 11. Если к этому числу прибавить 63, то получится число, обозначенное теми же цифрами, но написанное в обратном порядке. Найти это число.

Обозначим число единиц в искомом числе x, тогда число десятков будет $11 - x$; искомое число примет вид $(11 - x)10 + x$. Число, записанное теми же цифрами в обратном порядке, будет $10x + (11 - x)$.

Составим уравнение $(11 - x)10 + x + 63 = 10x + 11 - x$, решение которого $x = 9$ даст единицы искомого числа. Число десятков составит $11 - x = 2$. Искомое число: 29.

О т в е т. 29.

З а д а ч а 3. За 7 *ч* работы токарь должен был по норме обточить некоторое количество деталей. Применив новый резец, токарь стал в каждый час обтачивать на 4 детали больше, чем полагалось в 1 *ч* по норме, а потому за 6 *ч* работы выполнил 1,2 дневной нормы. Сколько деталей в час обтачивает токарь, применяя новый резец?

Обозначим количество деталей, обрабатываемых токарем в 1 *ч*, буквой x. Тогда его дневная норма при семичасовом рабочем дне будет $7x$. С применением нового резца он обрабатывает за 1 *ч* $x + 4$ деталей, за 6 *ч* работы он обрабатывает $6(x + 4)$.

Составим уравнение: $6(x+4) = 1{,}2 \cdot 7x$; $x = 10$; $x + 4 = 14$.

Ответ. 14 деталей.

Задача 4. Одной автомашиной можно перевезти некоторый груз за 18 *ч*, а второй — за 24 *ч*. Перевозку груза начали двумя машинами одновременно. Через несколько часов вторую машину перевели на другую работу, а остаток груза перевозили только первой автомашиной в течение 4 *ч*. Сколько часов работала первая автомашина?

Обозначим буквой x время, в течение которого работала вторая автомашина; x есть также время, в течение которого работали обе машины одновременно. За 1 *ч* первой машиной можно перевезти $\frac{1}{18}$ часть груза, а второй — $\frac{1}{24}$. Двумя машинами за 1 *ч* перевезли $\left(\frac{1}{18}+\frac{1}{24}\right)$ часть груза, а за x часов $\left(\frac{1}{18}+\frac{1}{24}\right)x$ — часть груза. Первая машина перевезла оставшийся груз за 4 *ч*, следовательно, за это время она перевезла $\frac{1}{18} \cdot 4 = \frac{2}{9}$ части груза.

Учитывая, что весь груз составляет условную единицу, получим уравнение

$$\left(\frac{1}{18}+\frac{1}{24}\right)x + \frac{2}{9} = 1.$$

Решение уравнения $x = 8$(*ч*) дает время совместной работы обеих машин. Тогда первая машина работала $8 + 4 = 12$ (*ч*).

Ответ. 12 *ч*.

Задача 5. Ежедневно в 12 *ч* дня от пристани A к пристани B отправляется по реке пассажирский катер. Весь путь от A до B катер проходит без остановки со скоростью 12 *км/ч*. Затратив на стоянку у пристани B 2,5 *ч*, катер отправляется обратно и, пройдя весь путь без остановки со скоростью 15 *км/ч*, прибывает к пристани A в 19 *ч* того же дня. Найти расстояние от A до B.

Пусть расстояние от A до B равно x километров. Тогда время движения катера от A к B будет $\frac{x}{12}$ часов, а от B к A $\frac{x}{15}$ часов. Катер возвратился в пункт A через $19 - 12 = 7$ *ч*, из них 2,5 *ч* — стоянка, поэтому он был в пути $7 - 2{,}5 = 4{,}5$ *ч*. Отсюда получаем уравнение

$$\frac{x}{12}+\frac{x}{15} = 4{,}5,$$

решение которого $x = 30$ (*км*) дает искомое расстояние.

Ответ. Расстояние между A и B 30 *км*.

Задача 6. Кусок железа и кусок меди весят вместе 1280 *г*, причем объем куска меди вдвое больше объема куска железа. Найти объем каждого куска, если удельный вес железа 7,8 *г/см*^{3}, а удельный вес меди 8,9 *г/см*^{3}.

Обозначим объем (в кубических сантиметрах) куска железа через x, тогда объем куска меди равен $2x$. Вес железа $x \cdot 7{,}8$, а меди $2x \cdot 8{,}9$.

Составим уравнение: $7{,}8x + 17{,}8x = 1280$. Его решение $x = 50$ дает объем куска железа. Тогда объем куска меди равен 100 *куб. см*.

Ответ. 50 *куб. см* и 100 *куб. см*.

Задача 7. Имеются два сплава золота и серебра; в одном количество этих металлов находится в отношении 2 : 3, в другом — в отношении 3 : 7. Сколько нужно взять каждого сплава, чтобы получить 8 *кг* нового сплава, в котором золото и серебро были бы в отношении 5 : 11?

Обозначим буквой x вес первого сплава в килограммах, тогда вес второго будет $(8 - x)$. Золота в первом сплаве содержится $\frac{2}{5}x$ и серебра $\frac{3}{5}x$ килограмма. В $(8 - x)$ килограммах второго сплава содержится $\frac{3}{10}(8 - x)$ золота и $\frac{7}{10}(8 - x)$ серебра.

Составив уравнение по условию задачи, получим

$$\left[\frac{2}{5}x + \frac{3}{10}(8 - x)\right] : \left[\frac{3}{5}x + \frac{7}{10}(8 - x)\right] = 5 : 11.$$

Его решение $x = 1$ (*кг*) дает вес первого сплава. Вес второго сплава $8 - x = 7$ (*кг*).

Ответ. 1 *кг* и 7 *кг*.

§ 19. Системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными

Уравнение с двумя неизвестными, которое после раскрытия скобок и приведения подобных членов принимает вид $ax + by = c$, где a и b отличные от нуля числа, называется *уравнением первой степени с двумя неизвестными*.

Примеры таких уравнений:

$$5x - 2x + 3 = 2x + y - 1;$$

$$8x - 1{,}3y = 15;\ \frac{2}{5}x + 0{,}7y = 3{,}4;\ y = 4x - 9.$$

Любая пара допустимых значений x и y, удовлетворяющих уравнению, называется решением этого уравнения. Так, например, значения $x = 1$, $y = 14$ или $x = 2$, $y = 13$ будут решениями уравнения $x + y = 15$.

Одно уравнение с двумя неизвестными первой степени имеет бесконечное множество решений. Так, в уравнении $x + y = 15$ неизвестное x может принимать любые значения, и для каждого из них имеется соответствующее значение y, например:

$x_1 = 1$, $y_1 = 14$; $x_2 = 2$, $y_2 = 13$; $x_3 = 100$, $y_3 = -85$ и т. д.

Уравнение с двумя неизвестными, которое после раскрытия скобок и приведения подобных членов принимает вид $ax + by = c$, где a и b — произвольные числа (не обязательно отличные от нуля), называется *линейным уравнением с двумя неизвестными*. Такое уравнение может не иметь решений ($0x + 0y = 5$).

Для уравнения первой степени с двумя неизвестными имеют место те же свойства, что и для уравнения с одним неизвестным (стр. 121). Используя их, каждое такое уравнение можно привести к нормальному виду (т. е. к виду $ax + by = c$).

Пример. $\overset{12}{7} + \overset{3}{\frac{x-3y}{4}} = \overset{12}{2x} - \overset{4}{\frac{y+5}{3}}$;

$$84 + 3(x - 3y) = 24x - 4(y + 5);$$
$$84 + 3x - 9y = 24x - 4y - 20;$$
$$3x - 9y - 24x + 4y = -20 - 84;$$
$$-21x - 5y = -104 \text{ или } 21x + 5y = 104.$$

Если находят общие решения двух или нескольких уравнений, то говорят, что эти уравнения образуют *систему*. В системе уравнений каждое неизвестное означает одно и то же число во всех уравнениях.

Чтобы показать, что данные уравнения образуют систему, их обычно записывают одно под другим и объединяют фигурной скобкой, например

$$\begin{cases} x + y = 20, \\ x - y = 10. \end{cases}$$

Каждая пара значений неизвестных, которая одновременно удовлетворяет обоим уравнениям системы, называется *решением системы*. Например, приведенную выше систему уравнений удовлетворяет пара чисел $x = 15$, $y = 5$. Это и есть решение данной системы. Других решений она не имеет. Существуют системы уравнений, имеющие бесконечное множество решений, а также системы, вовсе не имеющие решений. Система, не имеющая решений, называется *несовместимой*.

Примечание. Называть решение системы корнями нельзя.

Решить систему — это значит найти все решения этой системы или показать, что она не имеет их.

Две системы уравнений называются *равносильными* (*эквивалентными*), если все решения одной из них являются решениями другой и наоборот, все решения другой системы являются решениями первой. Например, решением системы

$$\begin{cases} 2x + y = 11, \\ 3x - y = 9 \end{cases}$$

является пара чисел: $x = 4$ и $y = 3$. Эти же числа являются также единственным решением системы

$$\begin{cases} 5x - 3y = 11, \\ x + 8y = 28. \end{cases}$$

Следовательно, рассматриваемые системы уравнений равносильны.

Две несовместимые системы уравнений также считаются равносильными. Две равносильные системы уравнений могут состоять из одинакового и разного количества уравнений. В частности, система уравнений может быть равносильна одному уравнению. Понятие равносильности систем уравнений является относительным: две системы уравнений равносильны в одном числовом множестве и не равносильны — в другом.

Наиболее важным приемом решения систем уравнений является переход от данной системы к другой, равносильной данной, но более

простой. Поэтому важно знать приемы получения новых систем уравнений, равносильных данной. В основе этих приемов лежат следующие теоремы.

Теоремы о равносильности систем уравнений первой степени.

Теорема 1. *Любое из уравнений системы можно заменить равносильным ему уравнением; полученная в результате этого система равносильна данной.*

Например, если в системе

$$\begin{cases} 2x - 3y = 4, \\ 3x + 2y = 19 \end{cases}$$

заменить второе уравнение равносильным ему уравнением $9x + 6y = 57$, получим новую систему

$$\begin{cases} 2x - 3y = 4, \\ 9x + 6y = 57, \end{cases}$$

равносильную данной.

Теорема 2. *Любое из уравнений системы можно заменить уравнением, полученным в результате алгебраического сложения обоих уравнений системы. Новая система равносильна данной.*

Например, если первое уравнение в приведенной выше системе заменить таким образом, получим новую систему

$$\begin{cases} 5x - y = 23, \\ 3x + 2y = 19, \end{cases}$$

равносильную данной.

Теорема 3. *Можно из одного уравнения системы выразить какое-нибудь неизвестное через другое и подставить это выражение во второе уравнение. Новое уравнение вместе с первым образует систему, равносильную данной.*

Пусть, например, дана система

$$\begin{cases} 2x + 3y = 33, \\ x - 2y = 1. \end{cases}$$

Выразим неизвестное x через y из второго уравнения: $x = 2y + 1$; подставив это выражение в первое уравнение, получим

$$2(2y + 1) + 3y = 33.$$

Если к этому уравнению с одним неизвестным присоединить второе уравнение системы, получим новую систему

$$\begin{cases} 2(2y + 1) + 3y = 33, \\ x - 2y = 1, \end{cases}$$

равносильную данной.

На приведенных выше теоремах основаны различные способы решений систем уравнений.

Решение систем уравнений способом алгебраического сложения. Если коэффициенты при каком-нибудь неизвестном в обоих уравнениях равны по абсолютной величине, то, складывая оба уравнения (или вычитая одно из другого), можно получить уравнение с одним неизвестным. Решая это уравнение, определяют одно неизвестное, а подставляя его в одно из уравнений системы, находят второе неизвестное.

Пример 1. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x + y = 11, \\ 3x - y = 9. \end{cases}$

Здесь коэффициенты при y по абсолютному значению равны между собой, но противоположны по знаку. Для получения уравнения с одним неизвестным уравнения системы почленно складываем:

$$\begin{cases} 2x + y = 11 \\ 3x - y = 9 \end{cases}$$
$$5x = 20;\ x = 4.$$

Полученное значение $x = 4$ подставляем в какое-нибудь уравнение системы (например, в первое) и находим значение y:

$$2 \cdot 4 + y = 11,\ y = 11 - 8,\ y = 3.$$

Следовательно, система имеет решение: $x=4$, $y=3$.

Если коэффициенты при неизвестных в уравнениях системы разные по абсолютной величине, то в этом случае уравнивают абсолютные величины коэффициентов при одном из неизвестных, а затем поступают так же, как и в первом случае.

Пример 3. Решить систему уравнений $\begin{cases} 4x + 3y = -4, \\ 6x + 5y = -7. \end{cases}$

Уравняем коэффициенты при x. Для этого умножим первое уравнение на 3, а второе на -2 и сложим полученные уравнения. Решение можно записать так:

$$\begin{array}{l|c|l} 4x + 3y = -4 & 3 & 12x + 9y = -12 \\ 6x + 5y = -7 & -2 & -12x - 10y = 14 \\ \hline & & -y = 2 \\ & & y = -2 \end{array}$$

$$4x + 3 \cdot (-2) = -4,\ 4x = 2,\ x = \frac{1}{2}.$$

Ответ. $x = \frac{1}{2}$, $y = -2$.

Аналогично можно решать и системы уравнений с буквенными коэффициентами.

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} ax - by = a^2 + b^2, \\ x + y = 2a \end{cases} \qquad (a + b \neq 0).$$

$$\begin{array}{l|c|l} ax - by = a^2 + b^2 & b & ax - by = a^2 + b^2 \\ x + y = 2a & & bx + by = 2ab \\ \hline & & x(a + b) = (a + b)^2 \\ & & x = a + b^* \end{array}$$

$$a + b + y = 2a;$$
$$y = a - b.$$

Ответ. $x = a + b$, $y = a - b$.

Решение систем способом подстановки. Если из одного уравнения системы какое-либо из неизвестных выразить через второе и подста-

---

Если бы в условии не было отмечено, что $a+b\neq 0$, тогда следовало бы этот случай рассматривать отдельно. При $a+b=0$ полученное уравнение удовлетворяет любому значению x. В этом случае система имела бы бесконечное множество решений: x — любое число, $y=2a-x$.

вить это выражение во второе уравнение, то получим уравнение с одним неизвестным. Из этого уравнения можно найти значение одного неизвестного, а из полученного выражения — второго.

Пример. Решить систему уравнений $\begin{cases} 3x - 2y = 11, \\ 4x - 5y = 3. \end{cases}$

Из первого уравнения находим

$$x = \frac{11 + 2y}{3}.$$

Подставив это значение во второе уравнение, получим уравнение с одним неизвестным

$$4 \cdot \frac{11 + 2y}{3} - 5y = 3,4\,(11 + 2y) - 15y = 9,\ 44 + 8y - 15y = 9;$$

$$-7y = -35;\ y = 5.$$

Подставив $y = 5$ в выражение для x, получим

$$x = \frac{11 + 2 \cdot 5}{3};\ x = 7.$$

Система имеет решение: $x=7$, $y=5$.

Некоторым видоизменением этого способа является способ сравнивания неизвестных. Чтобы решить систему этим способом, надо в каждом уравнении одно и то же неизвестное выразить через второе. Полученные таким образом разные выражения для неизвестного сравнивают и получают уравнение с одним неизвестным. Решив это уравнение, находят значение одного неизвестного, затем второго.

Пример. Решить систему уравнений $\begin{cases} 5x + 6y = 13, \\ 7x + 18y = -1. \end{cases}$

Из двух уравнений выражаем x через y:

$$x = \frac{13 - 6y}{5};\ x = \frac{-1 - 18y}{7}.$$

Сравнивая эти выражения, получаем уравнение с одним неизвестным y

$$\frac{13 - 6y}{5} = \frac{-1 - 18y}{7}.$$

Решаем это уравнение:

$$7(13 - 6y) = -5(1 + 18y);\ 91 - 42y = -5 - 90y;\ 48y = -96;$$
$$y = -2.$$

Неизвестное x найдем, подставив значение y в одно из выражений для x:

$$x = \frac{13 - (-2) \cdot 6}{5} = 5.$$

Таким образом, система имеет решение: $x = 5$, $y = -2$.

Способ замены. К системам двух линейных уравнений с двумя неизвестными можно приводить некоторые нелинейные системы. Это можно осуществлять способом замены.

Пусть, например, надо решить систему

$$\begin{cases} \dfrac{15}{x} - \dfrac{7}{y} = 9; \\ \dfrac{4}{x} + \dfrac{9}{y} = 35. \end{cases}$$

Заменим неизвестные, положив $\dfrac{1}{x} = u$, $\dfrac{1}{y} = v$; получим линейную систему

$$\begin{cases} 15u - 7v = 9; \\ 4u + 9v = 35, \end{cases}$$

которая имеет решение: $u = 2$, $v = 3$. Из соотношений

$\dfrac{1}{x} = 2$, $\dfrac{1}{y} = 3$ находим $x = \dfrac{1}{2}$, $y = \dfrac{1}{3}$.

Решение системы при помощи определителей. Решения системы вида

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

можно находить по формулам

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Формулы легко запомнить, если ввести следующие обозначения. Условимся выражение $ps - rq$ обозначать так: $\begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix}$. Это выражение называют *определителем*, или *детерминантом*, второго порядка.

Итак,

$$\begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} = ps - rq.$$

Пример.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 1.$$

С помощью определителей решение системы $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$ можно представить в удобном для запоминания виде:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

Знаменатель здесь общий. Его называют *определителем системы* и обозначают

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Если определитель системы не равен нулю, то система имеет единственное решение: значение неизвестного равно дроби, знаменатель которой является определителем системы, а числитель — определителем, получающимся из определителя системы заменой коэффициентов при этом неизвестном свободными членами *(правило Крамера)*.

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ x + 2y = 3. \end{cases}$$

Составляем определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - (-1) \cdot 1 = 3.$$

Применяем правило Крамера (так как $\Delta \neq 0$):

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{3} = \frac{2+3}{3} = \frac{5}{3}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{3} = \frac{3-1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Исследование системы уравнений. Исследуем, сколько решений может иметь система уравнений

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1, \\ a_2 x + b_2 y = c_2. \end{cases}$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \Delta, \quad \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \Delta_1, \quad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = \Delta_2.$$

Возможны следующие случаи:

1. $\Delta \neq 0$. Система в этом случае имеет единственное решение.

2. $\Delta = 0$ и по крайней мере один из определителей Δ_1 и Δ_2 отличен от нуля. Система не имеет решений.

3. $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$ и по крайней мере один из коэффициентов при неизвестных отличен от нуля. Система в этом случае имеет бесконечное множество решений.

Примеры последних двух случаев дают системы уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4, \\ 4x + 6y = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 1, \\ 2x + 2y = 2. \end{cases}$$

4. Все коэффициенты при неизвестных равны нулю. Если хотя бы один из свободных членов c_1 и c_2 отличен от нуля, то система не имеет решений. Если $c_1 = c_2 = 0$, то системе удовлетворяют тождественно произвольные значения x и y.

§ 20. Системы линейных уравнений с тремя неизвестными

Уравнение первой степени с тремя неизвестными. Уравнение первой степени с тремя неизвестными x, y, z в нормальном виде записывают так:

$$ax + by + cz = d.$$

Примеры. $10x + 10y + 8z = 164$; $\quad 2x - 3y + z = 7$.

Одно уравнение первой степени с тремя неизвестными имеет бесконечное множество решений. Действительно, взяв для x и y какие-либо произвольные числа, например $x = 2$, $y = 5$, и подставив эти значения в уравнение $15x + 10y + 8z = 164$, получим $15 \cdot 2 + 10 \times 5 + 8z = 164$, или $80 + 8z = 164$. Отсюда $z = 10\frac{1}{2}$. Взяв другие произвольные значения x и y, получим другое значение для z и т. д.

Система двух уравнений с тремя неизвестными. Систему двух уравнений первой степени с тремя неизвестными в общем виде записывают так:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2. \end{cases}$$

В большинстве случаев система двух уравнений с тремя неизвестными имеет бесчисленное множество решений.

Однако можно привести пример системы, не имеющей ни одного решения, например

$$\begin{cases} x - y + 2z = 5, \\ x - y + 2z = 7. \end{cases}$$

Какие бы значения ни имели x, y, z, выражение $x - y + 2z$ не может одновременно быть равным 5 и 7.

Система трех уравнений с тремя неизвестными. Система трех уравнений с тремя неизвестными имеет вид

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3. \end{cases}$$

Здесь x, y, z — неизвестные, а a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3 — данные числа.

Все свойства уравнений с одним и двумя неизвестными справедливы и для системы уравнений с тремя неизвестными. Поэтому для решения данной системы применимы те же способы, что и для системы двух уравнений с двумя неизвестными.

Пример 1. Решить систему

$$\begin{cases} 15x + 10y + 8z = 164, \\ x + y + z = 16, \\ z = 2y. \end{cases}$$

Исключаем x из первого и второго уравнений данной системы. (Эту систему нетрудно также решить, подставив в два первых уравнения вместо z равное ему выражение $2y$.) Для этого умножим обе части второго уравнения на 15:

$$\begin{cases} 15x + 15y + 15z = 240, \\ 15x + 10y + 8z = 164. \end{cases}$$

Коэффициенты при x равны. Вычтя из первого уравнения второе, получим $5y + 7z = 76$. Вместе с третьим уравнением оно дает систему уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 5y + 7z = 76, \\ z = 2y, \end{cases}$$

решив которую, найдем: $y = 4$, $z = 8$.

Подставляя эти значения в уравнения первое или второе, получаем $x = 4$. Следовательно, данная система трех уравнений с тремя неизвестными имеет единственное решение: $x = 4$, $y = 4$, $z = 8$.

Пример 2. Решить систему

$$\begin{cases} 7x + 6y + 7z = 100, \\ x - 2y + z = 0, \\ 3x + y - 2z = 0. \end{cases}$$

Умножим второе уравнение на 3 и прибавим его к первому:

$$\begin{array}{r} 7x + 6y + 7z = 100 \\ + \; 3x - 6y + 3z = 0 \\ \hline 10x \quad + 10z = 100 \end{array} \text{ или } x + z = 10.$$

Умножим третье уравнение на 2 и прибавим ко второму:

$$\begin{array}{r} x - 2y + z = 0 \\ 6x + 2y - 4z = 0 \\ \hline 7x \quad - 3z = 0. \end{array}$$

Полученные два уравнения дают систему

$$\begin{cases} x + z = 10, \\ 7x - 3z = 0, \end{cases}$$

решив которую, найдем: $x = 3$, $z = 7$.

Подставляя значения x и z в третье уравнение системы, получаем

$$9 + y - 14 = 0, \; y = 5.$$

Ответ. Система имеет единственное решение: $x = 3$, $y = 5$, $z = 7$.

В ряде частных случаев, учитывая специфические свойства данной системы, можно применять приемы, упрощающие процесс решения.

Пример 3. Решить систему

$$\begin{cases} x + y = a, \\ x + z = b, \\ y + z = c. \end{cases}$$

Складывая почленно все три уравнения и деля на 2, получаем

$$x + y + z = \frac{a + b + c}{2}.$$

Вычитая из него последовательно третье, второе и первое уравнения, находим

$$x = \frac{a + b + c}{2} - c = \frac{a + b - c}{2};$$

$$y = \frac{a - b + c}{2}; \; z = \frac{-a + b + c}{2}.$$

Пример 4. Решить систему

$$\begin{cases} x + ay + a^2z + a^3 = 0, \\ x + by + b^2z + b^3 = 0, \\ x + cy + c^2z + c^3 = 0, \end{cases}$$

где a, b, c — попарно различные числа.

Вычитая второе уравнение из первого, получаем

$$(a - b)y + (a^2 - b^2)z + (a^3 - b^3) = 0.$$

Сократим на $a - b$ (так как $a \neq b$):

$$y + (a + b)z + (a^2 + ab - b^2) = 0.$$

Аналогично, вычитая из первого уравнения третье, находим

$$y + (a + c)z + (a^2 + ac + c^2) = 0;$$

вычитая почленно полученные уравнения, исключаем y:

$$(b - c)z + (ab - ac + b^2 + c^2) = 0,$$

откуда $z = -(a + b + c)$. Тогда из уравнения $y + (a + b)z + (a^2 + ab + b^2) = 0$ получим $y = ab + bc + ac$ и, наконец, воспользовавшись первым уравнением системы, найдем $x = -abc$.

Решение систем трех линейных уравнений с помощью определителей. Определителем третьего порядка, составленным из таблицы девяти чисел

$$\begin{matrix} a_1, & b_1, & c_1, \\ a_2, & b_2, & c_2, \\ a_3, & b_3, & c_3, \end{matrix}$$

называется число

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2.$$

Вычисление определителей третьего порядка можно проводить по *схеме треугольников* (рис. 10). На левом рисунке соединены места таблицы, для которых произведения элементов следует взять со своим знаком. На правом рисунке соединены те места таблицы, для которых произведения элементов следует брать с противоположным знаком.

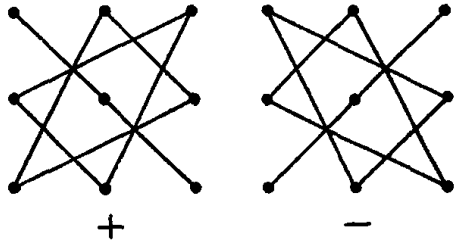


Рис. 10.

Пример. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 1 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 2 = -11.$$

Теперь рассмотрим систему трех уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3. \end{cases}$$

Если система имеет решение, то это решение представляется в удобном для запоминания виде:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}};\quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}};\quad z=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

Обозначая определители, стоящие в числителе, соответственно через Δ_1, Δ_2, Δ_3 и определитель, стоящий в знаменателе, через Δ (определитель системы уравнений), решение системы уравнений запишем так:

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta},\quad y=\frac{\Delta_2}{\Delta},\quad z=\frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Эти равенства выражают правило Крамера для системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными.

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} x+y+z=3, \\ x-y+3z=7, \\ 2x+3y-z=0. \end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}=4\neq 0;\quad \Delta_1=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 7 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}=4;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}=0;\quad \Delta_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 7 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}=8.$$

По правилу Крамера находим единственное решение системы:

$$x=\frac{4}{4}=1;\quad y=\frac{0}{4}=0;\quad z=\frac{8}{4}=2.$$

§ 21. Решение задач с помощью системы уравнений

Задача. На корм 8 лошадям и 15 коровам отпускали ежедневно 162 *кг* сена. Сколько сена ежедневно выдавали каждой лошади и каждой корове, если 5 лошадей съедали ежедневно сена на 3 *кг* больше, чем 7 коров?

Пусть для лошади отпускали ежедневно x, а для коровы y килограммов сена.

Тогда из первой части условия следует $8x+15y=162$, а из второй — уравнение $5x-7y=3$.

Решим систему этих уравнений:

$$\begin{array}{l|r|l} \begin{cases} 8x+15y=162 \\ 5x-7y=3 \end{cases} & \begin{matrix} 5 \\ -8 \end{matrix} & \begin{matrix} 40x+75y=810 \\ -40x+56y=-24 \end{matrix} \\ \hline 5x-42=3, & & 131y=786 \\ x=9. & & y=6. \end{array}$$

Ответ. 9 *кг* и 6 *кг* сена.

Задача. Латунь состоит из сплава меди и цинка. Кусок латуни весом 124 *г* при погружении в воду «потерял» 15 *г*. Сколько в нем содержится меди и цинка отдельно, если известно, что 89 *г* меди «теряют» в воде 10 *г*, а 7 *г* цинка — 1 *г*?

Пусть в латуни было x граммов меди и y граммов цинка. Тогда $x+y=124$. Так как медь «теряет» $\frac{10}{89}$ своего веса, а цинк $\frac{1}{7}$, то x граммов меди потеряет $\frac{10}{89}x$, а y граммов цинка $-\frac{1}{7}y$. Следовательно, $\frac{10}{89}x+\frac{1}{7}y=15$. Решив систему уравнений, получим $x=89$, $y=35$.

Ответ. 89 *г* меди и 35 *г* цинка.

Задача. Два трактора различной мощности при совместной работе вспахали за 15 *ч* $\frac{1}{6}$ всего поля. Если бы первый трактор работал 12 *ч*, а второй трактор — 20 *ч*, то они вспахали бы 20% всего поля. За сколько времени может вспахать все поле каждый трактор отдельно?

Площадь поля принимаем за единицу. Пусть первый трактор вспашет все поле за x часов, а второй — за y часов. Тогда производительность первого будет равна $\frac{1}{x}$, а второго $\frac{1}{y}$. По условию задачи имеем $15\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{6}$, $\frac{12}{x}+\frac{20}{y}=\frac{1}{5}$ $\left(\text{так как } 20\%=\frac{1}{5}\right)$. Решив систему уравнений, получим $x=360$, $y=120$.

Ответ. 360 *ч* и 120 *ч*.

Задача. По окружности движутся два тела; первое пробегает окружность на 5 *сек* скорее второго. Когда они движутся по одному направлению, то встречаются через каждые 100 *сек*. Какую часть окружности (в градусах) пробегает каждое тело в 1 *сек*?

Пусть в 1 *сек* первое тело пробегает дугу в x (градусов), а второе y (градусов). Из первого условия находим $\frac{360}{y}-\frac{360}{x}=5$. Каждую секунду расстояние между телами по дуге увеличивается на $x-y$ (градусов). За время, протекающее от одной встречи к другой, т. е. за 100 *сек*, расстояние должно увеличиться на 360°. Поэтому $100(x-y)=360$. Полученная система имеет два решения: $x_1=18$, $y_1=14{,}4$; $x_2=-14{,}4$, $y_2=-18$. Оба они пригодны; физический смысл их один и тот же (меняются только номера тел и направление движения).

Ответ. Первое тело за 1 *сек* пробегает 18°, второе 14°24′.

Задача. Велосипедист прибыл из пункта A в пункт B в назначенное время, двигаясь с определенной скоростью. Если бы он увеличил эту скорость на 3 *км/ч*, то прибыл бы на место на час раньше срока, а если бы он проезжал в час на 2 *км* меньше, чем в действительности, то он опоздал бы на час. Определить расстояние между пунктами A и B, скорость велосипедиста и время его движения.

Неизвестное расстояние обозначим через S, скорость велосипедиста v и время его движения t.

Используем табличную запись решения (таблица 3).

Таблица 3

Этапы	Путь (км)	Скорость (км/ч)	Время (ч)
Первый	S	v	t
Второй	S	$v+3$	$t-1$
Третий	S	$v-2$	$t+1$

Имеем систему трех уравнений (нелинейных) с тремя неизвестными

$$\begin{cases} vt = S, \\ (v+3)\cdot(t-1) = S, \\ (v-2)\cdot(t+1) = S. \end{cases}$$

Эту систему можно привести к системе линейных уравнений: из $vt = (v+3)\cdot(t-1)$ и $vt\,(v-2)\cdot(t+1)$ следует

$$\begin{cases} -v+3t = 3, \\ v-2t = 2. \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, получим $t = 5$, $v = 12$. Тогда $S = 12\times 5 = 60$ (км).

Ответ, 60 км, 12 км/ч, 5 ч.

§ 22. Квадратные уравнения

Общие понятия. Уравнение вида $ax^2+bx+c=0$, где x — неизвестное, а коэффициенты a, b и c — данные числа, называется *квадратным уравнением*. В квадратном уравнении $a \neq 0$, так как в противном случае оно было бы уравнением линейным: $bx+c=0$. В то же время a может быть и положительным и отрицательным. Если $a<0$, то, умножив обе части уравнения на -1, получим уравнение с положительным коэффициентом при x^2. Коэффициент c называется свободным членом, ax^2 — старшим членом, bx — членом, содержащим первую степень неизвестного.

Если $b \neq 0$ и $c \neq 0$, то уравнение $ax^2+bx+c=0$ называется *полным квадратным уравнением общего вида*. Разделив все члены его на $a(a \neq 0)$, получим

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

Полагая $\frac{b}{a}=p$, $\frac{c}{a}=q$, имеем уравнение $x^2+px+q=0$, которое называется полным квадратным уравнением приведенного вида или *приведенным квадратным уравнением*. Если хотя бы один из коэффициентов b или c равен нулю, то квадратное уравнение называется неполным. Неполные квадратные уравнения бывают трех видов:

1) если $b=0$, $c \neq 0$, то $ax^2+c=0$;
2) » $b \neq 0$, $c=0$, то $ax^2+bx=0$;
3) » $b=0$, $c=0$, то $ax^2=0$.

Решение неполных квадратных уравнений. Уравнения вида

$$ax^2 + c = 0 \text{ и } ax^2 = 0.$$

Чтобы решить уравнение вида $ax^2 + c = 0$, переносим свободный член в правую часть и находим значение x^2 и

$$x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Если коэффициенты a и c одного знака, то уравнение $ax^2 + c = 0$ в области действительных чисел не имеет решений, так как квадрат действительного числа не может быть равным отрицательному числу $-\frac{c}{a}$. Если же a и c противоположных знаков, то уравнение $ax^2 + c = 0$ всегда имеет два корня, которые являются противоположными числами.

Пример. Решить уравнение $2x^2 - 32 = 0$.

$$2x^2 = 32,$$
$$x^2 = 16,$$
$$x = \pm\sqrt{16} = \pm 4.$$

Ответ. $x_1 = 4$, $x_2 = -4$.

Пример. Решить уравнение $2x^2 + 8 = 0$.

$$x^2 = -4.$$

В области действительных чисел уравнение не имеет решения.

Если a и c противоположных знаков, то уравнение $ax^2 + c = 0$ можно решить и путем разложения на множители.

Пример.

$$4x^2 - 9 = 0,\ (2x - 3)(2x + 3) = 0;$$
$$2x - 3 = 0,\ x_1 = \frac{3}{2};$$
$$2x + 3 = 0,\ x_2 = -\frac{3}{2}.$$

Уравнение $ax^2 = 0$ имеет равные корни: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.

Уравнение вида $ax^2 + bx = 0$. Чтобы решить уравнение $ax^2 + bx = 0$, надо его левую часть разложить на множители: $x(ax + b) = 0$. Тогда или $x = 0$, или $ax + b = 0$, откуда $x = -\frac{b}{a}$.

Итак, уравнение $ax^2 + bx = 0$ имеет два корня:

$$x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{b}{a}.$$

Пример 1. Решить уравнение $x^2 - 12x = 0$.

$$x(x - 12) = 0,\ x_1 = 0,$$
$$x - 12 = 0,\ x_2 = 12.$$

Пример 2. Решить уравнение

$$\frac{5x^2+9}{6}-\frac{4x^2-9}{5}=3.$$

$$\frac{5}{\frac{5x^2+9}{6}}-\frac{6}{\frac{4x^2-9}{5}}=\frac{30}{3},$$

$$25x^2+45-24x^2+54=90;\ x^2+99=90;\ x^2+9=0.$$

Ответ. Уравнение не имеет решений (в области действительных чисел).

Пример 3. Решить уравнение $10(x-2)+19=(5x-1)\times(1+5x)$.

$$10(x-2)+19=(5x-1)(1+5x),\ 10x-20+19=25x^2-1,$$
$$10x-25x^2=0;$$
$$5x(2-5x)=0;\ x_1=0,\ 2-5x=0,\ x_2=\frac{2}{5}.$$

Ответ. $x_1=0;\ x_2=\frac{2}{5}$.

Приведенное квадратное уравнение. Решение квадратного уравнения путем выделения полного квадрата двучлена. Пусть надо решить уравнение $x^2+14x+24=0$.

Разложим левую часть на миожители, выделив из выражения $x^2+14x+24$ полный квадрат двучлена. Первый член есть квадрат числа x (первого числа), второй член $(14x)$ можно рассматривать как удвоенное произведение первого числа x на второе число, равное 7, так как $14x=2\cdot x\cdot 7$. Чтобы получить полиый квадрат двучлена, прибавим квадрат второго числа $7^2=49$, а чтобы численное значение не изменилось, вычтем это же число 49. Получим

$$(x^2+14x+49)-49+24=0,\ \text{или}\ (x+7)^2-25=0.$$

Разложив левую часть на множители, получим

$$(x+7+5)(x+7-5)=0,\ \text{или}\ (x+12)(x+2)=0.$$

Итак, уравнение $x^2+14x+24=0$ равносильно $(x+12)\times(x+2)=0$,
откуда следует

$$(x+2)=0;\ x_1=-2;\ x+12=0;\ x_2=-12.$$

Пример. Решить уравнения путем выделения полного квадрата $x^2-11x+30=0$.

$$x^2-2\cdot\frac{11}{2}x+\frac{121}{4}-\frac{121}{4}+30=0;\ \left(x-\frac{11}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=0,$$

$$\left(x-\frac{11}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{11}{2}+\frac{1}{2}\right)=0;\ (x-6)(x-5)=0.$$

Ответ. $x_1=6;\ x_2=5$.

Формула корней приведенного квадратного уравнения. С помощью выделения полного квадрата

двучлена в уравнении $x^2+px+q=0$ при любых p и q получают общую формулу для корней приведенного квадратного уравнения

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}, \qquad (1)$$

выражающую зависимость корней от коэффициентов.

Формула читается так: *корень приведенного квадратного уравнения равен половине коэффициента при неизвестном в первой степени, взятом с противоположным знаком, плюс — минус квадратный корень из квадрата половины этого коэффициента без свободного члена.*

По этой формуле можно определить действительные корни приведенного уравнения только в случае, когда выражение $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$ (оно называется *дискриминантом* приведенного квадратного уравнения) неотрицательно, т. е. когда $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q\geqslant 0$. Если $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q>0$, то данное уравнение $x^2+px+q=0$ имеет два разных корня.

Если $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q<0$, то данное уравнение не имеет действительных корней.

Если $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=0$, то оба корня равны: $x_1=x_2=-\frac{p}{2}$.

Пример 1. Решить уравнение $x^2-4x-60=0$.

Здесь $p=-4$, $q=-60$. По формуле имеем

$$x=2\pm\sqrt{4-(-60)}=2\pm\sqrt{64}=2\pm 8;$$
$$x_1=2+8=10;$$
$$x_2=2-8=-6.$$

Пример 2. Решить уравнение $x^2+2mx-2(mn+0{,}5n^2)=0$.

Здесь $p=2m$, $q=-2\left(mn+\frac{1}{2}n^2\right)$. По формуле имеем

$$x=-m\pm\sqrt{m^2+2\left(mn+\frac{1}{2}n^2\right)}=-m\pm\sqrt{m^2+2mn+n^2}=$$
$$=-m\pm\sqrt{(m+n)^2}=-m\pm|m+n|;\ x_1=-m+(m+n)=n;$$
$$x_2=-m-(m+n)=-2m-n.$$

Примечание. Формулы $\pm|m+n|$ и $\pm(m+n)$ дают одинаковые пары чисел, поэтому в данном случае вместо $-m\pm|m+n|$ можно писать $-m\pm(m+n)$.

Полное квадратное уравнение общего вида. Квадратное уравнение вида $ax^2+bx+c=0$ можно решать по формуле корней приведенного уравнения, если данное уравнение предварительно разделить на $a(a\neq 0)$. Однако можно пользоваться и специальной формулой

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \qquad (2)$$

Эта формула читается так: *корень полного квадратного уравнения общего вида равен дроби, числителем которой есть коэффициент при*

неизвестном в первой степени, взятый с противоположным знаком, плюс или минус корень квадратный из квадрата этого коэффициента без учетверенного произведения коэффициента при неизвестном второй степени на свободный член, а знаменателем есть удвоенный коэффициент при неизвестном второй степени.

Выражение $b^2 - 4ac$, входящее в этой формуле под радикал, называют *дискриминантом* квадратного уравнения общего вида.

Если $b^2 - 4ac > 0$, уравнение имеет два разных действительных корня.

Если $b^2 - 4ac = 0$, уравнение имеет два одинаковых корня:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}.$$

Если $b^2 - 4ac < 0$, уравнение не имеет корней (действительных).

На следующих примерах покажем, как можно применять общую формулу корней для решения квадратных уравнений.

Пример 1. Решить уравнение $3x^2 + 11x + 6 = 0$.

Здесь $a = 3$, $b = 11$, $c = 6$. По формуле имеем

$$x = \frac{-11 \pm \sqrt{121 - 4 \cdot 3 \cdot 6}}{2 \cdot 3} = \frac{-11 \pm \sqrt{121 - 72}}{6} = \frac{-11 \pm \sqrt{49}}{6} =$$

$$= \frac{-11 \pm 7}{6};$$

$$x_1 = \frac{-11 + 7}{6} = -\frac{2}{3};$$

$$x_2 = \frac{-11 - 7}{6} = -3.$$

Пример 2. Решить уравнение

$$3x + \frac{(x-3)^2}{4} = \frac{(x+3)^2}{8} + \frac{(x+1)(x-1)}{3}.$$

Приведем данное уравнение к стандартному виду, а затем воспользуемся формулой (2):

$$72x + 6(x^2 - 6x + 9) = 3(x^2 + 6x + 9) + 8(x^2 - 1);$$

$$72x + 6x^2 - 36x + 54 = 3x^2 + 18x + 27 + 8x^2 - 8;$$

$$-5x^2 + 18x + 35 = 0, \quad 5x^2 - 18x - 35 = 0;$$

$$x = \frac{18 \pm \sqrt{324 + 700}}{10} = \frac{18 \pm \sqrt{1024}}{10} = \frac{18 \pm 32}{10};$$

$$x_1 = 5; \quad x_2 = -1{,}4.$$

Пример 3. Не решая уравнений, определить, сколько действительных корней имеет каждое из них:

а) $4x^2 + 6x + 9 = 0$; б) $2x^2 - 3x + 1 = 0$.

Решение. а) $b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 36 - 144 < 0$. Уравнение не имеет действительных корней;

б) $(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 - 8 > 0$. Уравнение имеет два действительных различных корня.

Пример 4. При каком значении k уравнение $kx^2 + 12x - 3 = 0$ имеет корень, равный $\frac{1}{5}$?

$$k \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 + 12 \cdot \frac{1}{5} - 3 = 0,$$

$$\frac{k}{25} + \frac{12}{5} - 3 = 0,$$

$$k + 60 - 75 = 0, \quad k = 15.$$

Пример 5. При каком значении a уравнение $ax^2 + 4x + 1 = 0$ имеет два равных корня?

Уравнение имеет два равных корня при условии, что его дискриминант равен нулю. В нашем случае $4^2 - 4 \cdot 1 \cdot a = 0$, откуда $a = 4$.

Зависимость между коэффициентами и корнями квадратного уравнения. Между коэффициентами и корнями приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ существуют такие зависимости:

1. *Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна коэффициенту при неизвестном в первой степени, взятом с противоположным знаком*, т. е.

$$x_1 + x_2 = -p. \tag{3}$$

2. *Произведение корней этого уравнения равно свободному члену*, т. е.

$$x_1 \cdot x_2 = q. \tag{4}$$

Эти зависимости известны под названием *формулы Виета.*

Примеры. 1. Уравнение $x^2 + 2x - 80 = 0$ имеет корни $x_1 = 8$, $x_2 = -10$, так как $x_1 + x_2 = 8 - 10 = -2$, $x_1 \cdot x_2 = 8(-10) = -80$.

2. Уравнение $x^2 + 9x + 14 = 0$ имеет корни $x_1 = -2$, $x_2 = -7$, поскольку $x_1 + x_2 = -2 + (-7) = -9$; $x_1 x_2 = (-2)(-7) = 14$.

Справедливо и обратное утверждение: *если сумма двух чисел x_1 и x_2 равна $-p$, а их произведение равно q, то эти числа являются корнями квадратного уравнения*

$$x^2 + px + q = 0.$$

Для случая полного квадратного уравнения неприведенного вида существуют зависимости

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}. \tag{5}$$

Например, уравнение $4x^2 + 25x - 21 = 0$ имеет корни

$$x_1 = -7, \quad x_2 = \frac{3}{4};$$

$$x_1 + x_2 = -7 + \frac{3}{4} = -\frac{25}{4}, \quad x_1 x_2 = (-7) \cdot \frac{3}{4} = -\frac{21}{4}.$$

Эти утверждения дают возможность составлять квадратные уравнения, которые имели бы наперед заданные корни, а также решать много других задач на составление и исследование квадратных уравнений.

Пример 1. Составить квадратное уравнение, имеющее корни 5 и -6.

Здесь $x_1 + x_2 = 5 + (-6) = -1$, $x_1 x_2 = 5(-6) = -30$; следовательно, $p = 1$, $q = -30$. Получаем уравнение

$$x^2 + x - 30 = 0.$$

Пример 2. Составить квадратное уравнение, корни которого были бы обратными корням уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Перепишем уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ так: $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ и пусть его корнями будут x_1 и x_2. Тогда

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ и } x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

По условию, корнями искомого уравнения будут $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$. Чтобы получить его коэффициенты, вычислим

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = -\frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{c}, \quad \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1 x_2} = \frac{1}{\frac{c}{a}} = \frac{a}{c}.$$

Уравнение будет иметь вид

$$x^2 + \frac{b}{c}x + \frac{a}{c} = 0 \text{ или } cx^2 + bx + a = 0.$$

§ 23. Задачи на составление квадратных уравнений

Задача 1. Огородный участок, имеющий форму прямоугольника, одна сторона которого на 10 *м* больше другой, требуется обнести изгородью. Определить длину изгороди, если известно, что площадь участка равна 1200 *кв. м*.

Пусть одна сторона прямоугольника x, тогда другая будет $x + 10$. По условию имеем $x(x + 10) = 1200$; $x^2 + 10x - 1200 = 0$.

Решая уравнение, получаем $x_1 = 30$, $x_2 = -40$.

Второе решение уравнения не принимаем во внимание, так как длина стороны прямоугольника не может выражаться отрицательным числом. Поэтому длина изгороди

$$2x + 2(x + 10) = 2 \cdot 30 + 2(30 + 10) = 140 \ (м).$$

Ответ. 140 *м*.

Задача 2. Бригада лесорубов должна была по плану заготовить в несколько дней 216 *куб. м* дров. Первые три дня бригада выполняла ежедневно установленную планом норму, а затем каждый день заготовляла 8 *куб. м* сверх плана. Поэтому уже за день до срока было заготовлено 232 *куб. м* дров. Сколько дров в день должна была заготовить бригада по плану?

Количество дров, которое должна заготовить бригада за 1 день по плану, принимаем за x. В первые три дня бригада заготовила

$3x$ (*куб. м*). Остальные дни она заготовляла по $x+8$. По плану бригада должна работать $\frac{216}{x}$ (дней); с производительностью $x+8$ (*куб. м*) в день она работала $\frac{232-3x}{x+8}$ (дней). Согласно условию задачи имеем

$$\frac{232-3x}{x+8}+3+1=\frac{216}{x}, \text{ или } \frac{232-3x}{x+8}+4=\frac{216}{x}.$$

После преобразования получаем уравнение $x^2+48x-1728=0$. Его корни: $x_1=24$, $x_2=-72$. Следовательно, бригада в день должна была заготовлять по плану 24 *куб. м*.

Ответ. 24 *куб. м*.

Задача 3. Два автомобиля выходят из одного города в другой. Скорость первого на 10 *км/ч* больше скорости другого, и поэтому первый автомобиль приходит на место на 1 *ч* раньше второго. Определить скорость обоих автомобилей, если известно, что расстояние между городами 560 *км*.

Принимаем скорость второго автомобиля за x (*км/ч*). Тогда скорость первого будет $x+10$ (*км/ч*). Значит, время движения первого автомобиля будет $\frac{560}{x}$; время движения второго — $\frac{560}{x+10}$.

По условию задачи первое из этих чисел на 1 больше второго. Следовательно,

$$\frac{560}{x}-1=\frac{560}{x+10}.$$

После преобразований имеем $x^2-10x+5600=0$. Корни этого уравнения: $x_1=70$, $x_2=-80$. Отбрасывая второй корень, так как скорость не может быть отрицательной, получаем скорость первого автомобиля 70 *км/ч*. Тогда скорость второго равна 80 *км/ч*.

Ответ. 70 *км/ч* и 80 *км/ч*.

Задача 4. Теплоход прошел по течению реки 48 *км* и столько же против течения и потратил на весь путь 5 *ч*. Определить скорость теплохода в стоячей воде, если считать скорость течения реки 4 *км/ч*.

Скорость теплохода в стоячей воде принимаем за x (*км/ч*). Тогда его скорость по течению реки будет $x+4$ (*км/ч*), а скорость против течения $x-4$ (*км/ч*). Значит, он пройдет по течению 48 *км* за $\frac{48}{x+4}$ *ч* и против течения за $\frac{48}{x-4}$ *ч*. По условию задачи имеем

$$\frac{48}{x-4}+\frac{48}{x+4}=5.$$

После преобразования получаем уравнение $5x^2-96x-80=0$. Его корни: $x_1=20$, $x_2=-\frac{4}{5}$. Значит, скорость теплохода в стоячей воде была 20 *км/ч*.

Ответ. 20 *км/ч*.

Задача 6. Два велосипедиста выезжают одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B, расстояние между которыми 28 *км*, и через час встречаются. Не останавливаясь, они продолжают путь с той же скоростью. Первый велосипедист прибывает в пункт B

на 35 *мин* раньше, чем второй в пункт *A*. Определить скорость каждого велосипедиста.

Расстояние между пунктами *A* и *B* представим отрезком *AB* и предположим, что велосипедисты встретились в точке *C* (рис. 11).

Обозначим расстояние *AC* через *x* километров. Тогда расстояние *CB* будет $28 - x$. Из условия задачи следует, что скорость первого велосипедиста *x км/ч*, а второго $(28 - x)$ *км/ч*. Первый прошел расстояние 28 *км* за $\frac{28}{x}$ *ч*, а второй за $\frac{28}{28 - x}$ *ч*.

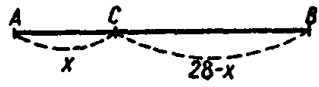


Рис. 11.

Принимая во внимание, что первый велосипедист прибывает в пункт *B* на 35 *мин* $\left(\frac{7}{12}\ ч\right)$ раньше, чем второй в пункт *A*, получаем уравнение

$$\frac{28}{28 - x} - \frac{7}{12} = \frac{28}{x}.$$

После преобразований уравнение примет вид $x^2 + 68x - 1344 = 0$. Его корни: $x_1 = 16$, $x_2 = -84$. Отрицательный корень не подходит по смыслу задачи. Получаем, соответственно, скорости велосипедистов 16 и 12 *км/ч*.

Ответ. 16 *км/ч* и 12 *км/ч*.

Задача 8. За 4 дня совместной работы двух тракторов различной мощности было вспахано $^2/_3$ колхозного поля. За сколько дней можно было бы вспахать все поле каждым трактором отдельно, если первым трактором можно вспахать все поле на 5 дней скорее, чем вторым трактором?

Работу принимаем за единицу. Предполагаем, что вторым трактором можно вспахать все поле за *x* дней, тогда первым трактором можно вспахать все поле за $x - 5$ дней. Значит, за 4 дня второй трактор вспашет $\frac{1}{x} \cdot 4 = \frac{4}{x}$ часть поля, первый $\frac{1}{x - 5} \cdot 4 = \frac{4}{x - 5}$ часть. Так как это составит $^2/_3$ всего поля, то получаем уравнение $\frac{4}{x} + \frac{4}{x - 5} = \frac{2}{3}$. После преобразования это уравнение примет вид $x^2 - 17x + 30 = 0$. Его корни: $x_1 = 15$, $x_2 = 2$. Второй корень не отвечает условию задачи, так как $2 - 5 = -3$.

Значит, второй трактор может вспахать все поле за 15 дней, а первый — за 10 дней.

Ответ. 10 дней и 15 дней.

Задача 9. Колхоз купил для заправки тракторов на *a* рублей лигроина и на такую же сумму керосина, всего *n* килограммов. Сколько куплено лигроина и сколько керосина, если килограмм первого на *b* рублей дороже килограмма второго?

Пусть куплено x килограммов лигроина. Тогда керосина было куплено $n - x$. Цена килограмма лигроина составит $\frac{a}{x}$, а керосина $\frac{a}{n-x}$ рублей. Так как килограмм лигроина на b рублей дороже килограмма керосина, то получаем уравнение

$$\frac{a}{x} - \frac{a}{n-x} = b.$$

После преобразования уравнение примет вид

$$bx^2 - (2a + bn)x + an = 0.$$

Тогда

$$x = \frac{2a + bn \pm \sqrt{4a^2 + b^2n^2}}{2b}.$$

Из условия задачи следует, что a, b, n — числа положительные. Тогда по теореме Виета получаем, что оба значения неизвестного x также положительные. Однако большее из этих значений не подходит к решению задачи, потому что в этом случае x был бы больше n, так как

$$\frac{2a + bn}{2b} > \frac{bn}{2b} = \frac{n}{2} \text{ и } \frac{\sqrt{4a^2 + b^2n^2}}{2b} > \frac{\sqrt{b^2n^2}}{2b} > \frac{bn}{2b} = \frac{n}{2}.$$

Итак, имеем лигроина

$$\frac{2a + bn - \sqrt{4a^2 + b^2n^2}}{2b},$$

а керосина

$$n - \frac{2a + bn - \sqrt{4a^2 + b^2n^2}}{2b} = \frac{bn - 2a + \sqrt{4a^2 + b^2n^2}}{2b} \text{ (килограммов).}$$

Здесь a, b, n — любые положительные числа.

§ 24. Иррациональные уравнения

Иррациональным называется каждое уравнение, левая и правая части которого есть алгебраические выражения, причем хотя бы одно из них иррациональное.

Примеры иррациональных уравнений:

$$\sqrt{x-3} = 7, \quad \sqrt[3]{x+5} - \sqrt[3]{x-5} = 10, \quad \sqrt[3]{x} + x = 71.$$

В элементарной алгебре рассматриваются лишь такие иррациональные уравнения, в которых имеющиеся радикалы четной степени предполагают арифметическими (а нечетной степени — положительными или отрицательными, в зависимости от знака подкоренного выражения).

Общий метод решения иррационального уравнения заключается в том, что сначала изолируется один радикал, затем обе части урав-

нения возводят в степень, потом снова изолируется радикал и т. д. Всякое иррациональное уравнение после конечного числа таких преобразований может быть приведено к рациональному уравнению. Получающееся в результате уравнение, вообще говоря, не эквивалентно заданному. Поэтому, найдя решения этого уравнения, надо проверить их путем подстановки в данное уравнение и отбросить как посторонние, те из них, которые не удовлетворяют решению. Однако если обе части иррационального уравнения возводились в нечетную степень, то проверять решение не обязательно, так как в этом случае придем к уравнению, эквивалентному данному.

Если уравнение содержит радикалы с неизвестным в знаменателе, то его надо освободить от знаменателя, выполнив необходимые преобразования.

Прежде чем приступить к решению иррационального уравнения, целесообразно определить область допустимых значений для неизвестного, так как в некоторых случаях после этого отпадает необходимость в решении.

Пример. Решить уравнение $\sqrt{x-3}+\sqrt{2-x}=3$.

Для первого радикала $x \geqslant 3$, для второго $x \leqslant 2$. В области действительных чисел уравнение не имеет решений, так как нет общих значений x, для которых оба радикала имеют действительное значение.

Ответ. Данное уравнение не имеет решений.

Решение простейших иррациональных уравнений.

Пример 1. Решить уравнение $3+\sqrt{x-2}=4$.

$$\sqrt{x-2}=4-3,\quad \sqrt{x-2}=1,\quad x-2=1,\quad x=3.$$

Проверка. $3+\sqrt{3-2}=3+1=4$. Как видим, $x=3$ удовлетворяет данному уравнению.

Ответ. $x=3$.

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt{x-7}=x-13$.

Возведем в квадрат обе части:

$$x-7=x^2-26x+169;$$
$$x^2-27x+176=0,$$
$$x_1=16,\quad x_2=11.$$

Проверкой легко убедиться, что $x=16$ удовлетворяет уравнению, $x_2=11$ уравнению не удовлетворяет (левая часть уравнения неотрицательное число; тогда и правая часть должна быть неотрицательным числом, а это возможно при условии, что $x \geqslant 13$).

Ответ. $x=16$.

Пример. Решить уравнение $\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+8}=7$.

$$\sqrt{2x+8}=7-\sqrt{x+5};\quad 2x+8=49-14\sqrt{x+5}+x+5;$$
$$x-46=-14\sqrt{x+5};\quad (x-46)^2=196(x+5);$$
$$x^2-288x+1136=0,\quad x_1=4,\quad x_2=284.$$

Проверкой убеждаемся, что решением уравнения является значение $x=4$.

Ответ. $x=4$.

Пример 4. Решить уравнение $\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-4}=\dfrac{\sqrt{x}-6}{\sqrt{x}-7}$.

Область допустимых значений $x \geqslant 0$, $x \neq 16$ и $x \neq 49$.

$$(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-7)=(\sqrt{x}-6)(\sqrt{x}-4);$$
$$x-2\sqrt{x}-7\sqrt{x}+14=x-6\sqrt{x}-4\sqrt{x}+24;$$
$$-9\sqrt{x}+14=-10\sqrt{x}+24;\ \sqrt{x}=10,\ x=100.$$

Проверка. $\frac{\sqrt{100}-2}{\sqrt{100}-4}=\frac{\sqrt{100}-6}{\sqrt{100}-7}$, $\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$.

Ответ. $x=100$.

Пример 5. Решить уравнение

$$(3x+1)^{\frac{1}{2}}+(4x-3)^{\frac{1}{2}}=(5x+4)^{\frac{1}{2}}.$$

Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$\left[(3x+1)^{\frac{1}{2}}+(4x-3)^{\frac{1}{2}}\right]^2=\left[(5x+4)^{\frac{1}{2}}\right]^2;$$
$$3x+1+2(3x+1)^{\frac{1}{2}}(4x-3)^{\frac{1}{2}}+4x-3=5x+4;$$
$$\left[(3x+1)^{\frac{1}{2}}(4x-3)^{\frac{1}{2}}\right]^2=(3-x)^2;$$
$$(3x+1)(4x-3)=9-6x+x^2.$$

После преобразований имеем $11x^2+x-12=0$. Тогда

$$x_1=1,\ x_2=-\frac{12}{11}.$$

Значение $x=1$ является корнем данного уравнения, а $x=-\frac{12}{11}$ не удовлетворяет уравнению.

Ответ. $x=1$.

Пример 7. Решить уравнение $x+\sqrt{a^2+x^2}=\frac{5a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

$$x\sqrt{a^2+x^2}+a^2+x^2=5a^2;\ x\sqrt{a^2+x^2}=4a^2-x^2.$$

После возведения в квадрат обеих частей уравнения и некоторых преобразований получаем

$$9a^2x^2=16a^4;\ x^2=\frac{16a^2}{9};\ x_1=\frac{4a}{3},\ x_2=-\frac{4a}{3}.$$

Пусть $a>0$. Тогда x_1 удовлетворяет данному уравнению, а x_2 — нет. Если $a<0$, то x_2 удовлетворяет, а x_1 — нет.

Ответ. $x=\frac{4}{3}|a|$.

Решение иррациональных уравнений способом замены. Этот способ состоит в том, что выражение, находящееся под знаком радикала, обозначают новым неизвестным в некоторой степени (так, чтобы корень извлекался).

Пример 1. Решить уравнение $x^2-\sqrt{x^2-4}=16$.

Область допустимых значений $x^2-4\geqslant 0$, т. е. $x\leqslant -2$ и $x\geqslant 2$.

Положим $\sqrt{x^2-4}=y$, тогда $x^2-4=y^2$; $x^2=y^2+4$ и данное уравнение принимает вид $y^2-y-12=0$, откуда $y_1=4$, $y_2=-3$. y_2 отбрасываем, так как $y\geqslant 0$. Найдем значение x: $x^2=y^2+4=16+4=20$, $x_{1,2}=\pm\sqrt{20}$.

Оба значения $x_{1,2}=\pm\sqrt{20}$ принадлежат области допустимых значений и удовлетворяют уравнению, в чем можно убедиться путем проверки.

Ответ. $x_{1,2}=\pm 2\sqrt{5}$.

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt[4]{97-x}+\sqrt[4]{x}=5$.

Пусть $\sqrt[4]{97-x}=u$, $\sqrt[4]{x}=v$. Тогда $\begin{cases} u+v=5, \\ u^4+v^4=97; \end{cases}$

$$u^2+v^2=25-2uv,\quad u^4+v^4=625-100uv+4u^2v^2-2u^2v^2,$$
$$97=625-100uv+2u^2v^2,\quad (uv)^2-50(uv)+264=0,$$
$$uv=25\pm 19,\quad (uv_1)=44,\quad (uv)_2=6,$$
$$\begin{cases} u+v=5, \\ uv=44, \end{cases}\qquad \begin{cases} u+v=5, \\ uv=6. \end{cases}$$

Первая система в области действительных чисел не имеет решений. Вторую систему решаем устно: $u_1=3$, $v_1=2$; $u_2=2$, $v_2=3$. Отсюда $x_1=16$, $x_2=81$.

Оба корня удовлетворяют данному уравнению.

Ответ. $x_1=16$, $x_2=81$.

Умножение обеих частей уравнения на выражение, сопряженное выражению в левой части.

Пример. Решить уравнение $\sqrt{x+4}+\sqrt{20+x}=8$.

Область допустимых значений: $x+4\geqslant 0$, $x\geqslant -4$; $20+x\geqslant 0$, $x\geqslant -20$. Следовательно, $x\geqslant -4$.

Положим $\sqrt{x+4}-\sqrt{20+x}=y$. Перемножим эти равенства почленно: $(x+4)-(20+x)=8y$, откуда $y=-2$. Тогда

$$\begin{cases} \sqrt{x+4}+\sqrt{20+x}=8, \\ \sqrt{x+4}-\sqrt{20+x}=-2. \end{cases}$$

Складывая эти уравнения, получаем $2\sqrt{x+4}=6$, откуда $x+4=9$, $x=5$. Это значение принадлежит области допустимых значений и удовлетворяет уравнению.

Ответ. $x=5$.

Применение формул сокращенного умножения.

Пример. Решить уравнение $(8x+4)^{\frac{1}{3}}-(8x-4)^{\frac{1}{3}}=2$.

$$\left[(8x+4)^{\frac{1}{3}}-(8x-4)^{\frac{1}{3}}\right]^3=8;\quad 8x+4-(8x-4)-3(8x+4)^{\frac{1}{3}}\times$$
$$\times(8x-4)^{\frac{1}{3}}\left[(8x+4)^{\frac{1}{3}}-(8x-4)^{\frac{1}{3}}\right]=8^*.$$

* Так как $(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$.

Учитывая что по условию выражение в квадратных скобках должно быть равно 2, получим $8x+4-8x+4-6(64x^2-16)^{\frac{1}{3}}=8$, откуда

$$64x^2-16=0,\quad x^2=\frac{1}{4},\quad x_1=\frac{1}{2},\quad x_2=-\frac{1}{2}.$$

Проверка.

$$(4+4)^{\frac{1}{3}}-(4-4)^{\frac{1}{3}}=2,\ (-4+4)^{\frac{1}{3}}-(-4-4)^{\frac{1}{3}}=2.$$

Ответ. $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=-\frac{1}{2}$.

§ 25. Системы уравнений второй степени с двумя неизвестными

Уравнение второй степени с двумя неизвестными. Нормальный вид уравнения второй степени с двумя неизвестными такой:

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0.$$

Здесь a, b, c, d, e, f — любые числа, только a, b, c не могут одновременно равняться нулю.

Примеры. $x^2+3xy+0{,}5y^2-5y=0$; $xy+7=0$.

Однако уравнение $x^2+5x^2y+3y-2=0$ не является уравнением второй степени, так как его член $5x^2y$ не второй, а третьей степени (степенью одночлена называют сумму показателей всех его букв).

Уравнение второй степени с двумя неизвестными может иметь бесконечное множество решений, но может иметь только несколько или вообще не иметь решений. Например:

$x^2+4y^2+7=0$ не имеет решений (действительных);

$x^2+9y^2=0$ имеет одно решение: $x=0$, $y=0$;

$x^2+2xy=0$ имеет бесконечное множество решений: $x_1=0$, $y_1=0$; $x_2=1$, $y_2=-\frac{1}{2}$; $x_3=2$, $y_3=-1$ и т. д.

Системы двух уравнений, из которых одно первой степени, а другое — второй. В общем виде эта система уравнений записывается так:

$$\begin{cases} a_1x^2+b_1xy+c_1y^2+d_1x+e_1y+f_1=0; \\ d_2x+e_2y+f_2=0. \end{cases}$$

Удобнее всего решать ее способом подстановки. Для этого достаточно из второго (линейного) уравнения выразить одно неизвестное через другое и найденное выражение подставить в первое уравнение. В результате получим квадратное уравнение, решив которое, найдем значения одного из неизвестных. Затем, подставив эти значения неизвестного в какое-нибудь из данных уравнений (лучше в линейное), получим соответствующие значения второго неизвестного.

Пример 1. Решить систему

$$\begin{cases} 2x^2+15xy+4y^2+43x+24y+7=0; \\ x-2y+5=0. \end{cases}$$

Из второго уравнения находим $x=2y-5$. Подставляем в первое:

$$2(2y-5)^2+15(2y-5)y+4y^2+43(2y-5)+24y+7=0.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные члены, получим

$$42y^2 - 5y - 158 = 0, \text{ откуда } y_1 = 2,\ y_2 = -\frac{79}{42}.$$

Из равенства $x = 2y - 5$ найдем $x_1 = -1,\ x_2 = -\frac{184}{21} = -8\frac{16}{21}$.

Однако многие системы такого вида можно решать также искусственными способами.

Решение системы вида

$$\begin{cases} x \pm y = a, \\ xy = b. \end{cases}$$

Пример 1.

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 4. \end{cases}$$

Значения x и y можно рассматривать как корни квадратного уравнения

$$z^2 - 5z + 4 = 0.$$

Имеем $z_1 = 1,\ z_2 = 4$. Оба уравнения системы симметричны отиосительно x и y, поэтому получаем две пары решений: если одно решение $x_1 = 1,\ y_1 = 4$, то второе, наоборот: $x_2 = 4,\ y_2 = 1$.

Пример 2.

$$\begin{cases} x - y = 7, \\ xy = 18. \end{cases}$$

Систему записываем в виде

$$\begin{cases} x + (-y) = 7, \\ x(-y) = -18. \end{cases}$$

Тогда x и $-y$ будут корнями квадратного уравнения $z^2 - 7z - 18 = 0$. Получаем $z_1 = 9,\ z_2 = -2$. Тогда

$$x_1 = 9,\ -y_1 = -2 \text{ или } x_1 = 9,\ y_1 = 2 \text{ и } x_2 = -2,$$
$$-y_2 = 9 \text{ или } x_2 = -2,\ y_2 = -9.$$

Решение системы вида

$$\begin{cases} x + y = a, \\ x^2 + y^2 = b. \end{cases}$$

Возведем первое уравнение в квадрат и вычтем из него второе; получим $2xy = a^2 - b$, откуда следует $xy = \frac{a^2 - b}{2}$.

Теперь вопрос сводится к решению системы

$$\begin{cases} x + y = a, \\ xy = \frac{a^2 - b}{2}, \end{cases}$$

рассмотренной выше.

Решение системы вида

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a, \\ x \pm y = b. \end{cases}$$

Эта система решается почленным делением первого уравнения на второе. В результате данная система заменяется равносильной ей следующей:

$$\begin{cases} x \mp y = \dfrac{a}{b}, \\ x \pm y = b, \end{cases}$$

т. е. приводится к решению линейной системы с двумя неизвестными.

Система двух уравнений, из которых каждое второй степени. Система двух уравнений второй степени с двумя неизвестными имеет вид

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + d_1x + e_1y + f_1 = 0, \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 + d_2x + e_2y + f_2 = 0. \end{cases}$$

Такая система в общем виде не решается элементарно, так как она приводится к полному уравнению четвертой степени.

Рассмотрим некоторые частные виды систем, решаемых элементарно.

Пример 1.

$$\begin{cases} xy + x + y = 29, \\ xy - 2(x + y) = 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy + x + y = 29 \\ xy - 2x - 2y = 2 \end{cases} \Bigg| \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \Bigg| \begin{matrix} 2xy + 2x + 2y = 58 \\ xy - 2x - 2y = 2 \end{matrix}$$

$$3xy = 60 \text{ или } xy = 20.$$

Подставив в первое (или во второе) уравнение $xy = 20$, получим $x + y = 9$.

Тогда из системы уравнений $\begin{cases} xy = 20, \\ x + y = 9 \end{cases}$ находим

$$x_1 = 5,\ y_1 = 4 \text{ и } x_2 = 4,\ y_2 = 5.$$

Ответ. Данная система имеет два решения:

$$x_1 = 4,\ y_1 = 5;\ x_2 = 5,\ y_2 = 4.$$

Пример 2.

$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + 2y^2 = 14, \\ x^2 + xy - y^2 = 5. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + 2y^2 = 14 \\ x^2 + xy - y^2 = 5 \end{cases} \Bigg| \begin{matrix} 2 \end{matrix} \Bigg| \begin{matrix} 2x^2 - 3xy + 2y^2 = 14 \\ 2x^2 + 2xy - 2y^2 = 10 \end{matrix}$$

$$4x^2 - xy = 24.$$

Отсюда следует

$$y = \frac{4x^2 - 24}{x}.$$

Подставляя значение y во второе уравнение системы, получаем

$$11x^4 - 163x^2 + 576 = 0;\ x_1^2 = 9,\ x_2^2 = \frac{64}{11}.$$

Находим четыре значения x: $3, -3, \frac{8}{\sqrt{11}}, -\frac{3}{\sqrt{11}}$; подставив их в уравнение $4x^2 - xy = 24$, получим соответствующие значения y.

Иногда системы решаются способом разложения левой части одного из уравнений на множители, если его правая часть равна нулю.

Пример 3.

$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + 5y - 5 = 0, \\ xy + 2 - 2y - x = 0. \end{cases}$$

$$xy + 2 - 2y - x = (xy - x) + (2 - 2y) = x(y - 1) - 2(y - 1) = (y - 1)(x - 2).$$

Тогда

$$(x - 2)(y - 1) = 0 \text{ или } x - 2 = 0 \text{ или } y - 1 = 0.$$

Значит, система приводится к решению совокупности двух систем уравнений

$$\begin{cases} y - 1 = 0, \\ 2x^2 - 3xy + 5y - 5 = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x - 2 = 0, \\ 2x^2 - 3xy + 5y - 5 = 0. \end{cases}$$

Во многих случаях способ введения новых переменных значительно упрощает решение системы уравнений.

Пример 4. Решить систему

$$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{34}{15}, \\ x^2 + y^2 = 34. \end{cases}$$

Пусть $\frac{x}{y} = z$, тогда $\frac{y}{x} = \frac{1}{z}$.

Имеем

$$z + \frac{1}{z} = \frac{34}{15},\ 15z^2 - 34z + 15 = 0,\ z_1 = \frac{5}{3},\ z_2 = \frac{3}{5}.$$

Составляем две системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{3}{5}, \\ x^2 + y^2 = 34 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{5}{3}, \\ x^2 + y^2 = 34, \end{cases}$$

откуда находим четыре решения:

$$x_1 = 3,\ y_1 = 5;\quad x_3 = 5,\ y_3 = 3;$$
$$x_2 = -3,\ y_2 = -5;\quad x_4 = -5,\ y_4 = -3.$$

Пример 5. Решить систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ x + xy + y = 7. \end{cases}$$

Умножим обе части второго уравнения на 2 и прибавим к первому:

$$x^2+y^2+2xy+2(x+y)=24.$$

Положим $x+y=z$, тогда $z^2+2z-24=0$, откуда $z_1=-6$, $z_2=4$. Получаются две системы:

$$\begin{cases} x+y=-6, \\ xy=13 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x+y=4, \\ xy=3, \end{cases}$$

имеющие два действительных решения:

$$x_1=1, \quad y_1=3 \text{ и } x_2=3, \quad y_2=1.$$

Пример 6. Решить систему

$$\begin{cases} x^2-xy+y^2=21, \\ y^2-2xy=-15. \end{cases}$$

Уравняем модули свободных членов:

$$\begin{cases} x^2-xy+y^2=21 \mid 5 \\ y^2-2xy=-15 \mid 7 \end{cases} \Bigg| \begin{array}{l} 5x^2-5xy+5y^2=105 \\ 7y^2-14xy=-105 \end{array}$$

и сложим полученные уравнения:

$$5x^2-19xy+12y^2=0.$$

Так как $y\neq 0$, то разделим обе части этого уравнения на y^2:

$$5\left(\frac{x}{y}\right)^2-19\left(\frac{x}{y}\right)+12=0.$$

Полагая $\frac{x}{y}=u$, получим уравнение $5u^2-19u+12=0$, откуда $u_1=3$, $u_2=\frac{4}{5}$. Следовательно, $x=3y$ и $x=\frac{4}{5}y$.

Подставив значение $x=3y$ в одно из данных уравнений, например во второе, получим $y^2=3$, $y=\pm\sqrt{3}$, откуда $x=\pm 3\sqrt{3}$. Если взять $x=\frac{4}{5}y$, то получим $x=\pm 4$, $y=\pm 5$.

Ответ. $x_1=3\sqrt{3}$, $y_1=\sqrt{3}$,

$x_2=-3\sqrt{3}$, $y_2=-\sqrt{3}$,

$x_3=4$, $y_3=5$,

$x_4=-4$, $y_4=-5$.

§ 26. Задачи на составление систем уравнений

Задача 1. Расстояние между двумя городами, равное 480 *км*, пассажирский поезд проходит на 4 *ч* скорее товарного. Если скорость пассажирского поезда увеличить на 8 *км/ч*, а скорость товарного на 2 *км/ч*, то пассажирский поезд пройдет все расстояние на 5 *ч* скорее товарного. Найти скорость каждого поезда.

Обозначим скорость товарного поезда через x (*км/ч*), а пассажирского — через y (*км/ч*). Тогда в первом случае товарный поезд пройдет 480 *км* за $\frac{480}{x}$ *ч*, а пассажирский — за $\frac{480}{y}$ *ч*.

Так как время движения пассажирского поезда меньше времени движения товарного на 4 *ч*, то получим уравненне

$$\frac{480}{y} = \frac{480}{x} - 4.$$

Во втором случае скорость товарного поезда будет $x + 2$ (*км/ч*), а скорость пассажирского $y + 8$ (*км/ч*). Значит, товарный поезд пройдет 480 *км* за $\frac{480}{x+2}$ *ч*, а пассажирский — за $\frac{480}{y+8}$ *ч*. Тогда, согласно условию задачи, составим уравнение

$$\frac{480}{y+8} = \frac{480}{x+2} - 5.$$

Таким образом, получили систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{480}{y} = \frac{480}{x} - 4, \\ \frac{480}{y+8} = \frac{480}{x+2} - 5 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \frac{120}{y} = \frac{120}{x} - 1, \\ \frac{96}{y+8} = \frac{96}{x+2} - 1. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим $x = 30$ *км/ч*, $y = 40$ *км/ч*.

Ответ. 30 *км/ч* и 40 *км/ч*.

Задача 2. Студенты взяли на лодочной станции напрокат лодку. Сначала они спустились на 20 *км* вниз по течению реки, затем повернули обратно и вернулись на лодочную станцию, затратив на всю прогулку 7 *ч*. На обратном пути на расстоянии 12 *км* от лодочной станции они встретили плот, проплывавший мимо лодочной станции как раз в тот момент, когда они отправлялись на прогулку. Определить, с какой скоростью двигалась лодка вниз по течению реки и какова скорость течения реки.

Если обозначить скорость лодки в стоячей воде через x (*км/ч*), скорость течения реки, а следовательно, и скорость плота через y (*км/ч*), то скорость лодки по течению будет $x + y$, против течения $x - y$; время движения лодки по течению $\frac{20}{x+y}$ *ч*, против течения $\frac{20}{x-y}$ *ч*, до встречи с плотом $\frac{20}{x+y} + \frac{8}{x-y}$ и, наконец, время движения плота $\frac{12}{y}$.

Так как, согласно условию, прогулка длилась 7 *ч*, получим уравнение

$$\frac{20}{x+y}+\frac{20}{x-y}=7.$$

Поскольку время движения лодки и плота до их встречи было одно и то же, получим уравнение

$$\frac{20}{x+y}+\frac{8}{x-y}=\frac{12}{y}.$$

Решая систему

$$\begin{cases}\dfrac{20}{x+y}+\dfrac{20}{x-y}=7,\\ \dfrac{20}{x+y}+\dfrac{8}{x-y}=\dfrac{12}{y},\end{cases}$$

находим $x=7$, $y=3$. Итак, скорость лодки по течению равна 10 *км/ч*, а скорость течения реки 3 *км/ч*.

Ответ. 10 *км/ч* и 3 *км/ч*.

Задача 3. На двух прямоугольных участках земли посажено рядами 350 плодовых деревьев, причем оказалось, что на каждом участке число рядов на 1 больше числа деревьев в ряду. Какое количество деревьев было посажено в каждом ряду на том и другом участках, если на первом из них было на 130 деревьев больше, чем на втором?

Обозначим число деревьев в ряду на первом участке через x, на втором через y. Тогда число рядов на первом участке $x+1$, на втором $y+1$; деревьев на первом участке $x(x+1)$, на втором $y(y+1)$. Согласно условию задачи получаем систему уравнений

$$\begin{cases}x(x+1)-y(y+1)=130;\\ x(x+1)+y(y+1)=350.\end{cases}$$

Решив ее, находим $x_1=15$, $x_2=16$, $y_1=10$, $y_2=-11$. Значит, число деревьев в ряду на первом участке равно 15, на втором 10.

Ответ. 15; 10.

Задача 4. Деревянная балка весит 90 *кг*, а железная балка, длина которой на 2 *м* больше деревянной, весит 160 *кг*, причем вес 1 *пог. м* железной балки на 5 *кг* больше веса 1 *пог. м* деревянной балки. Найти вес 1 *пог. м* и длину каждой балки.

Приведем сокращенную запись:

Длина деревянной балки — x (*м*)
» железной » — $x+2$ (*м*)

Вес деревянной балки — 90 *кг*
Вес 1 *пог. м* деревянной балки — y (*кг*)
» 1 *пог. м* железной » — $y+5$ (*кг*)

Вес железной балки — 160 *кг*

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases}xy=90,\\ (x+2)(y+5)=160.\end{cases}$$

Решив ее, найдем $x_{1,2}=6$, $y=15$.

Ответ. Вес 1 *пог. м* деревянной балки 15 *кг*, длина деревянной балки 6 *м*, вес 1 *пог. м* железной балки 20 *кг*, длина железной балки 8 *м*.

Задача 5. По двум сторонам прямого угла по направлению к его вершине движутся равномерно два тела. В известный момент тело A отстояло на 60 *м* от вершины угла, а тело B — на 80 *м* от нее. Через 3 *сек* расстояние между A и B стало равно 70 *м*, а через следующие 2 *сек* расстояние между телами уменьшилось еще на 20 *м*. Найти скорость каждого тела.

Обозначим скорость тела A через x (*м/сек*), скорость B через y (*м/сек*). Тогда расстояние от A до вершины угла через 3 *сек* — $60 - 3x$; расстояние от B до вершины угла через 30 *сек* — $80 - 3y$; квадрат расстояиия между этими телами через 3 *сек* будет составлять $(60 - 3x)^2 + (80 - 3y)^2$. Так как по условию задачи расстояние равно 70 *м*, получаем уравнение

$$(60 - 3x)^2 + (80 - 3y)^2 = 70^2.$$

Расстояние тела A от вершины угла через 3 *сек* + 2 *сек* = 5 *сек* будет $-60 - 5x$; расстояние от тела B до вершины угла через 5 *сек* — 80 равно $-5y$; тогда квадрат расстояния между этими телами через 5 *сек* будет $(60 - 5x)^2 + (80 - 5y)^2$. Так как по условию расстояние равно $(70 - 20) = 50$ (*м*), то получаем уравнение

$$(60 - 5x)^2 + (80 - 5y)^2 = 50^2.$$

Решив систему

$$\begin{cases} (60 - 3x)^2 + (80 - 3y)^2 = 70^2, \\ (60 - 5x)^2 + (80 - 5y)^2 = 50^2, \end{cases}$$

найдем $y_{1,2} = 8$, $x_{1,2} = 6$. Следовательно, скорость тела A равна 6 *м/сек*, скорость тела B — 8 *м/сек*.

Ответ. 6 *м/сек*; 8 *м/сек*.

Задача 6. По круговой дорожке длиной 2 *км* движутся в одном направлении два конькобежца, которые сходятся через каждые 20 *мин*. Найти, с какой скоростью движется каждый конькобежец, если первый пробегает окружность на 1 *мин* скорее второго.

Обозначим скорость первого конькобежца через x (*км/мин*), скорость второго — через y (*км/мин*). Тогда первый пройдет всю дорожку за $\frac{2}{x}$ *мин*, второй за $\frac{2}{y}$ *мин*; так как первый из них пробегает дорожку на 1 *мин* быстрее второго, получаем уравнение

$$\frac{2}{y} - \frac{2}{x} = 1.$$

Каждую минуту расстояние между конькобежцами увеличивается на $x - y$. За время, прошедшее от одной встречи до следующей (т. е. за 20 *мин*), расстояние должно увеличиться на 2 *км*, поэтому $20(x - y) = 2$. Полученная система уравнений имеет решение $x_1 = \frac{1}{2}$; $y_1 = \frac{2}{5}$; $x_2 = -\frac{2}{5}$; $y_2 = -\frac{1}{2}$. Значит, скорость первого конькобежца $\frac{1}{2}$ *км/мин* = 30 *км/ч*, а скорость второго — $\frac{2}{5}$ *км/мин* = 24 *км/ч*.

Ответ. 30 *км/ч*, 24 *км/ч*.

Задача 7. При совместной работе двух тракторов различной мощности колхозное поле было вспахано за 8 дней. Если бы половину поля вспахать сначала одним трактором, то при дальнейшей работе двух тракторов вся работа была бы закончена за 10 дней. За сколько дней можно было бы вспахать все поле каждым из тракторов?

Пусть первым трактором можно вспахать все поле за x дней, вторым — за y дней. Первое условие дает

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{8}.$$

Первый трактор может вспахать половину поля за $\frac{1}{2}x$ дней. По условию другая половина может быть вспахана двумя тракторами за $10-\frac{1}{2}x$ дней. Отсюда получаем второе уравнение

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{\frac{1}{2}}{10-\frac{1}{2}x}.$$

Решив систему уравнений, находим: $x=12$, $y=24$. Следовательно, первым трактором можно вспахать поле за 12 дней, вторым — за 24 дня.

Ответ. 12 дней, 24 дня.

§ 27. Неравенства

Понятие неравенства. Два числа или выражения, соединенные знаком «больше» ($>$) или знаком «меньше» ($<$), образуют неравенство. Например:

$$3<8;\quad 5>-2;\quad \frac{x-3}{2}>3x-1;\quad \frac{a+2}{a+3}<3a-2;\quad m+n>7.$$

Выражение, стоящее слева от знака неравенства, называется левой частью, а выражение, стоящее справа от знака неравенства,— правой частью.

Знаки $>$ и $<$ противоположны друг другу. Если два неравенства имеют противоположные знаки, то они называются *неравенствами противоположного смысла*. Так, $-4>-5$ и $2<5$ являются неравенствами противоположного смысла.

Иногда между двумя числами или выражениями ставят знаки $\geqslant$ (не меньше) и $\leqslant$ (не больше), например

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}.$$

Такие записи называют *нестрогими неравенствами*.

Примечания. 1. Знаки $>$ (больше) и $<$ (меньше) предложил английский алгебраист Т. Гарриот (1560—1621) в сочинении по алгебре, опубликованном посмертно в 1631 г.

2. Неравенствами называют также два числа или выражения, соединенных знаком $\neq$ (не равно). Однако дальше речь будет итти не о таких неравенствах.

Неравенства бывают числовые и буквенные. Числовыми называют такие неравенства, обе части которых есть числа, записанные цифрами. Если хотя бы одна часть неравенства есть буквенное выражение, такое неравенство называется буквенным.

Всякое верное числовое неравенство, а также всякое буквенное неравенство, справедливое при всех допустимых значениях входящих в него букв, называется *тождественным неравенством*. Например:

$$\sqrt{2}+\sqrt{5}>\sqrt{10},\ ab\leqslant\frac{a^2+b^2}{2},\ x^2+x+1>0.$$

Свойства тождественных неравенств. 1. Если первое число больше второго, а второе больше третьего, то первое также больше третьего. С помощью букв это свойство (его называют свойством транзитивности) можно записать так:

$$\text{если } a>b \text{ и } b>c, \text{ то } a>c.$$

2. Неравенство не нарушится, если к каждой части его прибавить одно и то же число, т. е.

$$\text{если } a>b, \text{ то } a+c>b+c.$$

Примеры. А. К обеим частям неравенства $9>5$ прибавим по 7, получим $16>12$.

Б. Из обеих частей неравенства $-12<1$ вычтем по 5, т. е. прибавим по -5, получим $-7<-4$.

3. *Любой* член неравенства можно перенести из одной части в другую, переменив его знак на противоположный, т. е. из $a+b>c$ следует, что $a>c-b$, $a+b-c>0$.

4. Если обе части неравенства имеют одинаковые члены, их можно опустить, т. е. из неравенства $a+c>b+c$ следует неравенство $a>b$.

5. Два неравенства одинакового смысла можно почленно складывать; при этом получим неравенство такого же смысла, как и данные.

Примеры.

$$\begin{array}{r} 3<9 \\ +\ -2<1 \\ \hline 1<10 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a>b \\ +\ c>d \\ \hline a+c>b+d. \end{array}$$

6. Из одного неравенства можно почленно вычесть другое неравенство противоположного смысла, оставляя знак того неравенства, из которого вычиталось другое.

Примеры.

$$\begin{array}{r} -10<0 \\ -\ -8>-13 \\ \hline -2<13 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a>b \\ -\ c<d \\ \hline a-c>b-d. \end{array}$$

7. Неравенство остается верным, если обе части его умножить на одно и то же положительное число. Неравенство переходит в равенство $0=0$, если обе части его умножить на нуль. Неравенство меняет

смысл на противоположный, если обе части его умножить на одно и то же отрицательное число. Это свойство кратко записывается так.

если $a > b$, то при $c > 0$, $ac > bc$;
при $c = 0$, $ac = bc$;
при $c < 0$, $ac < bc$.

Примеры.

Данное неравенство	Множитель	Новое неравенство
$7 > 4$	2	$14 > 8$
$-9 < -1$	4	$-36 < -4$
$13 > 9$	-2	$-26 < -18$
$3 > -10$	-5	$-15 < 50$
$-3{,}2 > -7{,}5$	0	$0 = 0$

Примечание. Так как деление на число, отличное от нуля, можно рассматривать как умножение на обратное ему число, то это свойство распространяется и на деление обеих частей неравенства на положительное и отрицательное число:

$$\text{если } a > b, \text{ то } \frac{a}{c} > \frac{b}{c} \text{ при } c > 0$$

и

$$\frac{a}{c} < \frac{b}{c} \text{ при } c < 0.$$

8. Если почленно перемножить два неравенства одинакового смысла с положительными членами, то получится неравенство того же смысла, т.е.

если a, b, c, d — положительные и $a > b$, $c > d$, то $ac > bd$.

9. Неравенство с положительными членами не нарушается, если каждую его часть возвести в степень с одним и тем же натуральным показателем, т. е. если a, b — положительные, n — натуральное и $a > b$, то $a^n > b^n$.

10. Если a, b — положительные, n — натуральное и $a > b$, то $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$.

Примечание. Все эти свойства, сформулированные для строгих неравенств, остаются в силе и для нестрогих: везде вместо знака $>$ можно поставить $\geqslant$.

Доказательства неравенств. Убеждаются в тождественности неравенств с помощью доказательств.

Пример 1. Доказать неравенство (при $a > 0$, $b > 0$)

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}.$$

Доказательство. При любых положительных a и b $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqslant 0$, откуда $a - 2\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} + b \geqslant 0$, $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$, $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, что и требовалось доказать.

Примечание. Равенство имеет место лишь в том случае, когда $a = b$.

Пример 2. Доказать, что при любом значении x

$$x^2 + x + 1 > 0.$$

Доказательство.

$$x^2+x+1=x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}.$$

В полученном выражении первое слагаемое $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$ не может быть отрицательным $\left($оно равно нулю при $x=-\frac{1}{2}$, а при всех остальных значениях x оно положительное$\right)$. Если же к нему прибавить число $\frac{3}{4}$, получим всегда положительное число. Отсюда и следует, что выраженне x^2+x+1 положительное при всех значениях x.

Пример 3. Доказать, что при положительных a, b и c

$$abc\geqslant(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a).$$

Доказательство. При положительных a, b и c только один из трехчленов $a+b-c$, $a-b+c$ и $b+c-a$ может быть отрицательным. Действительно, если предположим, что какие-нибудь два из них отрицательные, например

$$a+b-c<0 \text{ и } a-b+c<0,$$

то, сложив их почленно, получим $2a<0$ или $a<0$, что противоречит условию. Следовательно, если один из трехчленов отрицательный, то два других — положительные. В этом случае левая часть неравенства положительна, а правая — отрицательна и, значит, неравенство верно.

Если хоть одно из выражений $a+b-c$, $a-b+c$, $b+c-a$ равно нулю, то правая часть рассматриваемого неравенства равна нулю, а левая — больше нуля и, следовательно, в этом случае неравенство справедливо.

Остается доказать это неравенство для случая, когда все три трехчлена в правой части неравенства положительны. В этом случае верны неравенства

$$a^2\geqslant a^2-(b-c)^2,\ b^2\geqslant b^2-(a-c)^2,\ c^2\geqslant c^2-(a-b)^2$$

или

$$a^2\geqslant(a-b+c)(a+b-c),$$
$$b^2\geqslant(b-a+c)(b+a-c),$$
$$c^2\geqslant(c-a+b)(c+a-b),$$

причем их правые и левые части положительны. Значит, их можно почленно перемножить. В результате получим

$$a^2b^2c^2\geqslant(a-b+c)(a+b-c)(b-a+c)(b+a-c)\times$$
$$\times(c-a+b)(c+a-b)$$

или

$$a^2b^2c^2\geqslant(a+b-c)^2(a-b+c)^2(b+c-a)^2,$$

откуда

$$abc\geqslant(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a),$$

что и требовалось доказать.

Пример 4. Доказать, что при любом натуральном n

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<1.$$

Доказательство.

$$\frac{1}{2^2}+\frac{2}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+$$
$$+\frac{1}{(n-1)n}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+$$
$$+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{n}<1.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<1.$$

Пример 5. Доказать неравенство

$$\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}}<3$$

при условии, что левая часть его содержит любое конечное число радикалов.

Доказательство. Заменим под знаком последнего внутреннего радикала число 6 на 9. В полученном выражении

$$\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots+\sqrt{6+\sqrt{9}}}}}$$

все корни последовательно извлекаются, оно оказывается равным 3. Но левая часть данного неравенства меньше полученного выражения, следовательно, данное неравенство справедливо.

Замечательные неравенства. Приведем без доказательств* некоторые неравенства, часто встречающиеся в математических работах.

1. $|a_1+a_2+\cdots+a_n|\leqslant|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$,

т. е. модуль суммы любых чисел не больше суммы их модулей.

2. Если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — числа положительные, то

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

т. е. *среднее геометрическое* нескольких положительных чисел не больше их *среднего арифметического*.

Равенство имеет место лишь в том случае, когда все числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равны.

---

* Доказательства их см. в кн.: П. П. Коровкин. Неравенства. ГИТТЛ, М.—Л., 1951; С. И. Новоселов, Специальный курс элементарной алгебры, «Высшая школа», М., 1965.

3. Если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — числа положительные, то

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}},$$

т. е. среднее арифметическое нескольких положительных чисел не больше их *среднего квадратического*.

Равенство имеет место лишь в том случае, когда все числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равны.

4. Если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — числа положительные, то

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n},$$

т. е. *среднее гармоническое* нескольких положительных чисел не больше их среднего геометрического.

Равенство имеет место лишь в том случае, когда все числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равны.

5. $$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \leqslant \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} \times \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2},$$

какие бы ни были числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots b_n$. Знак равенства здесь имеет место лишь в случае

$$a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = \cdots = a_n : b_n.$$

6. Если $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$ и $0 < b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$, то

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} \geqslant \geqslant \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}{n}.$$

Если же $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$, но $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n > 0$, то

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} \geqslant \geqslant \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}{n}.$$

В обоих случаях равенство имеет место, когда

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n \text{ и } b_1 = b_2 = \cdots = b_n.$$

7. При любых действительных $a_1, a_2, \ldots, a_n$

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} \leqslant |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|.$$

Равенство имеет место только при $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.

8. При любых действительных $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$

$$\left|\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}-\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}\right| \leqslant$$
$$\leqslant |a_1-b_1|+|a_2-b_2|+\cdots+|a_n-b_n|.$$

Равенство имеет место в случае, когда каждое из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ равно нулю.

9. При всех действительных $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$

$$\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+\cdots+(a_n-b_n)^2} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}.$$

Равенство имеет место, если

$$a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = \cdots = a_n : b_n.$$

10. При любых действительных $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$

$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)\times$$
$$\times (b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2).$$

Равенство имеет место при условии

$$a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = \cdots = a_n : b_n.$$

11. При положительных a и любом рациональном $r > 1$

$$(1+a)^r > 1+ra.$$

§ 28. Перавенства первой степени

Неравенства с неизвестными. Неравенство, содержащее буквы, обозначающие неизвестные числа, называется неравенством с неизвестными. Например, в неравенстве $2x+3>12$ буквой x обозначено неизвестное число. Это неравенство с одним неизвестным x. Неравенство $2x+3y>5$ — с двумя неизвестными x и y.

Если в неравенство с одним неизвестным вместо неизвестного подставить какое-нибудь число и в результате получится верное числовое неравенство, то говорят, что это число удовлетворяет данному неравенству. Каждое число, удовлетворяющее неравенству, называют решением этого неравенства. Решить неравенство — значит найти все его решения. Для решения неравенств, так же как и уравнений, их надо преобразовать в равносильные исходным более простые неравенства.

Два неравенства называются *равносильными* (или *эквивалентными*), если каждое из них имеет те и только те решения, что и другое. Неравенства, не имеющие решений, также принято называть равносильными.

Преобразования неравенств в равносильные основаны на следующих теоремах.

Теорема 1. *Если к обеим частям неравенства прибавить одно и то же выражение, имеющее смысл при всех допустимых значениях неизвестных, то новое неравенство будет равносильно данному.*

Теорема 2. *Если обе части неравенства умножить на одно и то же положительное число, то новое неравенство будет равносильно данному.*

Теорема 3. *Если обе части неравенства умножить на одно и то же отрицательное число и переменить знак неравенства на противоположный, то новое неравенство будет равносильно данному.*

Следствия.

1. Члены неравенства можно переносить из одной части в другую, изменяя их знаки на противоположные.

2. Если в обеих частях неравенства имеются одинаковые члены, то их можно отбросить.

В результате таких преобразований полученные неравенства будут равносильны данным.

Неравенства первой степени с одним неизвестным. Неравенство с одним неизвестным, которое после раскрытия скобок и приведения подобных членов принимает вид $ax \gtrless b$, где $a \neq 0$, а $\gtrless$ один из знаков $>, <, \geqslant, \leqslant$ называется неравенством первой степени с одним неизвестным.

Например, $3x < 5$, $\frac{1}{2}z - 7 \leqslant \frac{6z-3}{7}$, $ax \leqslant b$ (при $a \neq 0$) — неравенства первой степени с одним неизвестным. Но неравенство $3(x-5) > 3x - 7$ не есть неравенство первой степени.

Пусть имеем неравенство первой степени $ax > b$. Разделив обе его части на a, получим

$$x > \frac{b}{a}, \text{ если } a > 0,$$

$$x < \frac{b}{a}, \text{ если } a < 0.$$

Так записывают множество всех решений данного неравенства.

Приведем примеры решения неравенств первой степени с одним неизвестным.

Пример 1. Решить неравенство $6x + 20 > 3x + 35$.

$$6x - 3x > 35 - 20, \quad 3x > 15, \quad x > 5.$$

Ответ. $x > 5$. Этот ответ можно изобразить на числовой оси (рис. 12).

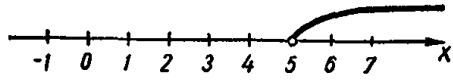


Рис. 12.

Пример 2. Решить неравенство

$$\frac{x+3}{3} - 8 > \frac{2x-1}{3} + 1.$$

$$x + 3 - 24 > 2x - 1 + 3, \quad x - 24 > 2x - 1,$$

$$x - 2x > -1 + 24,$$

$$-x > 23,$$

$$x < -23.$$

Ответ. $x < -23$.

Пример 3. Решить неравенство

$$\frac{z-1}{3}-2(1-4z)>\frac{1}{4}z-\frac{7-52z}{6}.$$

$$\frac{z-\overset{4}{\overset{\smile}{1}}}{3}-2(1-\overset{12}{\overset{\smile}{4z}})>\frac{1}{4}z-\frac{7-52\overset{2}{\overset{\smile}{z}}}{6},$$

$$4(z-1)-24(1-4z)>3z-2(7-52z),$$

$$4z-4-24+96z>3z-14+104z,$$

$$4z+96z-3z-104z>-14+4+24,$$

$$-7z>14,\quad z<-2.$$

Ответ. $z<-2$.

Система неравенств первой степени с одним неизвестным. Чтобы решить систему двух или нескольких неравенств с одним неизвестным, надо решить каждое из данных неравенств отдельно и взять общую часть множеств всех их решений.

Пример. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 3x+5<17-\\ 4x>x-6. \end{cases}$$

Решаем каждое из неравенств:

$$\begin{array}{ll} 3x+5<17-x, & 4x>x-6,\\ 3x+x<17-5, & 4x-x>-6,\\ 4x<12, & 3x>-6,\\ x<3. & x>-2. \end{array}$$

Итак, данная система равносильна $\begin{cases} x<3,\\ x>-2. \end{cases}$

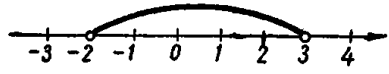


Рис. 13.

Как видно из рис. 13, обоим неравенствам удовлетворяют числа больше -2, но меньше 3.

Ответ. $-2<x<3$.

Пример. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 7x>2x+20,\\ x-3<6-2x. \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} 7x>2x+20, & x-3<6-2x,\\ 7x-2x>20, & x+2x<6+3,\\ 5x>20, & 3x<9,\\ x>4. & x<3. \end{array}$$

Первому неравенству удовлетворяют числа, большие 4, а второму — меньшие 3. Но нет такого числа, которое было бы одновременно больше 4 и меньше 3 (рис. 14).

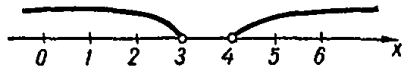


Рис. 14.

Ответ. Данная система неравенств решений не имеет.

Пример. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 8x + 12 > 2x, \\ 2(x + 2) + 3 > 7, \\ 0{,}5(x + 1) \geqslant 2. \end{cases}$$

$8x + 12 > 2x,$	$2(x + 2) + 3 > 7,$	$0{,}5(x + 1) \geqslant 2,$
$8x - 2x > -12,$	$4x + 4 + 3 > 7,$	$0{,}5x + 0{,}5 \geqslant 2,$
$6x > -12,$	$4x > 0,$	$0{,}5x \geqslant 1{,}5,$
$x > -2.$	$x > 0.$	$x \geqslant 3.$

Всем данным неравенствам удовлетворяют числа $x \geqslant 3$ (рис. 15).

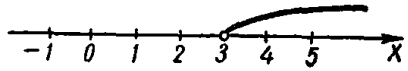


Рис. 15.

Ответ. $x \geqslant 3$.

Неравенства, в которых некоторые члены входят под знаком абсолютной величины. Неравенство $|x| < a$ равносильно такому двойному неравенству: $-a < x < a$ или такой системе:

$$\begin{cases} x < a, \\ x > -a. \end{cases}$$

Пример. Решить неравенство

$$|3x + 2| < 5.$$

Данное неравенство равносильно такой системе:

$$\begin{cases} 3x + 2 < 5, \\ 3x + 2 > -5. \end{cases}$$

Решим ее.

$3x + 2 < 5,$	$3x + 2 > -5,$
$3x < 3,$	$3x > -7,$
$x < 1.$	$x > -\frac{7}{3}.$

Ответ. $-\frac{7}{3} < x < 1.$

Неравенству $|x| > a$ при $a \geqslant 0$ удовлетворяют все решения неравенства $x > a$ и все решения неравенства $x < -a$. При $a < 0$ каждое действительное число x есть решением неравенства $|x| > a$.

Пример. Решить неравенство

$$|2x-1|>5.$$

$$\begin{array}{rr} 2x-1>5, & 2x-1<-5, \\ 2x>6, & 2x<-4, \\ x>3. & x<-2. \end{array}$$

Ответ. Данному неравенству удовлетворяют все числа $x>3$ и все числа $x<-2$ (рис. 16).

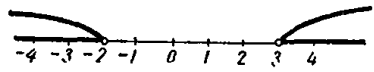


Рис. 16.

Примечание. Данное неравенство распалось на два изолированных неравенства, но не на их систему. Система двух полученных неравенств не имеет решений, а неравенство рассматриваемого вида всегда имеет решения.

§ 29. Неравенства второй степени и высших степеней

Неравенства второй степени. Неравенство второй степени с одним неизвестным в общем случае записывается так:

$$a_1x^2+b_1x+c_1>a_2x^2+b_2x+c_2.$$

Его всегда можно записать в виде

$$ax^2+bx+c>0 \text{ или } ax^2+bx+c<0.$$

Коэффициент a можно считать положительным (если бы он был отрицательным, можно было бы обе части неравенства умножить на -1, изменив знак неравенства на противоположный).

Чтобы решить неравенство $ax^2+bx+c>0$, надо сначала вычислить дискриминант b^2-4ac. Если он окажется положительным, т. е. если трехчлен в левой части неравенства будет иметь разные действительные корни, то данному неравенству удовлетворяют все числа, которые больше большего корня и меньше меньшего корня. Если дискриминант отрицателен, то данному неравенству удовлетворяют все действительные числа. Если, наконец, дискриминант будет равен нулю, то данному неравенству будут удовлетворять все действительные числа, кроме $-\frac{b}{2a}$.

Неравенству $ax^2+bx+c<0$ при положительном дискриминанте удовлетворяют все те значения неизвестного, которые больше меньшего корня трехчлена в левой части, но меньше большего корня. Если же дискриминант равен нулю или отрицательный, то данное неравенство не имеет решений (см. стр. 217).

Пример 1. Решить неравенство $2x^2+3x-2>0$.

Здесь $b^2-4ac=9+16=25>0$. Найдем корни трехчлена в левой части. Для этого решим уравнение $2x^2+3x-2=0$;

$$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{25}}{4};\quad x_1=-2;\ x_2=0{,}5.$$

Ответ. $x<-2$ и $x>0{,}5$.

Пример 2. Решить неравенство $-3x^2+5x-4>0$.

Так как коэффициент при x^2 здесь отрицательный, умножим обе части неравенства на -1:

$$3x^2-5x+4<0;\ b^2-4ac=25-48=-23<0.$$

Ответ. Данное неравенство не имеет решений.

Пример 3. Решить неравенство $x^2-5x+6<0$.

$$b^2-4ac=25-24=1>0.$$

$$x_{1,2}=\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{25}{4}-6}=\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2};$$

$$x_1=2,\ x_2=3.$$

Ответ. $2<x<3$.

Пример 4. Решить неравенство $2x^2-5x+6>0$.

$$b^2-4ac=25-48=-23<0.$$

Ответ. Данному неравенству удовлетворяет каждое действительное число.

Пример 5. Решить неравенство $x^2-6x+9>0$.

$$b^2-4ac=36-36=0.$$

Ответ. Данному неравенству удовлетворяют все числа, кроме 3.

Неравенства высших степеней. Пусть дано неравенство, левая часть которого какой-нибудь многочлен, содержащий одну букву — неизвестное, а правая — нуль. В общем случае такие неравенства решать трудно. Однако, если известно разложение многочлена на множители, такие неравенства можно решать элементарными способами.

Пример. Решить неравенство $x^4-3x^3-x+3<0$.

Разлагая на множители левую часть, перепишем неравенство в виде

$$(x-1)(x-3)(x^2+x+1)<0.$$

Трехчлен x^2+x+1 имеет отрицательный дискриминант и его значения при всех действительных значениях x положительны, следовательно, не влияют на знак. Поэтому достаточно решить квадратное неравенство $(x-1)(x-3)<0$, или $x^2-4x+3<0$, из которого находим $1<x<3$.

Пример. Решить неравенство

$$(x+6)(x-1)(x+1)x<0.$$

Многочлен в левой части этого неравенства имеет следующие корни: -6, -1, 0 и 1. Его корни делят числовую ось на 5 интервалов. В этих интервалах каждый из сомножителей знакопостоянный. Знак многочлена в каждом интервале определяется по числу отрицательных сомножителей.

Как видно из таблицы 4, выражение, стоящее в левой части неравенства, отрицательно при $-6<x<-1$ и $0<x<1$.

Ответ. $-6<x<-1$ и $0<x<1$.

Примечание. Еще проще такие неравенства можно решать с помощью геометрической иллюстрации. Так как многочлен $(x+6)\times$ $\times(x-1)(x+1)x$ не имеет кратных корней, то кривая — его график — нигде не касается оси ox, а только пересекает ее в точках, соот-

Таблица 4

Множитель	Интервал				
	$(-\infty; -6)$	$(-6; -1)$	$(-1; 0)$	$(0; 1)$	$(1; \infty)$
$x+6$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$P(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

ветствующих корням многочлена. Поэтому достаточно определить знак данного многочлена в каком-нибудь одном интервале, на которые делят числовую ось корни многочлена, чтобы узнать, в каких интервалах график данного многочлена расположен ниже оси ox, а в каких выше, т. е. при каких значениях x данный многочлен отрицателен, а при каких положителен.

Если же многочлен в левой части неравенства имеет кратные корни, тогда в двух смежных интервалах многочлен может иметь одинаковые знаки. Однако в этом случае легко перейти к новому неравенству, левая часть которого не будет иметь кратных корней.

Пример. Решить неравенство $(x-2)^5(x^2-5x+4)^2<0$.

Решение. При всех значениях x числа $(x-2)^5$ и $x-2$ имеют одинаковые знаки, следовательно, показатель степени 5 в данном неравенстве можно не писать. Выражение $(x^2-5x+4)^2$ положительно при всех значениях x, кроме его корней 1 и 4. Поэтому на множестве всех действительных чисел, кроме 1 и 4, данное неравенство равносильно неравенству $x-2<0$, которому удовлетворяют все действительные значения $x<2$. Исключив из этого множества числа 1 и 4, не удовлетворяющие данному неравенству, получим окончательный ответ:

$$x<1 \text{ и } 1<x<2.$$

Дробные неравенства. Так как частное $\frac{A}{B}$ и произведение AB — числа одного и того же знака, то неравенство $\frac{A}{B}>0$, где A и B — какие-нибудь многочлены, равносильно неравенству $A\cdot B>0$. Поэтому строгое дробное неравенство всегда можно заменить равносильным ему целым алгебраическим неравенством.

Таблица 5

Множитель	Интервал			
	$(-\infty; -3)$	$(-3, 2)$	$(2, 5)$	$(5, \infty)$
$x+3$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	$-$	$+$
$P(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Пример. Решить неравенство

$$\frac{x-2}{(x-5)(x+3)}<0.$$

Данное неравенство равносильно $(x+3)(x-2)(x-5)<0$.

Корни многочлена $(x+3)(x-2)(x-5)$ равны -3, 2 и 5. Составляем таблицу 5.

Как видим, данный многочлен принимает отрицательные значения при $-\infty<x<-3$ и $2<x<5$ (рис. 17).

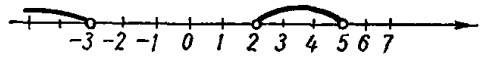


Рис. 17.

Ответ. $x<-3$ и $2<x<5$.

Иррациональные неравенства. Общий метод решения этих неравенств состоит в постепенном уединении радикалов и в возведении в степень, равную показателю корня. Так можно освободиться от иррациональности. Необходимо помнить, что при возведении в степень может получиться, что область значений неизвестного исходного неравенства будет только частью области значений неизвестного полученного неравенства. Поэтому в таких случаях необходимо всегда проводить проверку решения.

Можно решать иррациональные неравенства и другим способом. Известно, например, что неравенство вида $\sqrt{A}<B$ равносильно системе неравенств $A\geqslant 0$, $B>0$, $A<B^2$. Поэтому решение такого иррационального неравенства можно свести к решению системы рациональных неравенств. При этом проверка решений не является обязательной.

Пример 1. Решить неравенство $\sqrt{(x+2)(x-5)}<8-x$.

Данное неравенство равносильно системе

$$\left|\begin{array}{l|l} (x+2)(x-5)\geqslant 0 & x\leqslant -2 \text{ и } x\geqslant 5 \\ 8-x>0 & x<8 \\ (x+2)(x-5)<(8-x)^2 & x<5\frac{9}{13} \end{array}\right.$$

Ответ. $x\leqslant -2$; $5\leqslant x<5\frac{9}{13}$.

Пример 2. Решить неравенство

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}>\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}.$$

Чтобы определить область допустимых значений для x, рассмотрим второй радикал. Должно быть $x-\sqrt{x}>0$, откуда $x\geqslant 1$. Остальные радикалы при этих значениях x существуют. Следовательно, область допустимых значений для неизвестного: $x\geqslant 1$.

При всех допустимых значениях x выражение $\sqrt{x+\sqrt{x}}$ положительное, следовательно, на него можно умножить обе части неравенства. Получим

$$x+\sqrt{x}-\sqrt{x^2-x}>\sqrt{x} \text{ или } x>\sqrt{x^2-x}.$$

Обе части этого неравенства положительны при всех допустимых значениях x. Значит, его можно возвести в квадрат: $x^2 > x^2 - x$; отсюда следует

$$x > 0.$$

Обоим неравенствам $x > 0$ и $x \geqslant 1$ удовлетворяют только значения $x \geqslant 1$.

Ответ. $x \geqslant 1$.

Комплексные числа и уравнения высших степеней

§ 30. Комплексные числа

Определения. В множестве действительных чисел не всякое уравнение степени выше первой имеет решение. Так, например, уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет действительных корней, поскольку не существует действительного числа, квадрат которого равен числу -1. Это привело к расширению множества действительных чисел путем введения чисел новой природы. Эти новые числа называют мнимыми.

Число, удовлетворяющее равенству $x^2 = -1$, обозначают буквой i, оно называется *мнимой единицей**. Таким образом, $i^2 = -1$.

Число $z = a + bi$, где a и b — любые действительные числа; i — мнимая единица, называется комплексным числом. Числа a и bi называются соответственно действительной и мнимой частями комплексного числа z.

При $a = 0$ комплексное число $a + bi$ обращается в чисто мнимое число bi; при $b = 0$ получим число $a + 0i$, т. е. действительное число a.

Таким образом, множество комплексных чисел включает в себя и все действительные числа. Каждое известное нам число, например $2,\ 0,\ \frac{2}{13},\ 0{,}06,\ \sqrt{5},\ 3 + i,\ i$, можно назвать комплексным. На схеме (стр. 176) показана связь между различными видами чисел.

Комплексные числа вида $a + bi$ и $a - bi$ называются *сопряженными*. Комплексные числа вида $a + bi$ и $-a - bi$ называются *противоположными*.

Два комплексных числа $a + bi$ и $a' + b'i$ считаются равными в том и только в том случае, если $a = a'$, $b = b'$.

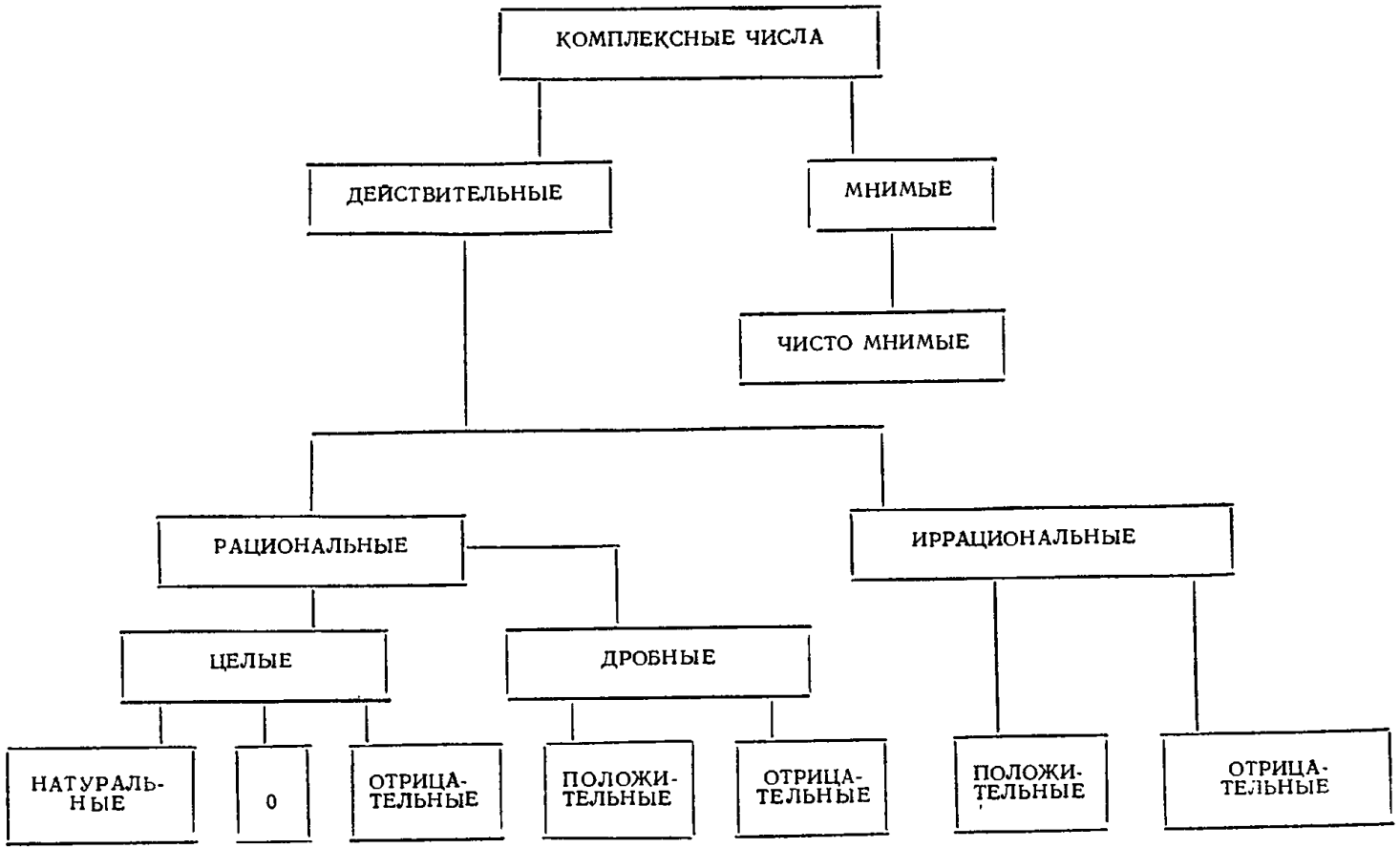
Из этого определения вытекает, что комплексное число $a + bi$ равно нулю тогда и только тогда, когда $a = 0$ и $b = 0$.

Примечание. Относительно комплексных чисел не принято никакого соглашения, какое из них считать больше другого.

Действия над комплексными числами. Над комплексными числами производятся такие же действия, как и над вещественными. Чтобы произвести какое-нибудь действие над комплексными числами вида $a + bi$, надо произвести действия над двучленами такого вида по тем правилам, которые известны для двучлена с вещественными членами,

---

* Существуют два различных мнимых числа, удовлетворяющих равенству $x^2 = -1$. Мнимой единицей называют только одно из них. Его обозначают символом i. Второе число, удовлетворяющее этому же равенству, обозначают символом $-i$ и называют числом, сопряженным к мнимой единице.


КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА
ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ
МНИМЫЕ
ЧИСТО МНИМЫЕ
РАЦИОНАЛЬНЫЕ
ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ
ЦЕЛЫЕ
ДРОБНЫЕ
НАТУРАЛЬНЫЕ
0
ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ
ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ
ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ
ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ
ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ

и, наконец, в результате заменить везде i^2 на -1. Исходя из этого, действия над комплексными числами определяются так.

Сложение. Суммой комплексных чисел $a + bi$ и $a' + b'i$ называется комплексное число $(a + a') + (b + b')i$.

Отсюда следует, что сумма сопряженных комплексных чисел $a + bi$ и $a - bi$ равна действительному числу* $2a$, комплексное число $a + bi$ можно рассматривать как сумму вещественного числа a и чисто мнимого числа bi.

Примеры. $(4 + 2i) + (-3 + i) = 1 + 3i$; $(0 + 2i) + (0 + 5i) = 0 + 7i$, т. е. $2i + 5i = 7i$ $(-5 + 8i) + (-3 - 8i) = -8$.

Для сложения комплексных чисел справедливы те же основные законы, что и для вещественных чисел:

$$(a + bi) + (c + di) = (c + di) + (a + bi),$$

$$[(a + bi) + (c + di)] + (m + ni) = (a + bi) + [(c + di) + (m + ni)].$$

Вычитание. Исходя из определения вычитания как действия, обратного сложению, разность комплексных чисел $a + bi$ и $a' + b'i$ находят так:

$$(a + bi) - (a' + b'i) = (a - a') + (b - b')i.$$

Разностью двух комплексных чисел может быть комплексное, действительное и чисто мнимое число.

Примеры. $(1 - i) - (2 - 3i) = -1 + 2i$; $(4 + 5i) - (2 + 5i) = 2 + 0i = 2$; $(9 - 8i) - (9 + 8i) = -16i$.

Умножение. Произведением комплексных чисел $a + bi$ и $a' + b'i$ называется комплексное число

$$(aa^2 - bb') + (ab' + ba')i.$$

Отсюда следует, что для умножения комплексных чисел достаточно перемножить их как алгебраические двучлены и в полученном результате заменить $i^2 = -1$.

Произведение сопряженных чисел** $a + bi$ и $a - bi$ есть вещественное число, равное $a^2 + b^2$.

Пример. $(2 + i)(2 - i) = 4 - i^2 = 5$.

Умножение комплексных чисел подчиняется тем же осиовным законам, что и умножение действительных чисел.

Деление. Деление комплексных чисел можно определить как действие, обратное умножению. Отсюда следует, что частное от деления комплексного числа $a + bi$ на число $a' + b'i$ равно

$$\frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} + \frac{a'b - ab'}{a'^2 + b'^2}\, i.$$

Практически удобнее всего деление комплексных чисел проводить следующим образом: сначала умножить делимое и делитель на число, сопряженное делителю, после чего делитель станет действительным положительным числом, а затем провести деление действительной и мнимой частей отдельно.

---

* Сумма двух несопряженных комплексных чисел тоже может быть действительным числом, например $(7 + 3i) + (2 - 3i) = 9$.

** Произведение двух несопряженных комплексных чисел тоже может быть действительным числом; например $(2 + 3i)(4 - 6i) = 26$. Если же и сумма, и произведение двух комплексных чисел являются действительными числами, то эти комплексные числа непременно сопряженные.

Пример.

$$\frac{-2+5i}{-3-4i}=\frac{(-2+5i)(-3+4i)}{(-3-4i)(-3+4i)}=\frac{-14-23i}{25}=-0{,}56-0{,}92i.$$

Возведение в степень. Предварительно найдем результаты от возведения в степень мнимой единицы i, зная, что $i^2=-1$.

$$i^1=i;\quad i^3=-i;\quad i^5=i;\quad i^7=-i;$$
$$i^2=-1;\quad i^4=1;\quad i^6=-1;\quad i^8=1.$$

Мы получили, таким образом, четыре чередующихся значения:

$$i^{4k}=+1;\quad i^{4k+1}=i;\quad i^{4k+2}=-1;\quad i^{4k+3}=-i,$$

где

$$k=0,\ \pm1,\ \pm2 \text{ и т. д.}$$

Следует иметь в виду, что i^0 принимается равным 1.

Возведение комплексного числа в целую степень производится так:

$$(a+bi)^n=\underbrace{(a+bi)(a+bi)\cdots(a+bi)}_{n\text{ раз}};$$
$$(a+bi)^{-n}=\frac{1}{(a+bi)^n}.$$

Здесь n — натуральное число. Умножение можно проводить последовательно. Кроме того, принимается $(a+bi)^0=1$.

Извлечение квадратного корня. Извлечение корня из комплексного числа есть действие, обратное возведению в степень, посредством которого по данной степени (подкоренное число) и данному показателю степени (показатель корня) находят основание (корень). В множестве комплексных чисел действие извлечения корня всегда выполнимо, и в результате получается столько значений, каков показатель корня. В частности, квадратный корень имеет два значения, которые находят по формуле

$$\sqrt{a+bi}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}\pm i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right),$$

где знак «+» в скобках берется при $b>0$, а знак «—» — при $b<0$.

Пример.

$$\sqrt{5+12i}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{25+144}+5}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{25+144}-5}{2}}\right)=$$
$$=\pm\left(\sqrt{\frac{18}{2}}+i\sqrt{\frac{8}{2}}\right)=\pm(\sqrt{9}+i\sqrt{4})=\pm(3+2i).$$

Геометрическое изображение комплексных чисел. Известно, что действительные числа можно изображать на прямой. Комплексные числа $z=a+bi$ взаимно однозначно сопоставляются с парами дей-

ствительных чисел (a, b). Поэтому комплексное число $z = a + bi$ условились геометрически изображать точкой M, у которой в прямоугольной системе координат абсцисса равна a, а ордината b (рис. 18).

Комплексное число можно также изображать направленным отрезком (вектором) OM, т. е. отрезком прямой, у которого указано, какая из ограничивающих его точек является началом и какая концом. В нашем случае O есть начало, а M — конец. Значит, комплексное число $z = a + bi$ изображают вектором, начало которого совпадает с началом координат, а конец — с точкой M. Сам вектор обозначают $\overrightarrow{OM}$; направление вектора указывает стрелка на его конце.

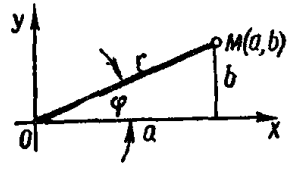


Рис. 18.

Длина вектора, изображающего комплексное число, называется *модулем* этого комплексного числа. Модуль всякого комплексного числа, не равного нулю, есть положительное число. Модуль комплексного числа $a + bi$ обозначают $|a + bi|$, а также буквой r. Из чертежа (рис. 18) видно, что

$$r = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Модуль действительного числа совпадает с его абсолютным значением. Сопряженные комплексные числа $a + bi$ и $a - bi$ имеют один и тот же модуль.

Примеры.

$$|3 + 5i| = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}; \quad |-7| = |-7 + 0 \cdot i| =$$
$$= \sqrt{(-7)^2 + 0^2} = 7; \quad |4i| = |0 + 4i| = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4.$$

Угол φ между положительным направлением оси абсцисс и вектором OM, изображающим комплексное число $a + bi$, называется *аргументом* комплексного числа $a + bi$. Каждое комплексное число, не равное нулю, имеет бесконечное множество аргументов, отличающихся друг от друга на целое число оборотов, т. е. на $360° \cdot k$, где k — любое целое число (для комплексного числа $z = 0$ аргумент теряет смысл).

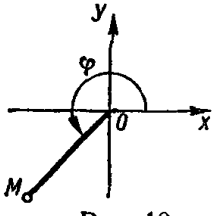


Рис. 19.

Аргумент φ комплексного числа $a + bi$ связан с a и b следующими формулами:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}, \quad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Однако ни одна из них в отдельности не позволяет найти аргумент по абсциссе и ординате. Покажем это на примерах.

Пример. Найти аргумент комплексного числа $-3 - 3i$.

Решение. **Первый способ.** $\operatorname{tg}\varphi = \frac{-3}{-3} = 1$. Этому условию удовлетворяют как угол 45°, так и угол 225°. Но угол 45° не является аргументом числа $-3 - 3i$ (рис. 19). Правильный ответ будет $\varphi = 225°$ (или $-135°$, или $585°$ и т. д.). Этот результат получится, если учесть, что абсцисса и ордината данного комплексного числа отрицательны. Значит, точка M лежит в третьей четверти.

Второй способ. $\cos\varphi = \frac{-1}{\sqrt{2}}$. Формула для $\sin\varphi$ показывает, что он тоже отрицателен. Значит, угол φ принадлежит третьей четверти, так что $\varphi = 225° + 360° \cdot k$.

Наименьшее по абсолютной величине значение аргумента называется главным. Так, для комплексного числа $-3 - 3i$ *главное значение аргумента* равно $-135°$.

Аргумент действительного положительного числа имеет главное значение 0°; для отрицательных чисел главным значением аргумента принято считать 180° (а не —180°).

У сопряженных комплексных чисел главные значения аргумента имеют одни и те же абсолютные значения, но противоположные знаки. Так, главные значения аргумента чисел $-3 + 3i$ и $-3 - 3i$ равны соответственно 135° и —135°.

Для обозначения аргумента $z = a + bi$ приняты обозначения $\varphi = \operatorname{Arg} z$ или $\varphi = \arg z$. Первое употребляется для всевозможных значений аргумента; второе — для главного значения аргумента, выделяемого неравенством $-\pi < \varphi \leqslant \pi$.

§ 31. Тригонометрическая форма комплексного числа

Общая форма записи комплексного числа, т. е. форма $a + bi$ называется *алгебраической*. Абсцисса a и ордината b комплексного числа $a + bi$ выражаются через модуль r и аргумент φ (рис. 19) формулами $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$; тогда получим $a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Последнее выражение называется *тригонометрической формой комплексного числа* с модулем r и аргументом φ. Любое число $z \neq 0$ может быть представлено в тригонометрической форме.

Пример. 1. Представить в тригонометрической форме число $-3 + 2i$.

$$r = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}; \quad \operatorname{tg}\varphi = -\frac{2}{3} = -0{,}666...$$

Тангенс отрицателен, следовательно, значение φ надо искать во второй и четвертой четвертях. Обращаясь к формулам для $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$, замечаем, что при $a = -3$ и $b = 2$ синус положителен, а косинус отрицателен, что имеет место во второй четверти. (Удобнее четверть определять по знакам при a и b. В данном случае $a = -3$, $b = +2$. Точку с такими координатами находят во второй четверти). По таблицам находим $\varphi = 146°18'$, значит $-3 + 2i = \sqrt{13}(\cos 146°18' + i\sin 146°18')$.

Пример 2. Представить в тригонометрической форме число $1 - i$.

Имеем $r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$; $\operatorname{tg}\varphi = -1$. Здесь $a = 1$, а $b = -1$. Следовательно, φ находится в четвертой четверти. Отсюда находим $\varphi = 315°$ и можем написать

$$1 - i = \sqrt{2}(\cos 315° + i\sin 315°).$$

Примечание. Так как $315° = 360° - 45°$ и $\cos 315° = \cos 45°$; $\sin 315° = \sin(-45°) = -\sin 45°$, то это число можно записать и так:

$$1 - i = \sqrt{2}(\cos 45° - i\sin 45°).$$

Пример 3. Выразить в алгебраической форме число

$$4(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ).$$

Так как

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin 30^\circ = \frac{1}{2},$$

то имеем

$$4(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ) = 2\sqrt{3} + 2i.$$

Далее рассмотрим, как выполнять действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме.

Сложение и вычитание комплексных чисел проще и удобнее проводить, когда они даны в алгебраической форме. Для остальных алгебраических действий более удобна тригонометрическая форма.

Умножение. Пусть даны два комплексных числа z_1 и z_2. Записав их в тригонометрической форме

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1); \quad z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

и перемножив, получим

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Следовательно, *модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению модулей сомножителей, а аргумент равен сумме аргументов сомножителей.* Это правило верно и для любого числа сомножителей.

Пример. Перемножить:

А. $z_1 = 3(\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ)$; $z_2 = 2(\cos 35^\circ + i \sin 35^\circ)$.

Б. $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$; $r[\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)]$.

Решение. А. $z_1 z_2 = 6(\cos 55^\circ + i \sin 55^\circ)$.

Б. $r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \cdot r[\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)] = r^2(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ) = r^2$;

следовательно, произведение двух сопряженных комплексных чисел есть действительное число, равное квадрату их общего модуля.

Деление. Пусть требуется число $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ разделить на число $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)}.$$

Умножив числитель и знаменатель на $\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2$ после преобразований, получим

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Следовательно, *модуль частного двух комплексных чисел равен частному модулей, а аргумент — разности аргументов делимого и делителя.*

Пример. Пусть

$$z_1 = \sqrt{3}(\cos 200^\circ + i \sin 200^\circ),$$
$$z_2 = 2[\cos(-160^\circ) + i \sin(-160^\circ)].$$

Тогда

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{3}}{2}(\cos 360^\circ + i \sin 360^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Возведение в степень. Умножая число $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ само на себя n раз, по правилу умножения комплексных чисел, получаем

$$z^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Значит, *модуль степени комплексного числа равен той же степени модуля основания, а аргумент равен аргументу основания, умноженному на показатель степени.*

В частном случае, если $r = 1$, то предыдущее равенство принимает вид

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Эта формула носит название *формулы Муавра* по имени английского математика Муавра (1667—1754).

Пример 1. Возвести в куб число $z = 2(\cos 20° + i\sin 20°)$.

$$z^3 = 8(\cos 60° + i\sin 60°) = 4 + 4\sqrt{3}\,i,$$

так как

$$\cos 60° = \frac{1}{2}, \quad \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Пример 2. Возвести в 20-ю степень число $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Записав его в тригонометрической форме $z = 1(\cos 60° + i\sin 60°)$, найдем

$$z^{20} = 1^{20}(\cos 1200° + i\sin 1200°) = \cos 120° + i\sin 120° = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Пример 3. Найти выражение косинуса и синуса угла 3φ через косинус и синус угла φ.

$$\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos^3\varphi + 3i\cos^2\varphi\sin\varphi + 3i^2\cos\varphi\sin^2\varphi + i^3\sin^3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi + i(3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi).$$

Приравнивая действительные и мнимые части, получаем

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\sin^2\varphi\cos\varphi; \qquad \sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi.$$

Примечание. Можно так же найти $\cos 4\varphi$, $\sin 4\varphi$ и общие формулы для $\sin n\varphi$, $\cos n\varphi$.

Извлечение корня. Корень n-й степени из комплексного числа извлекается с помощью формулы

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right).$$

Здесь $\sqrt[n]{r}$ арифметический, а $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$. Корень степени n в множестве комплексных чисел имеет n различных значений. Исключение представляет $z = 0$. В этом случае все значения корня равны между собой и равны нулю.

Модуль корня n-й степени из комплексного числа равен корню той же степени из модуля подкоренного числа, а аргумент для каждого значения корня определяется по формуле

$$\varphi_{k+1} = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, \quad \text{где } k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Пример 1. Найти корень кубический из числа

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

$$\sqrt[3]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{3}\right) =$$

$$= \sqrt[3]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 120°k\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{3} + 120°k\right)\right].$$

При $k = 0$ $\quad n_1 = \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}\right).$

При $k = 1$ $\quad n_2 = \sqrt[3]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 120°\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{3} + 120°\right)\right].$

При $k = 2$ $\quad n_3 = \sqrt[3]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 240°\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{3} + 240°\right)\right].$

Нетрудно убедиться, что при $k = 3, 4, 5, 6, \ldots$ получим $n_4 = n_1$, $n_5 = n_2$ и т. д., т. е. новых значений корня мы уже не получим.

Пример 2. Найти кубический корень из единицы.

$$1 = 1(\cos 360°k + i\sin 360°k), \quad \sqrt[3]{1} = 1(\cos 120°k + i\sin 120°k).$$

При $k = 0, 1, 2$ получим соответственно

$$n_1 = 1(\cos 0° + i\sin 0°) = 1;$$

$$n_2 = 1(\cos 120° + i\sin 120°) = 1\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2};$$

$$n_3 = 1(\cos 240° + i\sin 240°) = 1\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

§ 32. Исторические сведения о комплексных числах

Числа, впоследствии получившие наименование комплексных, впервые появились в одной из задач Д. Кардано. Назвал он их «софистическими» числами, желая этим подчеркнуть их парадоксальность: считалось, что корень квадратный из отрицательного числа не имеет смысла, и в то же время произведение двух таких корней оказалось вполне реальным числом.

Начало применению комплексных чисел в математике положили Г. Лейбниц и И. Бернулли. Лейбниц утверждал, что логарифмы отрицательных чисел существуют и являются комплексными числами.

И. Бернулли и Ж. Даламбер пытались доказать, что они действительны. Этот спорный вопрос удалось решить Л. Эйлеру. Он показал, что логарифмы отрицательных и мнимых чисел — числа мнимые.

В нескольких заметках, вышедших в первой четверти XVIII в., А. Муавр указал на связь, существующую между комплексными числами и тригонометрическими функциями, и вывел, правда, не в таком виде, как принято в настоящее время, свою знаменитую формулу. В современном виде:

$$(\cos\varphi \pm i \sin\varphi)^n = \cos n\varphi \pm \sin n\varphi;$$

эта формула была выведена Л. Эйлером в 1748 г. Несколько раньше, в 1740—1743 гг., Л. Эйлер установил основное соотношение, связывающее показательную и тригонометрические функции:

$$e^{xi} = \cos x + i \sin x.$$

Со второй половины XVIII в. началась уже интенсивная разработка вопросов, связанных с понятием комплексного числа. Начало систематического использования комплексных чисел связано с работами Эйлера и Даламбера, которые выяснили ряд свойств комплексных чисел и их связь с некоторыми задачами геодезии, картографии, гидродинамики.

Однако, несмотря на все достижения теории, математики отказывались считать комплексные числа реально существующими. Основным противоречием была невыясненность самого понятия мнимой единицы: с одной стороны, было известно, что не существует числа, квадрат которого был бы равен —1, и в то же время действия с такого рода «мнимыми» числами приводили к правильным результатам. Таким образом, надо было или признать, что комплексные числа являются своего рода условностью, или же найти их истолкование, связанное с объективной реальностью. Подобное геометрическое истолкование и было найдено в самом конце XVIII в.

Впервые геометрическое изображение комплексных чисел было предложено Г. Кюном, учителем гимназии в Данциге в 1750—1751 гг. Однако только в 1799 г. норвежский математик Гаспар Вессель (1745—1818) дал общее геометрическое истолкование комплексных чисел как точек на плоскости. Существенным было то, что Вессель показал, что все известные до того времени числа являются лишь частными случаями комплексных.

В начале XIX в. над вопросами дальнейшего обоснования теории комплексных чисел работали К. Ф. Гаусс и О. Коши. К. Ф. Гаусс ввел и сам термин «комплексные числа».

§ 33. Уравнения высших степеней

Теорема Безу и ее следствия. Для изучения уравнений высших степеней первостепенное значение имеет следующая теорема.

Остаток от деления многочлена относительно x на двучлен $x - a$ равен значению этого многочлена при x, равном a.

Можно сформулировать эту теорему короче: *остаток от деления многочлена $f(x)$ на $x - a$ равен $f(a)$.*

Пример 1. Найти остаток от деления многочлена

$$4x^3 - 3x^2 + x - 5 \text{ на } x - 2.$$

Здесь $a = 2$. Подставив в данный многочлен вместо x число 2, получим ответ:

$$4 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2 - 5 = 17.$$

Проверка.

$$\begin{array}{r|l} 4x^3 - 3x^2 + x - 5 & x - 2 \\ \hline 4x^3 - 8x^2 & 4x^2 + 5x + 11 \\ \hline 5x^2 + x & \\ 5x^2 - 10x & \\ \hline 11x - 5 & \\ 11x - 22 & \\ \hline 17 & \end{array}$$

Пример 2. Найти остаток от деления многочлена

$$x^{15} + 3 \text{ на } x + 1.$$

$x + 1 = x - (-1)$, следовательно, в данном случае $a = -1$. Подставив вместо x число -1 в данный многочлен, получим: $(-1)^{15} + 3 = 2$.

Из теоремы Безу вытекают следствия:

1. Для того чтобы многочлен $f(x)$ делился на $x - a$, необходимо и достаточно, чтобы $f(a) = 0$.

2. Для того чтобы многочлен $f(a)$ делился на $x + a$, необходимо и достаточно, чтобы $f(-a) = 0$.

В частности, многочлен

$x^n - a^n$ делится на $x - a$ при всех натуральных n,
$x^n - a^n$ делится на $x + a$ при четных n,
$x^n + a^n$ делится на $x + a$ при нечетных n,
$x^n - a^n$ не делится на $x + a$ при нечетных n,
$x^n + a^n$ не делится на $x + a$ при четных n,
$x^n + a^n$ не делится на $x - a$ при всех натуральных n.

Примечание. Однако неверно было бы говорить, что сумма одинаковых степеней двух чисел не делится на разность этих чисел, так как, например, $9^n + 3^n$ делится на $9 - 3$ при всех натуральных n. Следует различать делимость многочленов и делимость чисел — числовых значений этих многочленов.

Пример 1. При каких значениях a многочлен $4x^2 - 6x + a$ делится без остатка на $x + 3$?

Чтобы деление выполнялось без остатка, необходимо и достаточно, чтобы при $x = -3$ значение данного многочлена равнялось нулю, т. е.

$4 \cdot (-3)^2 - 6 \cdot (-3) + a = 0$ или $18 + a = 0$, откуда следует $a = -18$.

Пример 2. При каких значениях m и n многочлен $mx^3 + nx^2 - 73x + 102$ делится на $x^2 - 5x + 6$? $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$. Чтобы данный многочлен делился и на $x - 2$ и на $x - 3$, его значения

при $x = 2$ и при $x = 3$ должны равняться нулю. В результате получаем систему

$$\begin{cases} 8m + 4n - 146 + 102 = 0, \\ 27m + 9n - 219 + 102 = 0, \end{cases}$$

имеющую единственное решение: $m = 2$, $n = 7$.

Ответ. При $m = 2$ и $n = 7$.

Уравнения высших степеней и их свойства. Уравнением высшей степени называют каждое алгебраическое уравнение степени выше второй, т. е. уравнение вида

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0.$$

Перечислим важнейшие свойства этих уравнений.

1. Всякое алгебраическое уравнение n-й степени в множестве комплексных чисел имеет n корней, среди которых могут быть и равные друг другу.

2. Если многочлен $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ имеет корень x_1, то он делится на $x - x_1$, т. е. $f(x) = (x - x_1)Q(x)$. Это следствие из теоремы Безу.

3. Всякий многочлен n-й степени в множестве комплексных чисел может быть представлен, и притом единственным способом, в виде произведения двучленов первой степени:

$$f(x) = A(x - x_1)^m (x - x_2)^p \cdots (x - x_n)^r,$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — корни данного уравнения, а $m + p + \ldots + r = n$.

4. Если уравнение с действительными коэффициентами (а только такие и рассматриваются в элементарной алгебре) имеет комплексный корень $a + bi$, то оно имеет и сопряженный с ним корень $a - bi$. Если же это уравнение нечетной степени, то оно должно иметь хотя бы один действительный корень.

5. Всякое уравнение с действительными коэффициентами имеет четное число мнимых корней попарно сопряженных.

6. Как уже отмечалось (стр. 257), для квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ справедливы формулы Виета:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},$$

и

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a},$$

где x_1 и x_2 — корни уравнения.

Вообще для уравнения n-й степени

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

имеем

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -\frac{a_1}{a_0},$$

а

$$x_1 \quad x_2 \cdots x_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}.$$

7. Для того чтобы несократимая дробь $\frac{p}{q}$ была корнем уравнения с целыми коэффициентами

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

необходимо, чтобы p было делителем свободного члена a_n, а q — делителем коэффициента a_0.

8. Если уравнение имеет целые коэффициенты и коэффициент при x^n равен 1, то рациональными корнями могут быть только целые числа.

9. Целые корни уравнения с целыми коэффициентами являются делителями свободного члена.

В некоторых случаях, используя изложенные выше свойства, можно легко решать уравнения высших степеней с целыми коэффициентами.

Пример 1. Решить уравнение $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$.

Так как уравнение имеет целые коэффициенты и коэффициент при x^3 равен единице, то целыми корнями могут быть только делители свободного члена, т. е.

$$1;\ 2;\ 3;\ -1;\ -2;\ -3.$$

Проверим, не является ли 1 корнем данного уравнения:

$$f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 - 6 = 0.$$

Тогда на основании теоремы Безу полином в левой части имеет делителем $x - 1$.

Можно или непосредственно разделить левую часть на $x - 1$ или элементарным приемом представить её в виде произведения:

$$x^3 - x^2 - 5x^2 + 5x + 6x - 6 = x^2(x - 1) - 5x(x - 1) + 6(x - 1) = (x - 1)(x^2 - 5x + 6).$$

Квадратный трехчлен легко разлагается на множители, следовательно,

$$f(x) = (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3) = 0.$$

Отсюда получаем, что корни данного уравнения будут 1; 2; 3.

Некоторые алгебраические уравнения высших степеней можно решить, сведя их к квадратному.

Уравнения, левая часть которых разлагается на множители, а правая есть нуль. Бывает, что левую часть уравнения можно разложить на множители, из которых каждый — многочлен не выше второй степени. Тогда приравниваем нулю каждый многочлен в отдельности и решаем полученные уравнения. Найденные корни будут корнями исходного уравнения.

Пример. Решить уравнение $x^3 + 3x^2 - 10x = 0$.

Левая часть легко разлагается на множители x и $x^2 + 3x - 10$ и, следовательно, распадается на два уравнения

$$x = 0 \text{ и } x^2 + 3x - 10 = 0,$$

из которых находим три решения:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = -5.$$

Эффективность решения уравнения этим способом зависит от умения разложить левую часть уравнения на множители. Проиллюстрируем это на примерах.

Примеры. Решить уравнения:

А. $x^3+6=7x$.

Б. $x^3+(b^2-a^2)x+ab^2=0$. В. $x^4+2x^3-13x^2-14x+24=0$.

Решение.

А. $x^3-7x+6=0$; $x^3-x-6x+6=0$; $(x^3-x)-(6x-6)=0$;
$x(x^2-1)-6(x-1)=0$; $(x-1)(x^2+x-6)=0$.

Тогда

$$x-1=0 \text{ и } x^2+x-6=0.$$

Значит,

$$x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=-3.$$

Б. $x^3+b^2x-a^2x+ab^2=0$; $(x^3-a^2x)+(b^2x+ab^2)=0$;
$x(x^2-a^2)+b^2(x+a)=0$; $x(x-a)(x+a)+b^2(x+a)=0$;
$(x+a)[x(x-a)+b^2]=0$; $(x+a)(x^2-ax+b^2)=0$.

Тогда

$$x+a=0 \text{ и } x^2-ax+b^2=0.$$

Значит,

$$x_1=-a,\quad x_{2,3}=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-b^2}.$$

В. $(x^4+x^3-12x^2)+(x^3+x^2-12x)+(-2x^2-2x+24)=0$;
$x^2(x^2+x-12)+x(x^2+x-12)-2(x^2+x-12)=0$;
$(x^2+x-12)(x^2+x-2)=0$.

Тогда

$$x^2+x-12=0 \text{ и } x^2+x-2=0.$$

Значит,

$$x_1=3,\quad x_2=-4,\quad x_3=1,\quad x_4=-2.$$

4. Двучленные уравнения. *Двучленным уравнением* называется уравнение вида $ax^m+b=0$, $(a\neq 0)$. Разделив обе части такого уравнения на a, получим приведенное двучленное уравнение $x^m\pm q=0$.

Чтобы решить такие уравнения, полагают, что $x=\sqrt[m]{q}\cdot z$; тогда эти уравнения приводятся к более простым:

$$z^m-1=0,\quad z^m+1=0.$$

Решение таких уравнений элементарными способами может быть выполнимо при некоторых частных значениях m. Общий прием состоит в разложении левой части уравнения на множители, после чего уравнение приводится к виду, рассмотренному нами раньше*.

Примеры. Решить уравнения:

А. $x^3-1=0$.

Б. $16x^4+81=0$.

Решение.

А. $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$.

---

* Когда уравнение имеет вид $ax^m+bx^n=0$, где $m>n$, то его можно представить так: $x^n(ax^{m-n}+b)=0$ и, следовательно, оно распадается на два уравнения: $x^n=0$ и $ax^{m-n}+b=0$.

Значит, уравнение $x^3 - 1 = 0$ имеет своими корнями корни уравнений $x - 1 = 0$ и $x^2 + x + 1 = 0$.

Решив их, найдем, что уравнение $x^3 - 1 = 0$ имеет следующие три корня:

$$x_1 = 1, \quad x_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Б. Разделив обе части данного уравнения на 16, получим $x^4 + \frac{81}{16} = 0$.

Пусть $x = \sqrt[4]{\frac{81}{16}} \cdot z = 1{,}5z$, тогда $z^4 + 1 = 0$.

Это уравнение можно решать несколькими способами.

Первый способ (см. формулы на стр. 178):

$$z^4 = -1, \quad z^2 = \pm i,$$

$$z_{1,2} = \sqrt{i} = \pm\left[\sqrt{\frac{1}{2}} + i\sqrt{\frac{1}{2}}\right] = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i),$$

$$z_{3,4} = \sqrt{-i} = \pm\left[\sqrt{\frac{1}{2}} - i\sqrt{\frac{1}{2}}\right] = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i).$$

Второй способ:

$$z^4 + 1 = 0, \quad z^4 + 2z^2 + 1 - 2z^2 = 0, \quad (z^2 + 1)^2 - 2z^2 = 0,$$

$$z^2 + 1 - \sqrt{2}z = 0 \text{ и } z^2 + 1 + \sqrt{2}z = 0,$$

откуда

$$z_{1,2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i).$$

$$z_{3,4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{2} - 1} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i).$$

Биквадратное уравнение. Уравнение четвертой степени, в которое входят только четные степени неизвестного, называется *биквадратным*. Его записывают так:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0.$$

Это уравнение приводится к квадратному при помощи замены $x^2 = z$; имеем $az^2 + bz + c = 0$. Формула решений биквадратного уравнения следующая:

$$x = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

Она дает четыре корня биквадратного уравнения, а именно:

$$x_1 = +\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}, \quad x_2 = -\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}},$$

$$x_3 = +\sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}, \quad x_4 = -\sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

Пример. Решить уравнение $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

$x^2 = z$. Получаем уравнение $z^2 - 13z + 36 = 0$. Тогда $z_1 = 9$, $z_2 = 4$. Из равенства $x^2 = z$, подставляя вместо z найденные числа 9 и 4, получаем следующие четыре решения данного уравнения: $x_1 = 3$, $x_2 = -3$, $x_3 = 2$, $x_4 = -2$.

Трехчленное уравнение. *Трехчленными* называются уравнения вида

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0$$

(частный случай такого уравнения при $n = 2$ есть биквадратное уравнение). Трехчленное уравнение с помощью замены $x^n = z$ приводится к квадратному уравнению

$$az^2 + bz + c = 0,$$

откуда

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Подставив в равенство $x^n = z$ вместо z его значения z_1 и z_2, получим два двучленных уравнения n-й степени:

$$x^n = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x^n = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Решив, если возможно, эти двучленные уравнения, мы получим все решения данного трехчленного уравнения.

Пример. Решить уравнение $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$.

$x^3 = z$, $z^2 - 9z + 8 = 0$. Тогда $z_1 = 8$ и $z_2 = 1$; следовательно, $x^3 = 8$ и $x^3 = 1$.

Решив эти двучленные уравнения третьей степени, получим шесть значений для x:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -1 + i\sqrt{3}, \quad x_3 = -1 - i\sqrt{3},$$
$$x_4 = 1, \quad x_5 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad x_6 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Симметричные уравнения. Уравнения вида

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \cdots + cx^2 + bx + a = 0,$$

у которого коэффициенты членов, равноудаленных от начала и конца, равны, называются *симметричными*, или *возвратными*.

Например, $x^7 + 2x^6 - 5x^5 - 13x^4 - 13x^3 - 5x^2 + 2x + 1 = 0$.

Симметричное уравнение имеет следующее свойство: если число x_1 есть решение, то обратное число $\frac{1}{x_1}$ также будет его решением. (Ни один из корней симметричного уравнения не может быть равным нулю).

Симметричное уравнение может быть как четной, так и нечетной степени.

Способ решения этого уравнения четной степени покажем на примере уравнения четвертой степени

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0.$$

Разделив обе части уравнения на x^2 (так как $x \neq 0$), получим

$$ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0.$$

Сгруппируем члены с одинаковыми коэффициентами:

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0.$$

Заменяя $x + \frac{1}{x}$ новой буквой y, получим

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2.$$

Следовательно, симметричное уравнение четвертой степени приводится к квадратному уравнению.

Симметричное уравнение четной степени можно привести с помощью подстановки $y = x + \frac{1}{x}$ к уравнению в два раза меньшей степени, чем исходного. Для этого делят все члены данного уравнения на x^n (если степень данного была $2n$) и группируют члены, равноотстоящие от конца и начала. После этого делают замену по формулам

$$y = x + \frac{1}{x}, \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2, \quad x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y$$

и т. д.

Симметричное уравнение нечетной степени имеет корень $x = -1$. Если это уравнение поделить на $x + 1$, то получится симметричное уравнение четной степени, на единицу меньше степени исходного уравнения.

Таким образом, всякое симметричное уравнение нечетной степени приводится к двум уравнениям: $x + 1 = 0$ и симметричному уравнению четной степени, на единицу меньше степени исходного уравнения.

Рассмотренные выше уравнения называют симметричными уравнениями *первого рода*.

Уравнения вида

$$ax^{2k} + bx^{2k-1} + cx^{2k-2} + \cdots + dx^{k+1} + lxk - dx^{k-1} + \\ + \cdots + (-1)^{k-1} bx + (-1)^k a = 0$$

называются *симметричными уравнениями второго рода*. Решаются эти уравнения тем же методом, но новое неизвестное y связывается с x соотношением

$$y = x - \frac{1}{x}.$$

Пример. Решить уравнение

$$2x^5 + 5x^4 - 13x^3 - 13x^2 + 5x + 2 = 0.$$

Это симметричное уравнение нечетной степени, следовательно, оно имеет корень $x = -1$. Разделим многочлен, имеющийся в левой части данного уравнения, на $x + 1$. Получим

$$2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2.$$

Следовательно, для определения остальных корней данного уравнения надо решить уравнение $2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2 = 0$, или

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 16 = 0.$$

Полагая $y = x + \frac{1}{x}$, получим $2(y^2 - 2) + 3y - 16 = 0$, откуда $y_1 = -4$, $y_2 = 2{,}5$.

Следовательно, $x^2 + 4x + 1 = 0$ и $2x^2 - 5x + 2 = 0$.

Ответ. $x_1 = -1$, $x_{2,3} = -2 \pm \sqrt{3}$, $x_4 = 2$, $x_5 = \frac{1}{2}$.

Соединения и бином Ньютона

§ 34. Соединения

Множества. Теория соединений, или, как ее еще называют, *комбинаторика*,— это раздел элементарной алгебры, где изучаются некоторые операции над конечными множествами и решаются задачи, связанные с этими операциями.

Понятия *множества* — одно из неопределяемых основных понятий в математике. С этим понятием встречаемся во всех ее разделах. Так, в арифметике рассматривают множество натуральных чисел, множество простых чисел; в алгебре — множество многочленов, корней данного уравнения и т. п. Объекты, составляющие множество, называются *элементами* этого множества. Если элемент a принадлежит множеству M, записывают $a \in M$. Множество, состоящее из конечного числа элементов, называется *конечным*. Такими множествами являются множество всех двузначных чисел, множество вершин данного многоугольника, множество его диагоналей и т. д. Множество, содержащее неограниченное количество элементов, называется *бесконечным*. Бесконечным множеством, например, является множество всех натуральных чисел, всех простых чисел и т. д.

Множество, не содержащее элемеитов, называется *пустым*, его обозиачают символом $\varnothing$.

Если всякий элемент множества A есть элементом множества B, то множество A называют *подмножеством* множества B и запнсывают $A \subset B$. Подмножеством множества B считают также пустое миожество и само множество B; их называют *несобственными подмножествами;* остальные подмножества иазывают *собственными*.

Множество $M = \{a, b, c, d, \ldots\}$ называется *упорядоченным*, если между его элементами установлено некоторое соотношеиие $a < b$ (читают: «a предшествует b»), имеющее следующие свойства:

1) для какнх-либо двух элементов a и b действительно одно и только одно из соотношений $a = b$, $a < b$, $b > a$;

2) для всяких трех элементов a, b и c из соотношений $a > b$ и $b > c$ следует соотношение $a > c$.

Перестановки. Пусть мы имеем множество M, состоящее из n элементов: a_1, a_2, a_3, ..., a_n. Если переставлять эти элементы всевоз-

можнымн способами, оставляя нензменным их общее число, получим несколько последовательностей:

$$a_1a_2a_3 \ldots a_n,$$
$$a_2a_1a_3 \ldots a_n,$$
$$a_na_3a_2 \ldots a_1 \text{ и т. д.}^*$$

Каждую из этих последовательностей иазывают перестановкой из данных n элементов.

Пример. Ниже приведены 6 всевозможных перестановок из букв a, b и c:

$$abc,\ acb,\ bac,\ bca,\ cab,\ cba.$$

Итак, перестановкой из n элементов называется всякая коиечная последовательность, которая получается в результате упорядоченности некоторого конечного миожества, состоящего из n элементов.

Если множество имеет некоторое число элементов, то его можно упорядочить несколькими способами. Число всех перестановок из n элементов обозначается P_n. Это число равно произведению всех целых чисел от 1 до n включительно:

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (n-1)n.$$

Произведенне n первых натуральных чисел принято обозначать символом $n!$:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \ldots n = n!.$$

Символ $n!$ читают «эн факториал». Это слово происходит от латинского *factor*, что значнт множитель.

Примечанне. При $n = 1$ в выражении $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$ остается одно число 1. Поэтому принимается (в качестве определения), что $1! = 1$. При $n = 0$ выражение $1 \cdot 2 \ldots n$ вовсе лишается смысла. Однако принимается (в качестве определения), что $0! = 1$.

Итак, $P_n = n!$.

Верна также следующая формула: $P_n = n \cdot P_{n-1}$.

Пример. Каким числом способов можно рассадить 8 зрителей в ряду из 8 мест?

$$P_8 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40320.$$

Сочетания (комбинации). Пусть имеем множество M, состоящее из n различных элементов.

Всякое подмножество множества M, содержащее k элементов ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$), называется *сочетанием* или *комбинацией* из данных n элементов по k элементов.

Из определения следует, что два различных сочетания из данных n элементов по k элементов отличаются по крайней мере одним элементом.

Пример. Из множества цифр 1, 2, 3, 4 можно образовать такие сочетания по два элемента: 1, 2; 1, 3; 1, 4; 2, 3; 2, 4; 3, 4.

---

* Записывая перестановки, обычно между их членами не ставят запятых. Однако на приведенные выше записи ии в коем случае нельзя смотреть как на произведения.

Число различных сочетаний из n элементов по k обозначается символом C_n^k (*combinatio* от *combinare* (лат.) — соединять). Но иногда вместо C_n^k пишут $\binom{k}{n}$.

Число всех сочетаний из n элементов по k элементов, где $1 \leqslant k \leqslant n$, равно произведению k последовательных натуральных чисел, из которых наибольшее есть n, деленному на произведение последовательных натуральных чисел от 1 до k:

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \ldots k}.$$

Формулу для C_n^k можно записать в ином виде. Умножив числитель и знаменатель дроби в правой части ее на произведение $1 \cdot 2 \times \times 3 \ldots (n-k)$, получим

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \text{ или } C_n^k = \frac{P_n}{P_k P_{n-k}}.$$

Примечание. Из n элементов можно составить только одно сочетание, содержащее все n элементов, поэтому $C_n^n = 1$. Формула для C_n^k дает это значение только в том случае, если принять 0! за 1. В качестве определения принимается, что $C_n^0 = 1$.

Принято также считать, что $C_0^0 = 1$.

Пример. Найти число диагоналей выпуклого десятиугольника. Вершины десятиугольника образуют множество 10 точек плоскости, из которых любые три не лежат на одной прямой. Соединяя всякую пару этих точек отрезком прямой, получаем

$$C_{10}^2 = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45$$

отрезков, 10 из которых являются сторонами многоугольника, а другие 35 — его диагоналями.

Свойства сочетаний. 1. Число сочетаний из n элементов по k элементов равно числу сочетаний из n элементов по $n-k$ элемеитов, т. е.

$$C_n^k = C_n^{n-k} \qquad (n \geqslant k).$$

Это соотношение позволяет упростить нахождение числа сочетаний из n элементов по k, когда k превосходит $\frac{1}{2}n$.

Пример. $C_{100}^{97} = C_{100}^3 = \frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 161\,700.$

2. Число сочетаний из n элементов по k элементов равно числу сочетаний из $n-1$ элементов по k элементов, прибавленному к числу сочетаний из $n-1$ элементов по $k-1$ элементов, т. е.

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}.$$

Приведем еще несколько соотношений между выражениями для чисел различного вида сочетаний (такие соотношения называют также *комбинаторными тождествами*):

$$C_k^k + C_{k+1}^k + \cdots + C_{k+m-1}^k = C_{k+m}^{k+1};$$

$$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^k + \cdots + C_n^n = 2^n;$$

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \cdots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n;$$

$$C_n^0 C_m^p + C_n^1 C_m^{p-1} + \cdots + C_n^p C_m^0 = C_{m+n}^p.$$

Размещения. Возьмем какое-либо множество M, состоящее из n элементов.

Всякое упорядоченное подмножество, содержащее k элементов данного множества n элементов, называется *размещением* из n элементов по k (элементов).

Таким образом, два разных размещения из данных n элементов по k отличаются друг от друга или составом элементов, входящих в них, или порядком их размещения.

Пример. Из трех цифр 1, 2, 3 можно образовать такие размещения по два:

1, 2; 2, 1; 1, 3; 3, 1; 2, 3; 3, 2.

Число размещений из n элементов по k обозначается символом A_n^k (от франц. *Arrangement* — размещения).

Число всевозможных размещений из n элементов по k равно произведению k последовательных целых чисел, из которых наибольшее есть n, т. е.

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1),$$

или

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{P_n}{P_{n-k}}.$$

Пример. В классе 10 учебных предметов и 5 разных уроков в день. Сколькими способами могут быть распределены уроки в день?

Всевозможные распределения уроков в день представляют собой, очевидно, всевозможные размещения из 10 элементов по 5; поэтому всех способов распределения должно быть:

$$A_{10}^5 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30240.$$

В перестановках, сочетаниях и размещениях, которые мы выше рассмотрели, элементы, входящие в них, не повторяются, и поэтому их называют соответственно перестановками, комбинациями, размещениями *без повторений*.

В математике рассматривают также перестановки, сочетания и размещения с *повторениями*. Этот материал с достаточной полнотой изложен в кн.: С. И. Новоселов. Специальный курс элементарной алгебры. «Высшая школа», М., 1965, стр. 527—531.

§ 35. Решение примеров и задач на соединения

Пример 1. Упростить выражение $\dfrac{P_{2x+1}}{A^{-1}_{2x-1}P_{2x-n}}$.

$$\frac{P_{2x+1}}{A^{n-1}_{2x-1}P_{2x-n}} = \frac{(2x+1)!\,(2x-n)!}{(2x-1)!\,(2x-n)!} = 2x(2x+1).$$

Пример 2. Решить уравнение $\dfrac{A^{n+2}_{x+2}\cdot P_{x-n}}{P_x} = 110.$

$$\frac{(x+2)!\,(x-n)!}{(x-n)!\,x!} = 110.$$

Следовательно,

$$(x+1)(x+2) = 110 \quad \text{или} \quad x^2+3x-108=0,$$
$$x_1 = -12, \quad x_2 = 9.$$

Отрицательное значение x опускаем.

Ответ. $x = 9$.

Задача 1. Число перестановок из n букв отиосится к числу перестановок из $n+2$ букв, как 0,1 к 3. Найти n.

По условию

$$\frac{P_n}{P_{n+2}} = \frac{0{,}1}{3}, \quad \text{или} \quad \frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{30},$$

откуда следует

$$(n+1)(n+2) = 30$$

Корни этого уравнения $n_1 = 4$, $n_2 = -7$.

Второй корень не годнтся.

Ответ. $n = 4$.

Задача 2. Число сочетаний из n элементов по 3 в 5 раз меньше числа сочетаний из $n+2$ элементов по 4. Найти n.

По условию

$$5C^3_n = C^4_{n+2}, \quad \text{или} \quad \frac{5n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4},$$

откуда

$$5(n-2) = \frac{(n+2)(n+1)}{4}.$$

Ответ. $n_1 = 14$, $n_2 = 3$.

Задача 3. Сколькими возможнымн способами можно избрать из 15 человек делегацню в составе 3 человек?

Так как делегации a, b, c и b, a, c одинаковы, то нскомое число является числом сочетаний из 15 по 3, т. е. оно равно

$$C^3_{15} = \frac{15\cdot 14\cdot 13}{1\cdot 2\cdot 3} = 1365.$$

Задача 4. Сколькими разными способами собрание, состоящее из 40 человек, может избрать из своего числа председателя собрания, его заместителя и секретаря?

Избрать определенные три человека из 40 человек можно так:

a — председатель,	a — секретарь,
b — секретарь,	b — председатель,
c — зам. председателя;	c — зам. председателя

и т. д.

Следовательно, количество разных способов

$$A_{40}^3 = 40 \cdot 39 \cdot 38 = 59280.$$

Задача 5. На плоскости расположено 10 точек так, что из них никакие три, за исключением одной тройки точек, не лежат на одной прямой. Сколько разных прямых можно провести через эти точки?

Если бы три точки не лежали на одной прямой, то всего можно было бы провести C_{10}^2 прямых. Если при этом одна точка перемещается так, что будет на одной прямой с двумя другими точками, то из трех разных прямых получим одну. Итак, всего прямых можно провести $C_{10}^2 - 2 = 43$.

Задача 6. Сколько возможных способов для образования дозора из трех солдат и одного офицера, если есть 80 солдат и 3 офицера?

При одном офицере и 80 солдатах можно образовать дозор C_{80}^3 способами. При трех офицерах число способов будет в три раза больше, т. е. $3C_{80}^3 = 246480$.

Задача 7. Сколько возможных способов распределения 6 разных предметов между тремя лицами, так чтобы каждое из них получило 2 предмета?

Одно лицо может получить два предмета из шести C_6^2 способами.

Пусть лица A, B, C получили при одном способе распределения по два предмета так:

$$A - ab,\ B - cd,\ C - ef.$$

Поменяв местами владельцев, получим P_3 способов распределения, что соответствует одной комбинации из 6 элементов по 2. Итак, всего способов распределения будет $P_3 \cdot C_6^2 = 90$.

Задача 8. В шахматном турнире двое из участников выбыли, сыграв по три партии каждый, и потому на турнире было сыграно всего 84 партии. Сколько было участников первоначально?

Пусть искомое число участников турнира было x. Полностью сыграли друг с другом по партии лишь $x - 2$ участников (двое выбыли) и число этих партий, очевидно, равно числу $C_{x-2}^2 = \dfrac{(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2}$. Это число партий вместе с шестью сыгранными двумя выбывшими участниками составило 84 партии. Отсюда получаем уравнение $\dfrac{(x-2)(x-3)}{2} + 6 = 84$. Решаем его: $x^2 - 5x - 150 = 0$, $x = 15$ (отрицательный корень опускаем).

Ответ. 15.

Примечание. В решении предполагается, что выбывшие игроки друг с другом не играли. Это действительно так, потому что уравнение $C_{x-2}^{2}+5=85$ не имеет решений.

§ 36. Бином Ньютона

Произведение биномов, отличающихся только вторыми членами. Выражение $x+a$, как и вообще всякий двучлен, называется *биномом*. Обыкновенным умножением находим

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab,$$
$$(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc,$$
$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=x^4+(a+b+c+d)x^3+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2+(abc+abd+acd+bcd)x+abcd.$$

Эти произведения представляют собой многочлены, расположенные по убывающим степеням x. Все они составлены по одному и тому же закону: показатель первого члена равен числу перемножаемых биномов, показатели при x следующих членах убывают на 1; последний член не содержит x (т. е. содержит его в нулевой степени).

Коэффициент первого члена есть 1; коэффициент второго члена есть сумма всех вторых членов перемножаемых биномов; коэффициент третьего члена есть сумма всех произведений вторых членов, взятых по два; коэффициент четвертого члена есть сумма всех произведений вторых членов, взятых по три, и т. д. Последний член есть произведение всех вторых членов.

Эта закономерность применима к произведению какого угодно числа биномов, т. е. верна формула

$$(x+a)(x+b)(x+c)\cdots(x+k)=x^m+S_1x^{m-1}+S_2x^{m-2}+\cdots+S_m,$$

где

$$S_1=a+b+c+\cdots+i+k,$$
$$S_2=ab+ac+\cdots+ik,$$
$$S_3=abc+abd+\cdots+gik$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$S_m=abc\cdots ik.$$

Пример. Найти произведение биномов $(x-1)(x+2)(x-3)\times(x+4)$.

Здесь $a=-1$, $b=2$, $c=-3$, $d=4$. Тогда

$$S_1=(-1)+2+(-3)+4=2;$$
$$S_2=(-1)\cdot 2+(-1)\cdot(-3)+(-1)\cdot 4+2(-3)+2\cdot 4+(-3)\cdot 4=-13;$$
$$S_3=(-1)\cdot 2\cdot(-3)+(-1)\cdot 2\cdot 4+(-1)\cdot(-3)\cdot 4+2\cdot(-3)\cdot 4=-14;$$
$$S_4=(-1)\cdot 2\cdot(-3)\cdot 4=24.$$

Итак,

$$(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)=x^4+2x^3-13x^2-14x+24.$$

Формула бинома Ньютона. Если в приведенной выше формуле все вторые члены биномов одинаковы, т. е. $a=b=c=\cdots=k$,

тогда левая часть будет степенью бинома $(x+a)^m$, а $S_1, \dots, S_m$ соответственно равны ma, $\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^2$, $\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^3, \dots, a^m$.

Таким образом, получим

$$(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^2x^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^3x^{m-3} + \dots + \frac{m(m-1)\cdots[m-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\times a^nx^{m-n} + \dots + a^m.$$

Эта формула называется формулой бинома Ньютона. Ее можно записать и так:

$$(x+a)^m = x^m + C_m^1ax^{m-1} + C_m^2a^2x^{m-2} + C_m^3a^3x^{m-3} + \dots + C_m^na^nx^{m-n} + \dots + a^m.$$

Примечание. Формулы квадрата суммы и куба суммы (стр. 83) есть частные случаи этой общей формулы.

Пример. $(x+a)^5 = x^5 + C_5^1ax^4 + C_5^2a^2x^3 + C_5^3a^3x^2 + C_5^4a^4x + a^5 = x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5$.

Биномиальные коэффициенты и их свойства. Коэффициентом первого члена разложения бинома есть 1 (или C_m^0), второго — C_m^1, третьего — C_m^2 и т. д. Коэффициент последнего, $(m+1)$-го члена равен $C_m^m = 1$. Эти коэффициенты называются *биномиальными*. Общий член разложения имеет вид

$$T_{n+1} = C_m^na^nx^{m-n} = \frac{m(m-1)\cdot\cdot[m-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}a^nx^{m-n}.$$

Из этой формулы можно получить все члены (кроме первого), подставляя вместо n числа $1, 2, 3, \dots, m$.

Биномиальные коэффициенты имеют следующие свойства:

1. Коэффициенты членов, одинаково удаленных от концов разложения, равны между собой, т. е.

$$C_m^n = C_m^{m-n}.$$

2. Для получения коэффициента следующего члена достаточно умножить коэффициент предыдущего члена на показатель буквы x в этом члене и разделить на число членов, предшествующих определяемому, т. е.

$$C_m^n = \frac{C_m^{n-1}(m-n+1)}{n}.$$

3. Сумма всех биномиальных коэффициентов равна 2^m, т. е.

$$1 + C_m^1 + C_m^2 + \dots + C_m^n + \dots + C_m^{m-1} + 1 = 2^m.$$

4. Сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах, равна сумме биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах, т. е.

$$1 + C_m^2 + C_m^4 + \dots = C_m^1 + C_m^3 + C_m^5 + \dots$$

Примеры и задачи на бином Ньютона. З а д а ч а 1. В разложении $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^n$ коэффициент пятого члена относится к коэффициенту третьего члена, как 7 : 2 Найти тот член этого разложения, который содержит x в первой степени.

Биномиальный коэффициент пятого члена равен C_n^4, коэффициент третьего члена равен C_n^2. Тогда, по условию,

$$\frac{C_n^4}{C_n^2}=\frac{7}{2},\quad \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{1\cdot 2}{n(n-1)}=\frac{7}{2},$$

отсюда $n=9$.

Пусть теперь номер члена, содержащего x в первой степени, равен $k+1$. Тогда

$$T_{k+1}=C_9^k\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^k\cdot(\sqrt{x})^{9-k}=C_9^k x^{-\frac{2k}{3}}x^{\frac{9-k}{2}}=C_9^k x^{\frac{27-7k}{6}}.$$

По условию, показатель степени x должен быть равен 1. Значит, $\frac{27-7k}{6}=1$, отсюда $k=3$.

Итак, член, содержащий x в первой степени, есть четвертый член разложения и равен $T_4=C_9^3x$.

З а д а ч а 2. Дан многочлен

$$x(2-3x)^5+x^3(1+2x^2)^7-x^4(3+2x^3)^9.$$

Найти коэффициент члена, содержащего после выполнения указанных действий x^5.

В разложении $x(2-3x)^5$ член, содержащий x^5, равен xT_{4+1}, где пятый член разложения бинома $(2-3x)^5$

$$T_{4+1}=(-1)^4C_5^4(3x)^4\cdot 2=810x^4.$$

В разложении $x^3(1+2x^2)^7$ член, содержащий x^5, равен x^3T_{1+1}, где второй член разложения биома $(1+2x^2)^7$

$$T_{1+1}=C_7^1(2x^2)=14x^2.$$

Разложение $x^4(1+2x^3)^9$ не содержит x^5.

Итак, коэффициент члена (данного многочлена), содержащего x^5, равен 824.

З а д а ч а 3. Многочлен $x^4-3x^3+x^2+1$ разложить по убывающим степеням $x+1$.

Заменив x на $(x+1)-1$, получим

$$x^4-3x^3+x^2+1=[(x+1)-1]^4-3[(x+1)-1]^3+\\+[(x+1)-1]^2+1.$$

Если теперь раскрыть по формуле бинома Ньютона выражение $[(x+1)-1]^k$, где $k=2,\ 3,\ 4$, рассматривая $x+1$ как один член, то после приведения подобных членов получим

$$(x+1)^4-7(x+1)^3+16(x+1)^2-15(x+1)+6.$$

Задача 4. Сколько рациональных членов содержится в разложении.

$$(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3})^{100}?$$

Имеем $T_{n+1}=C_{100}^n(\sqrt{2})^{100-n}(\sqrt[3]{3})^n=C_{100}^n\,2^{\frac{100-n}{2}}\,3^{\frac{n}{3}}$.

Так как показатели $\frac{100-n}{2}$ и $\frac{n}{3}$ рационального члена должны быть целыми числами, то число n должно быть кратно 3 и 2, т. е. кратно 6. Но $0\leqslant n\leqslant 100$ и числа n, кратные шести, будут 0, 6, 12, ..., 96. Подсчитаем число m их, получим $96=0+6(m-1)$, $6(m-1)=96$, $m-1=16$, $m=17$.

Историческая справка о биноме Ньютона. Разложение выражения $(a+b)^n$ в ряд для целых значений n было известно грекам лишь для случая $n=2$. Обобщение для натуральных n было сделано среднеазиатскими математиками Омаром Хайямом и ал-Каши. Ал-Каши пользовался биномом для приближенного вычисления корня любой степени из целого числа; с этой целью он составил таблицу биномиальных коэффициентов.

					1					
				1		1				
			1		2		1			
		1		3		3		1		
	1		4		6		4		1	
1		5		10		10		5		1
	1		6		15		20		15	
		1		7		21		35		35
			1		8		28		56	
				1		9		36		84
					1		10		45	

Эта таблица носит название *треугольника Паскаля*. В Западной Европе она впервые была опубликована в руководствах по арифметике Апиануса в 1527 г. и Штифеля в 1544 г. В 1556 г. Тарталья также опубликовал таблицу биномиальных коэффициентов, причем объявил ее своим изобретением. В 1631 г. исследованием таблицы занимался Аутред, изобретатель логарифмической линейки; несколько позже, в 1654 г., была опубликована работа Паскаля.

В 1676 г. формулу бинома распространил на отрицательные и дробные показатели И. Ньютон, хотя не дал ее доказательства. Последнее было дано Маклореном для рациональных значений n, Эйлером в 1774 г.— для дробных показателей. Наконец в 1825 г. великий норвежский математик Нильс Генрик Абель (1802—1829) доказал теорему бинома для любого комплексного числа n.

Элементарные функции и их свойства

§ 37. Функциональная зависимость величин

Постоянные и переменные величины. Наблюдая какой-либо процесс, можно заметить, что одни величины, встречающиеся в нем, изменяют свое значение, другие — не изменяют. Величины, которые в данном процессе все время сохраняют одно и то же значение, называют *постоянными*. Величины, значения которых в данном процессе изменяются, называют *переменными*.

Пример. Во время взлета самолета расстояние его от поверхности земли увеличивается, количество бензина в баках уменьшается, а число пассажиров, длина самолета остаются постоянными.

Одна и та же величина в одном процессе может быть постоянной, а в другом — переменной. Однако есть и такие величины, которые остаются постоянными все время, например отношение длины окружности к ее радиусу, сумма углов треугольника, температура кипения воды и т. д. Такие величины называют *константами*.

Обычно постоянные величины обозначают первыми буквами латинского алфавита a, b, c, d, а переменные — последними: x, y, z.

Изменяясь, переменная величина не всегда может принимать произвольные значения, а только такие значения, которые находятся в некоторых допустимых для нее пределах. Все те значения, которые величина может принимать в конкретных условиях рассматриваемого процесса, называются *допустимыми значениями* для данной переменной величины.

Функциональная зависимость. Часто бывает так, что одна переменная величина зависит от другой: каждому значению одной величины соответствует значение другой. Если две переменные величины связаны между собой так, что каждому значению одной из них соответствует определенное значение другой, то говорят, что между этими переменными существует *функциональная зависимость*.

Примеры функциональной зависимости: радиус окружности и ее длина, вес покупки и ее стоимость, вес тела и его расстояние от центра Земли и др.

Аргумент и функции. Если две переменные величины находятся в функциональной зависимости, то та из них, которая может принимать произвольные допустимые значения, называется *независимой переменной*, или *аргументом*. Другая величина, значения которой зависят от значений аргумента, называется *зависимой переменной*, или *функцией*. Например, известно, что чем выше температура, тем больше становится длина стального рельса, т. е. длина рельса зависит от температуры. В данном случае температура — аргумент, а длина рельса — функция.

Площадь квадрата есть функция длины его стороны, путь, пройденный поездом,— функция времени, урожайность — функция количества удобрений, значения трехчлена x^2+5x+6 — функция значений x.

Если величина y есть функция величины x, пишут $y=f(x)$ и читают: «y равно эф от x». Для обозначения функциональной зависимости употребляют и другие буквы. Например, если v есть функция t, можно записать и так: $v=\varphi(t)$ («v равно фи от t»).

Заметим, что в современной математике дается более широкое понимание функции. Рассматриваются и такие функции, в которых аргумент не обязательно величина; аргументом функции может быть множество произвольных элементов — точек, отрезков и др. Значения функции тоже не обязательно числа. Самое широкое современное определение функции можно сформулировать так: *функцией, определенной на множестве* M, называется правило f, при котором каждому элементу x множества M ставится в соответствие единственный элемент $f(x)$ некоторого множества N. Некоторые математики множества M и N называют областями отправления и прибытия и дают следующее определение: *функция* — это соответствие, при котором каждому элементу области отправления соответствует единственный* элемент области прибытия.

Таким образом, сейчас в математике словом «функция» называют и закон (правило) соответствия f, и величину $f(x)$.

Новое (современное) понятие функции не противоречит старому (классическому), оно только более общее. Функции, заданные на числовом множестве и значения которых тоже числа, теперь называют числовыми функциями. В этой главе мы будем рассматривать только числовые функции и называть их для краткости просто функциями.

Способы задания функции. Функцию можно задать формулой, показывающей, как по данному значению аргумента можно вычислить соответствующее значение функции. Такой способ задания функции называют *аналитическим*.

Пример. Зависимость объема куба v от длины его ребра a можно выразить формулой $v = a^3$. Эта формула показывает, как для каждого значения a можно вычислить соответствующее значение v. Например, если $a = 4$, то $v = 64$ и т. д.

В зависимости от того, какой формулой выражается та или иная функция, рассматривают различные виды функций. В элементарной математике рассматриваются действия сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня, логарифмирование, вычисление синусов, косинусов, тангенсов, котангенсов, секансов, косекансов, арксинусов, арккосинусов, арктангенсов, арккотангенсов, арксекансов и арккосекансов. Эти действия называют *элементарными действиями*. Действия сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень с рациональным показателем, извлечение корня называют также *алгебраическими действиями*. Остальные элементарные действия называют элементарными *трансцендентными*. Если функцию можно задать формулой, содержащей только алгебраические действия, ее называют *алгебраической функцией*. Если функцию можно задать формулой, содержащей элементарные действия, в состав которых входят и элементарные трансцендентные действия, то ее называют *элементарной трансцендентной функцией*.

Функцию можно задать также *табличным* способом, т. е. указать значение аргумента и для каждого из них дать соответствующие значения функции. Например, таблицы квадратов, кубов, квадратных корней и другие есть не что иное как табличные задания функций.

---

* В некоторых старых учебниках рассматриваются и многозначные функции. Однако в элементарной математике вводить понятие многозначных функций нет необходимости. Известный советский математик А. Я. Хинчин писал, что понятие многозначной функции «вредно как в средней, так и в высшей школе» (А. Я. Хинчин. Педагогические статьи, М., 1963, стр. 81—84).

Очень распространен также графический способ задания функций. Обычно для этого используют прямоугольную систему координат.

Существуют и другие способы задания функций; описательный, с помощью функциональной шкалы и т. п.

Координаты. Совокупность двух взаимно перпендикулярных числовых осей с общей начальной точкой O называют *прямоугольной системой координат* (рис. 20). Одну из этих осей, обычно горизонтальную, называют *осью абсцисс*, или осью иксов, или осью OX, вторую, вертикальную, называют *осью ординат*, или осью игреков, или осью OY. Плоскость, в которой задана система координат, называют *координатной плоскостью*, а точку O пересечения осей — *началом координат*.

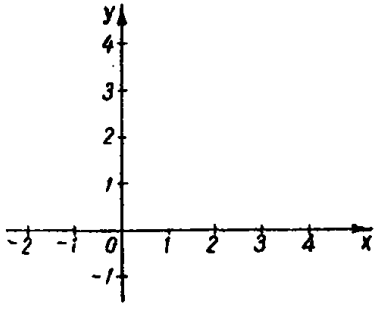


Рис. 20.

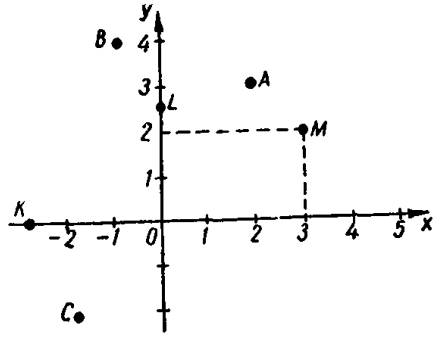


Рис. 21.

На координатной плоскости положение любой точки можно определить с помощью двух чисел. Пусть, например, надо определить положение точки M (рис. 21). Для этого опускаем из нее перпендикуляры на оси OX и OY. Если основаниям этих перпендикуляров соответствуют числа 3 и 2, то эта пара чисел и определяет положение точки M.

Числа, определяющие положение точки на координатной плоскости, называются *координатами*. Координату, которую берут по оси абсцисс, называют *абсциссой*, которую берут по оси ординат — *ординатой*. Если точка N имеет абсциссу a и ординату b, пишут $N(a, b)$, т. е. первой всегда пишут абсциссу.

Обозначенные на рис. 21 точки имеют следующие координаты:

$$A(2,\ 3);\ B(-1,\ 4);\ C(-2,\ -2);\ K(-3,\ 0);\ L\left(0,\ 2\frac{1}{2}\right).$$

Графическое изображение функции. Пусть имеем какую-нибудь функцию $y = f(x)$. Отметим значение ее аргумента на оси абсцисс, а соответствующее ему значение функции — длиной перпендикуляра, проведенного к оси абсцисс из этой точки. Тогда при всевозможных изменениях аргумента концы перпендикуляров образуют некоторое множество точек, которое называется *графиком* данной функции. Чаще всего графиком функции является некоторая линия. Однако он может состоять из отдельных точек, отрезков, дуг и т. д.

Если функция задана графиком, то можно легко определить для каждого (допустимого) значения аргумента соответствующее значение функции. Для этого достаточно восстановить в соответствующей точке оси абсцисс перпендикуляр к ней и продолжить его до пересечения с графиком. Ордината точки пересечения и дает соответствующее значение функции.

Простейший способ построения графика функции — «по точкам». Рассмотрим его на примере. Пусть надо построить график функции $y = x^2 - 2$. Для этого вычисляем значения функции для нескольких значений аргумента, например для $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$. Результаты удобно записывать в форме

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	7	2	-1	-2	-1	2	7

Каждую пару полученных значений x и y принимаем за координаты и строим по ним на координатной плоскости точки. Затем через эти точки (от руки или при помощи лекала) проводим плавную линию. Это и будет график данной функции $y = x^2 - 2$ (рис. 22)*.

Для построения графиков удобно пользоваться миллиметровой бумагой.

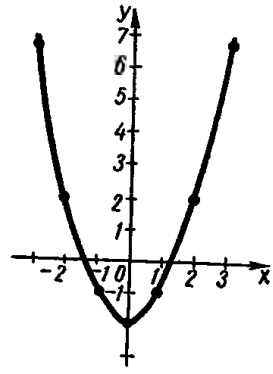


Рис. 22.

§ 38. Свойства функций

Область определения и область изменения функции. Пусть дана функция $y = f(x)$. Величины x и y здесь могут принимать непроизвольные значения.

Совокупность всех тех значений, которые может принимать аргумент x функции, называется *областью определения* этой функции. Совокупность всех тех значений, которые может принимать сама функция y, называется *областью изменения* этой функции.

Пример 1. Найти область определения и область изменения функции

$$y = \frac{1}{\sqrt{x} + 1}.$$

Поскольку x входит под знак квадратного корня, то должно быть $x \geqslant 0$. При всех таких значениях x знаменатель не равен нулю, следовательно, y имеет значения. Итак, область определения данной функции $x \geqslant 0$.

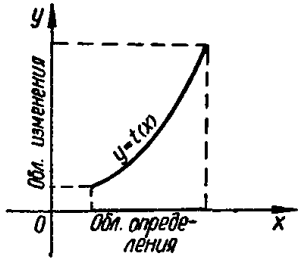


Рис. 23.

При каждом допустимом значении x знаменатель $\sqrt{x} + 1$ есть положительное число, которое больше или равно 1. Следовательно, y — положительное число, которое меньше или равно 1, т. е. $0 < y \leqslant 1$. Это и есть область изменения данной функции.

Если функция задана графически, то для нахождения области определения ее график надо спроектировать на ось OX. Если же график функции спроектировать на ось OY, получим область изменения функции (рис. 23).

Обычно область определения и область изменения функции образуют некоторые числовые *промежутки*. Промежутки бывают *замкну-*

* Однако в большинстве случаев удобнее строить графики функций, используя их свойства (см. стр. 209).

тые и открытые. Замкнутым промежутком, или *сегментом*, называют множество действительных чисел, содержащее наибольшее и наименьшее из этих чисел, т. е. множество действительных значений x, удовлетворяющих условию $a \leqslant x \leqslant b$. Такой сегмент обозначают: $[a, b]$.

Открытым промежутком, или *интервалом*, называют множество действительных значений x, удовлетворяющих условию $a < x < b$. Такой интервал обозначают (a, b). Концы интервала a и b не принадлежат ему; интервал не имеет ни наименьшего, ни наибольшего числа.

Иногда рассматривают промежутки, замкнутые с одной стороны, но открытые с другой:

полуинтервал $a < x \leqslant b$ обозначают $(a, b]$:

полусегмент $a \leqslant x < b$ обозначают $[a, b)$.

Возрастание и убывание функций. Функция называется *возрастающей* на данном промежутке, если для двух произвольных значений аргумента из этого промежутка большему значению аргумента соответствует и большее значение функции. Иначе: если при $x_1 < x_2$, где x_1 и x_2 — произвольные значения аргумента из данного промежутка, $f(x_1) < f(x_2)$, то говорят, что функция $f(x)$ возрастает на этом промежутке. Если же при $x_1 < x_2$, где x_1 и x_2 — произвольные значения аргумента из данного промежутка, $f(x_1) > f(x_2)$, то говорят, что на этом промежутке функция $f(x)$ убывает.

Функции, которые в каком-нибудь промежутке только возрастают или только убывают, называются *монотонными* в этом промежутке.

Если функция возрастает в каком-нибудь промежутке, то ее график с увеличением x на этом промежутке поднимается все выше, а если убывает, то ее график опускается все ниже. Например: функция $y = x^2$ возрастает при $x > 0$, так как если x_1 и x_2 положительные и $x_1 < x_2$, то $x_1^2 < x_2^2$. На множестве $x < 0$ эта функция убывает (см. рис. 35).

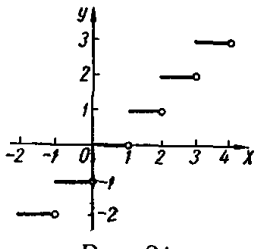


Рис. 24.

Функция $y = x^3 + 2$ возрастает на всей области определения, т. е. при всех действительных значениях x.

Иногда говорят и о невозрастающих и неубывающих функциях. Если при $x_1 < x_2$, где x_1 и x_2 — произвольные значения аргумента из данного промежутка, $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, то функцию $f(x)$ называют неубывающей на этом промежутке. Аналогично определяется и невозрастающая функция. Каждая возрастающая функция есть и неубывающая, но не каждая неубывающая есть возрастающая.

Рассмотрим для примера функцию $y = [x]$, где символом $[x]$ обозначена целая часть* числа x, точнее, наибольшее целое число, не превышающее x, например,

$$[2{,}4] = 2;\ [0{,}25] = 0;\ [7] = 7;\ [-3{,}2] = -4.$$

График функции $y = [x]$ дан на рис. 24. Рассмотрим эту функцию на промежутке $2 \leqslant x < 3$. Как бы не изменялось значение x на этом промежутке, значение функции y остается неизменным, равным 2. Следовательно, данную функцию на этом промежутке можно назвать

* Иногда вместо «целая часть числа x» говорят «антье x» (от франц. *entier* — целый). В некоторых книгах вместо $[x]$ пишут также $E(x)$.

неубывающей (и невозрастающей), но назвать ее возрастающей или убывающей на этом промежутке нельзя.

Экстремальные значения функции. Различают наибольшее (наименьшее) значение функции на некотором промежутке и ее максимум (минимум). Например, функция, представленная графически на рис. 25, на сегменте $[-1; 5]$ имеет наибольшее значение в точке $x = 2$ и наименьшее — в точке $x = 5$. Наименьшее значение данной функции не является ее минимумом (локальным). Данная функция имеет минимум в точке $x = 3$, а максимум — в точках $x = 2$ и $x = 4$.

Функция $f(x)$ в точке $x = c$ имеет максимум (минимум), если в области определения ее можно указать такой интервал, для которого c является внутренней точкой и для всех отличных от c точек x этого интервала $f(x) < f(c)$ $[f(x) > f(c)]$. Из этого определения следует, что значение функции в крайних точках области ее определения может быть наибольшим или наименьшим, но не может быть ни максимумом, ни минимумом.

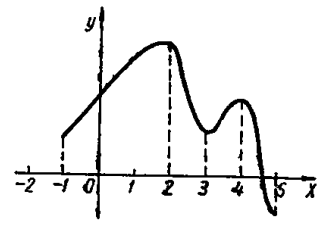


Рис. 25.

Термины «максимум» и «минимум» часто объединяют в один термин «экстремум». Точки экстремума — это те точки, в которых функция достигает максимума или минимума.

Общий способ определения точек экстремума, а следовательно, и экстремальных значений функций, рассматривают в высшей математике. Методами элементарной математики удается определять эти значения только в некоторых частных случаях.

Пример 1. Определить точки экстремума функции $y = \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$.

Знаменатель $\sqrt{x} + 1$ наименьший при $x = 0$. В этом случае значение функции y будет наибольшим.

Однако это наибольшее значение функции не является ее максимумом (локальным), так как $x = 0$ есть крайняя точка области определения данной функции. Минимума функция тоже не имеет.

Пример 2. Исследовать на экстремум функцию $y = x^2 + 2x + 5$, заданную на интервале $[-2, 2]$.

$$y = x^2 + 2x + 5 = (x + 1)^2 + 4.$$

Выражение $(x + 1)^2$ всегда положительно и только при $x = -1$ равно нулю. Следовательно, в точке $x = -1$ данная функция имеет минимум. Максимума функция не имеет.

Ограниченные и неограниченные функции. Функция называется *ограниченной*, если абсолютное значение ее при любых значениях аргумента не превосходит положительного числа A. Иначе: функция $y = f(x)$ называется ограниченной, если существует такое положительное A, что при всех x

$$|f(x)| \leqslant A.$$

График ограниченной функции лежит целиком в полосе между прямыми, параллельными оси OX, проведенными на расстояниях A от нее.

Пример. Функция $y = \frac{1}{x^2+1}$ ограниченная, так как $0 < y \leqslant 1$ при всех x.

Если не существует такого положительного числа A, что при всех значениях x $|f(x)| \leqslant A$, то функция $f(x)$ называется *неограниченной*.

Пример. Функция $y = x^3$ неограниченная.

Четные и нечетные функции. Функция называется *четной*, если любым противоположным значениям аргумента соответствуют равные значения функции. Иначе: если для любых x из области определения $f(-x) = f(x)$, то функция $f(x)$ называется четной.

Пример. Функция $y = x^2$ — четная, так как при любых x

$$(-x)^2 = x^2.$$

График четной функции симметричен относительно оси ординат.

Если любым противоположным значениям аргумента соответствуют противоположные значения функции, то такая функция называется *нечетной*. Иначе: функция $f(x)$ называется нечетной, если при любых значениях x из области определения $f(-x) = -f(x)$.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Пример. Функция $y = x^3$ — нечетная, так как $(-x)^3 = -x^3$.

Существуют функции, не являющиеся ни четными, ни нечетными. Такими, например, есть функции

$$y = x^3 + x^2, \quad y = \frac{x-1}{x^2+1} \text{ и др.}$$

Периодические и непериодические функции. Функция $y = f(x)$ называется периодической, если существует не равное нулю число t такое, что при всех значениях x из области ее определения $f(x + t) = f(x)$. Число t в этом случае называется *периодом данной функции*.

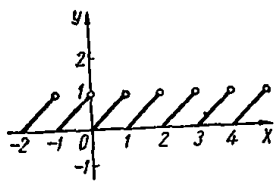


Рис. 26.

Для примера рассмотрим функцию $y = x - [x]$, где $[x]$ — целая часть числа x (см. стр. 206)*. Если к произвольному значению аргумента этой функции прибавить 1, то значение функции от этого не изменится:

$$f(x+1) = (x+1) - [x+1] = x + 1 - [x] - 1 = x - [x] = f(x).$$

Следовательно, при любом значении x $f(x+1) = f(x)$. А это значит, что рассматриваемая функция периодическая, период ее равен 1. Любое целое число также является периодом данной функции, но обычно рассматривают только наименьший положительный период функции.

График этой функции дан на рис. 26. Он состоит из бесконечного множества повторяющихся равных отрезков. График каждой периоди-

* Разность $x - [x]$ обычно называют дробной частью числа x и обозначают ее символом $\{x\}$. Например, $\{2{,}7\} = 0{,}7$; $\{0{,}23\} = 0{,}23$; $\{-2{,}4\} = 0{,}6$; $\{5\} = 0$.

ческой функции состоит из повторяющихся равных линий, изолированных друг от друга, как в рассматриваемом случае, или соединенных в одну общую линию (синусоида и др.).

Прямая и обратная функции. Пусть дана функция $y = 3x - 2$. Если выразить x через y и в полученном равенстве вместо x написать y, а вместо y написать x, будем иметь $y = \frac{x+2}{3}$. Это есть функция, *обратная* данной. Данную функцию также можно назвать обратной по отношению к полученной. Эти функции взаимно обратны друг другу.

Графики двух взаимно обратных функций симметричны друг другу относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов, т. е. относительно прямой $y = x$ (рис. 27).

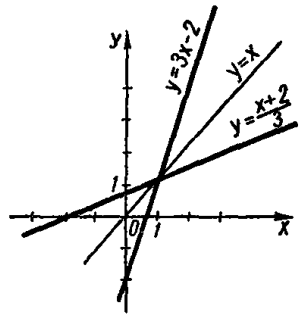


Рис. 27.

Исследование функций. Под исследованием функции понимают выяснение самых различных ее свойств, включая, например, такие: при каких значениях аргумента функция имеет значения большие 1, при каких значениях аргумента значения функции — простые числа и т.п. Если имеют в виду исследование таких частных свойств функции, об этом четко указывают в задаче. Если же не перечисляют, какие именно свойства функции требуется рассмотреть, а коротко указывают лишь «исследовать функцию», то в данном случае имеют в виду следующие требования:

1) установить области определения и изменения функции;

2) установить промежутки возрастания и убывания;

3) определить точки экстремума функции, если такие существуют, и вычислить экстремальные ее значения;

4) выяснить, четная или нечетная данная функция;

5) выяснить, ограниченная или неограниченная функция;

6) исследовать функцию на периодичность;

7) определить, если возможно, нули функции, т. е. те значения, аргумента, при которых значения функции равны нулю.

Устаиовив все эти свойства функции, уже нетрудно построить ее график (не по точкам, как это рассматривалось на стр. 205, а на основании свойств функции). Поэтому обычно заканчивают исследование функции построением ее графика.

Пример 1. Исследовать функцию

$$y = \frac{2}{x^2 + 1}.$$

1. При каждом действительном x выражение $x^2 + 1$ имеет значение, не равное нулю. Значит, область определения функции — множество всех действительных чисел, т. е. $-\infty < x < \infty$.

2. При $x = a$ и $x = -a$, где a — любое действительное число, функция имеет равные значения. Следовательно, эта функция четная.

3. Периодична ли эта функция? Предположим, что существует число $t \neq 0$, удовлетворяющее тождеству $\frac{2}{(x+t)^2+1} = \frac{2}{x^2+1}$, откуда $(x + t)^2 = x^2$. Но это равенство верно не при всех x. Следовательно, такого t не существует. Данная функция непериодична.

4. Если x увеличивается от $-\infty$ до 0, то x^2 уменьшается, а значение функции возрастает. Если x увеличивается от 0 до ∞, x^2 также увеличивается, а значение функции убывает. Следовательно, на множестве отрицательных чисел данная функция возрастает, а на множестве положительных чисел — убывает.

5. Наименьшее значение выражения x^2+1 получим при $x=0$, оно равно 1. Следовательно, функция достигает максимума в точке $x=0$, этот максимум равен 2.

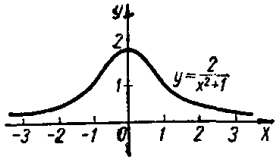


Рис. 28.

Минимума функция не имеет, так как знаменатель x^2+1 может увеличиваться неограниченно: какое бы малое значение функции не взять, найдется такое значение аргумента x, при котором функция имеет еще меньшее значение.

6. Значение функции не может быть больше 2 и меньше (даже равным) 0. Значит, данная функция ограниченная.

7. Функция не имеет нулей: ни при каком значении x значение y не может равняться нулю.

Используя результаты исследования, можно построить график данной функции (рис. 28).

§ 39. Простейшие функции и их графики

Прямая пропорциональность. Зависимость между величинами x и y, которую можно выразить формулой

$$y = ax,$$

где a — некоторое данное число, называется *прямо пропорциональной зависимостью.*

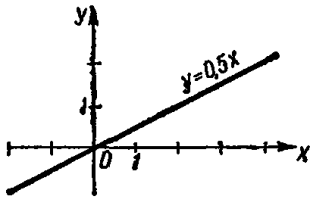


Рис. 29.

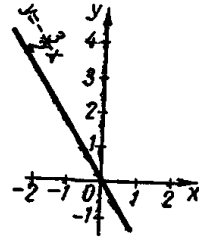


Рис. 30.

Примечание. Выше мы рассматривали только такие примеры прямо пропорциональной зависимости, в которых a (коэффициент пропорциональности), x и y — числа положительные. В математике рассматривают и такие зависимости, в которых эти числа могут быть и отрицательными и равными нулю.

Графиком прямо пропорциональной зависимости есть прямая, проходящая через начало координат. График зависимости $y=ax$ проходит в первом и третьем координатных углах, если $a>0$ (рис. 29) или во втором и четвертом координатных углах, если $a<0$ (рис. 30).

Прямо пропорциональная зависимость — простейшая из функций. Она определена на множестве всех действительных чисел, нечет-

ная, непериодическая, неограниченная, возрастающая, если $a > 0$, и убывающая при $a < 0$.

Линейная функция. Линейной функцией называют функцию, которую можно выразить формулой

$$y = ax + b,$$

где x — аргумент, а a и b — заданные числа.

Линейная функция определена на множестве всех действительных чисел. При $a > 0$ она возрастает, а при $a < 0$ убывает. График линейной функции есть прямая линия, проходящая через точку $M(0, b)$ параллельно графику функции $y = ax$ (рис. 31). Если $a = 0$, график линейной функции есть прямая, параллельная оси абсцисс, которая проходит через точку b на оси ординат (рис. 32).

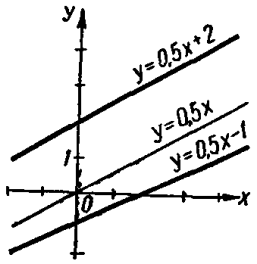


Рис. 31.

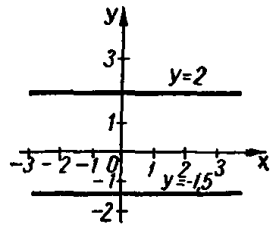


Рис. 32.

В этом случае (при $a = 0$) линейная функция четная, ограниченная, периодическая. Периодом ее можно считать любое положительное число, однако наименьшего периода не существует. При $a \neq 0$ линейная функция непериодична, неограничена; она не является ни четной, ни нечетной, если $b \neq 0$, а при $b = 0$ она нечетная.

Прямо пропорциональная зависимость есть частный случай линейной функции (при $b = 0$).

Обратно пропорциональная зависимость. Зависимость между величинами x и y, которую можно выразить формулой

$$y = \frac{a}{x},$$

где a — некоторое заданное число, называют *обратно пропорциональной зависимостью*. Здесь a, x, y могут быть не только положительными числами, но и отрицательными. Поэтому приведенное здесь определение более общее, чем давалось на стр. 132.

График обратно пропорциональной зависимости есть кривая линия, состоящая из двух отдельных ветвей, расположенных в первом и третьем координатных углах при $a > 0$ (рис. 33), или во втором и четвертом — при $a < 0$ (рис. 34). Эта линия называется равносторонней *гиперболой*. Она симметрична относительно начала координат так как функция $y = \frac{a}{x}$ нечетная. Эта функция неограниченна. При $x > 0$ и $x < 0$ она убывает, если $a > 0$, и возрастает, если $a < 0$; при $x = 0$ функция эта не определена. Она не периодична, не имеет нулей.

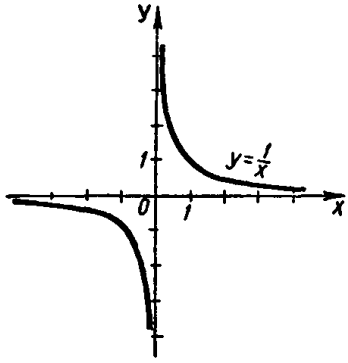


Рис. 33.

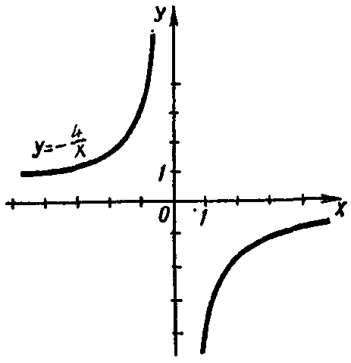


Рис. 34.

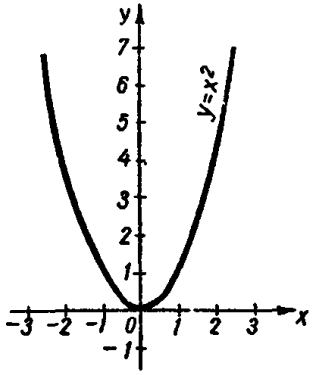


Рис. 35.

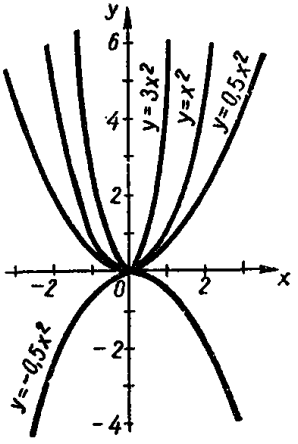


Рис. 36.

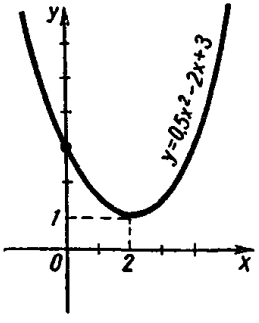


Рис. 37.

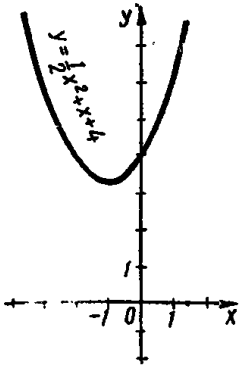


Рис. 38.

Квадратичная функция. *Квадратичной* (или квадратной) называют функцию, которую можно выразить формулой

$$y = ax^2 + bx + c,$$

где x — аргумент; $a \neq 0$, b, c — даиные числа.

Простейшей квадратичной функцией есть функция вида $y = x^2$. Это — иеограниченная четная функция, определенная для всех действительных значений аргумента x. При $x > 0$ она возрастающая, а при $x < 0$ — убывающая. Ее график (рис. 35) есть кривая линия, называемая *параболой*. Она проходит через начало координат, симметрична оси ординат, ее ветки направлены вверх.

Квадратичная функция вида $y = ax^2$ также четная, неограниченная, определенная для всех действительных x. Ее график также парабола, проходящая через начало координат и симметричная оси ординат. Но при положительных a ветви ее направлены вверх, а при $a < 0$ — вниз. Чем меньше абсолютная величина a, тем дальше отходят ветви параболы от оси ординат, тем «шире» она (рис. 36).

График квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ — такая же парабола, как и график функции $y = ax^2$, ее ветви также направлены вверх при $a > 0$ или вниз при $a < 0$, ее ось симметрии параллельна оси ординат. Только вершина этой параболы (рис. 37) находится не в начале координат, а в точке

$$\left(-\frac{b}{2a};\ c - \frac{b^2}{4a}\right).$$

Если дискриминант квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ отрицательный, т. е. $b^2 - 4ac < 0$, то график функции $y = ax^2 + bx + c$ не пересекает ось абсцисс (рис. 38). Если он равен нулю, график функции касается оси абсцисс, причем точка касания есть корень уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ (рис. 39). Если дискриминант положительный, парабола пересекает ось абсцисс в двух точках, являющихся корнями уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ (рис. 40).

Степенная функция. Степенной называют функцию, выражаемую формулой $y = x^n$, где x — аргумент, а n — показатель степени.

При n, равном 1, 2, —1, имеем соответственно функции

$$y = x,\ y = x^2 \text{ и } y = \frac{1}{x},$$

уже рассмотреиные ранее (стр. 211 и 212).

Если n — число целое четное, то функция $y = x^n$ четная; при нечетных n она нечетная. При положительных n эта функция определена для всех действительных значений аргумента x, при отрицательных n она определена для всех x, кроме $x = 0$. На рис. 41—44 даны графики степенной функции при показателях, соответственно равных 3, 4, —2, —3.

Если $n = \frac{p}{q}$ — несократимая дробь, то при четном знаменателе q фуикция $y = x^{\frac{p}{q}}$ определена только для положительных значений x. При иечетном знамеиателе q эта функция определена для всех зиаче-

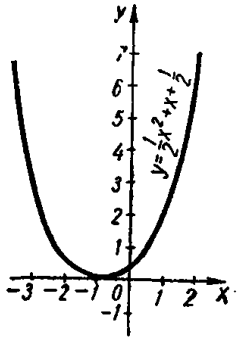


Рис. 39.

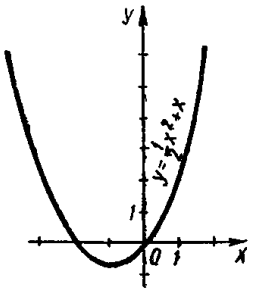


Рис. 40.

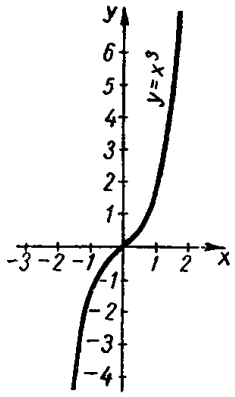


Рис. 41.

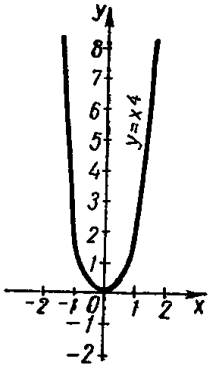


Рис. 42.

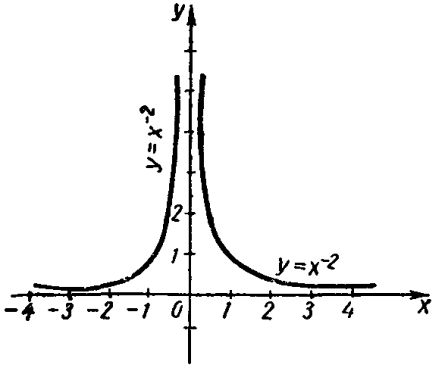


Рис. 43.

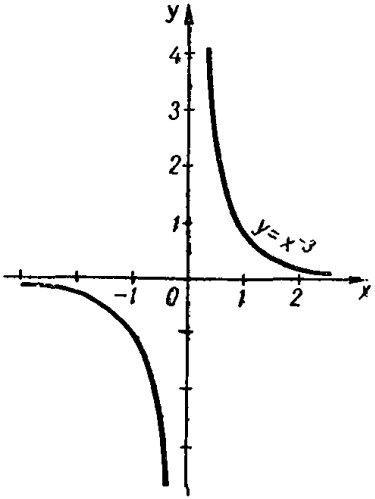


Рис. 44.

ний x, если $\frac{p}{q} > 0$; если же $\frac{p}{q} < 0$, то она определена для всех x, кроме $x = 0$. Если q нечетное, то функция $y = x^{\frac{p}{q}}$ четная при четном p и нечетная при нечетном p.

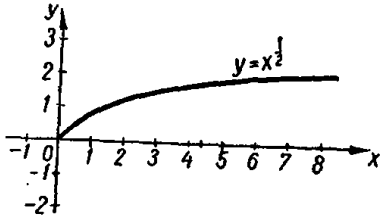


Рис. 45.

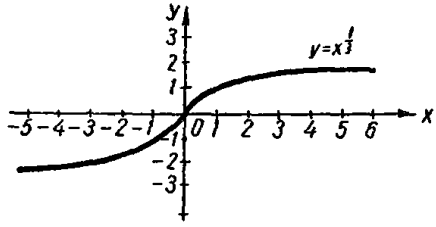


Рис. 46.

На рис. 45—47 даны графики степенных функций при показателях соответственно $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$.

При любом $n \neq 0$ степенная функция неограниченна, график каждой из этих функций проходит через точку (1; 1).

Если n — число иррациональное, то функция $y = x^n$ определена только для положительных значений аргумента x (или для неотрицательных x, если $n > 0$).

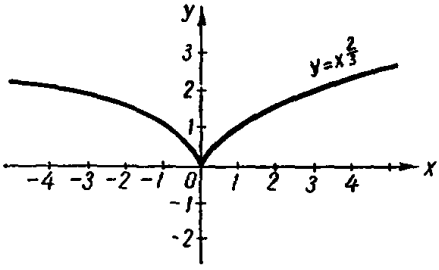


Рис. 47.

§ 40. Графические способы решения уравнений и неравенств

Системы уравнений с двумя неизвестными. С помощью графиков функций можно сравнительно легко находить (вообще говоря, приближенные) действительные решения систем двух уравнений с двумя неизвестными. Для этого каждое из уравнений рассматриваем как функциональную зависимость между его неизвестными, строим графики этих двух зависимостей на одной координатной плоскости и находим точку их пересечения. Абсцисса и ордината точки пересечения графиков дают решение системы.

Пример 1. Решить систему уравнений (графически)

$$\begin{cases} x - y = 0{,}5, \\ 2x + 3y = 6. \end{cases}$$

Каждое из этих уравнений линейное, следовательно, их графики — прямые линии. Строим на одной координатной плоскости графики этих уравнений (рис. 48). Они пересекаются в одной точке с координатами 1,5 и 1.

Ответ. Данная система имеет одно решение: $x = 1{,}5$, $y = 1$.

Пример 2. Решить систему

$$\begin{cases} xy = 2, \\ y - x = 1. \end{cases}$$

Даиные уравнения можно преобразовать так:

$$y = \frac{2}{x} \text{ и } y = x + 1.$$

График первого уравнения есть гипербола, а второго — прямая (рис. 49). Они пересекаются в двух точках (1; 2) и (—2; —1).

Ответ. Система имеет два решения: $x_1 = 1$; $y_1 = 2$ и $x_2 = -2$; $y_2 = -1$.

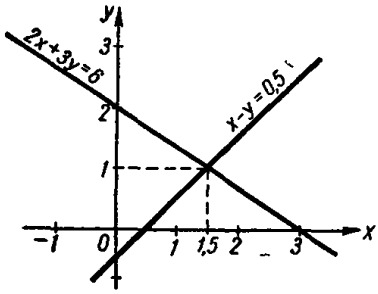


Рис. 48.

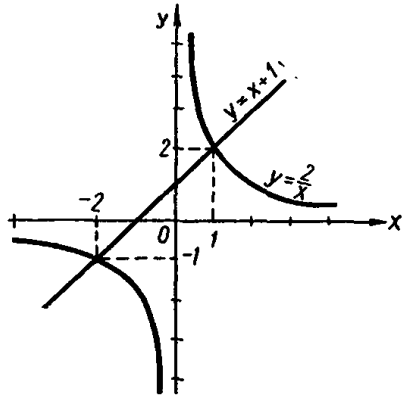


Рис. 49.

Графическое решение уравнений с одним неизвестным.

Пример 1. Решить графическим способом уравнение

$$x^3 - 2x - 4 = 0.$$

Представим данное уравнение в виде

$$x^3 = 2x + 4.$$

Обозначим каждую его часть буквой y и решим систему полученных двух уравнений с двумя неизвестными (рис. 50):

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = 2x + 4. \end{cases}$$

Как видим, графики пересекаются в одной точке с абсциссой 2.

Ответ. Данное уравнение имеет один действительный корень $x = 2$.

Пример 2. Решить уравнение

$$x^4 - x + 2 = 0.$$

$x^4 = x - 2$. Рассмотрим систему

$$y = x^4,$$
$$y = x - 2.$$

Построив графики каждого из уравнений (рис. 51), видим, что они не имеют общих точек.

Ответ. Данное уравнение действительных корней не имеет.

Графическое решение неравенств с одним неизвестным.

Пример 1. Решить неравенство

$$x^2 - x - 2 < 0.$$

Построив график функции $y = x^2 - x - 2$ (рис. 52), видим, что y отрицательный только при

$$-1 < x < 2.$$

Ответ. $-1 < x < 2$.

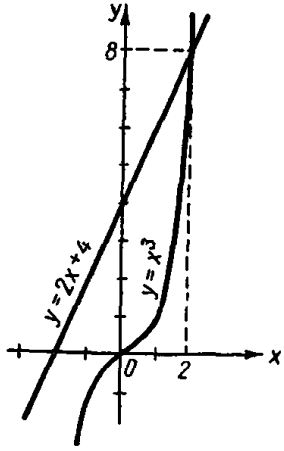


Рис. 50.

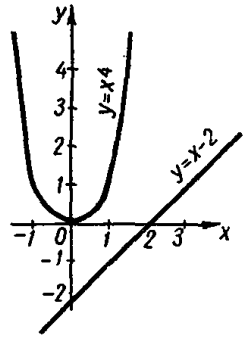


Рис. 51.

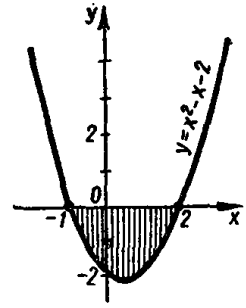


Рис. 52.

Показательная и логарифмическая функции

§ 41. Показательная функция

Функция, которую можно выразить формулой $y = a^x$, где x аргумент, а a — положительное число, называется показательной функцией.

Эта функция определена для любых действительных x.

Примечание. Число a здесь берется положительным потому, что при отрицательных a числа $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{3}{4}}$ и многие другие не были бы действительными. Если a положительное, а x равен несократимой дробн с четным знаменателем, то a^x имеет два действительных значения, например $9^{\frac{1}{2}}$ имеет два значения: 3 и —3. Одиако значения фуикции $y = a^x$ берутся только положительные: каждому действительному значению x соответствует только одно положительное значение показательной фуикцин a^x.

Показательная функция при любом основании a положительная. При $a > 1$ эта функция возрастающая, а при $a < 1$ — убывающая. График показательной функции — кривая, проходящая через точку (0; 1). Он неограниченно приближается к оси абсцисс, но не дости-

гает ее. Графики функций $y = a^x$ и $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ симметричны относительно оси ординат.

На рис. 53 даны графики трех показателей функций:

$$y = 2^x,\ y = 0{,}5^x \text{ и } y = 5^x.$$

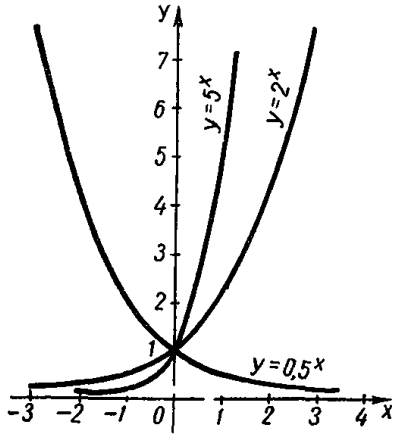


Рис. 53.

§ 42. Логарифмы

Логарифмом числа N по данному основанию a называется показатель степени x, в которую нужно возвести основание a, чтобы получить число N.

Обозначение: $\log_a N = x$. Таким образом, по определению, если $x = \log_a N$, то $a^x = N$, или $a^{\log_a N} = N$. Основание a предполагается положительным и не равным единице.

Примеры. $\log_2 8 = 3$, так как $2^3 = 8$; $\log_2 0{,}25 = -2$, так как $2^{-2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$. Знаком lg без указания основания обозначается *десятичный* логарифм, т.е. логарифм при основании 10, знаком log без указания основания — логарифм по произвольному основанию (в пределах одной формулы это основание мыслится одним и тем же)*.

Логарифм — слово греческое, оно состоит из двух слов: λόγος — отношение, ἀριθμός — число. Слово «логарифм», таким образом, в буквальном переводе обозначает число, измеряющее отношение.

Логарифмическая функция. Функция, которую можно выразить формулой $y = \log_a x$, где x — аргумент, а $a \neq 1$ положительное число, называется *логарифмической функцией*.

---

* Для теоретических исследований наиболее пригодным основанием логарифмов является трансцендентное число $e = 2{,}7182818...$ В математике буквой e обозначают $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ логарифмы с основанием e называются *натуральными логарифмами*. Их принято обозначать символом ln. Например, $\ln x$ обозначает то же, что и $\log_e x$.

Примеры логарифмических функций:

$$y = \log_2 x,\ y = \log_\pi x,\ y = \log_{10} x.$$

Логарифмическая функция $y = \log_a x$ обратная показательной функции $y = a^x$. Поэтому их графики симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов (рис. 54).

На рис. 55 даны графики следующих логарифмических функций:

$$y = \log_2 x,\ y = \log_{\frac{1}{2}} x \text{ и } y = \log_5 x.$$

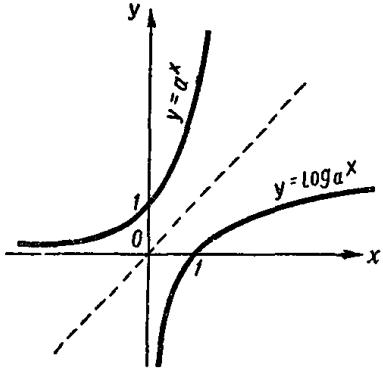


Рис. 54.

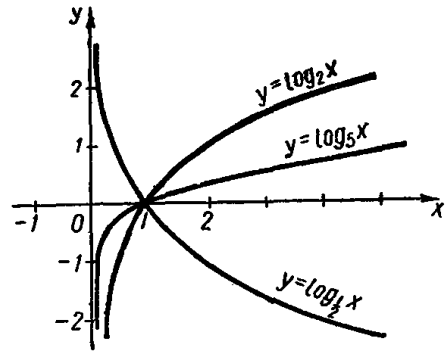


Рис. 55.

Свойства логарифмов. 1. Всякое положительное число по любому* основанию имеет единственный логарифм.

2. При любом положительном основании отрицательные числа не имеют логарифмов.

3. При любом основании логарифм единицы равен нулю.

4. Логарифм самого основания равен единице.

5. При основании, большем единицы, большему числу соответствует и больший логарифм, при этом логарифмы чисел, больших единицы, положительны, а логарифмы чисел, меньших единицы, отрицательны.

При основании, меньшем единицы, большему числу соответствует меньший логарифм, при этом логарифмы чисел, меньших единицы, положительны, а логарифмы чисел, больших единицы, отрицательны.

6. Если основание логарифмов больше единицы, то при неограниченном возрастании числа неограниченно возрастает и его логарифм, а при стремлении числа (положительного) к нулю его логарифм, оставаясь отрицательным, неограниченно возрастает по абсолютной величине.

7. Если основание логарифмов меньше единицы, то при неограниченном возрастании числа его логарифм, оставаясь отрицательным, неограниченно убывает, а при стремлении положительного числа к нулю, его логарифм неограниченно возрастает.

---

* Здесь и дальше мы имеем в виду любое положительное, не равное единице, основание логарифмов (см. определение логарифма, стр. 218). Логарифмы рассматриваем только действительные.

Все эти свойства нетрудно «увидеть», рассматривая графики логарифмических функций при разных основаниях. Однако их можно доказать и аналитически, не обращаясь к графикам.

Решение примеров с использованием свойств логарифмов.

Пример 1. Исходя из определения логарифма, найти:

А. Какое число имеет логарифм 2 при основании 7?

Б. Найти логарифм 125 по основанию 5.

В. При каком основании логарифм числа 16 равен 4?

Решение.

$$\text{А. } 2 = \log_7 x, \qquad x = 7^2 = 49.$$
$$\text{Б. } x = \log_5 125, \quad 5^x = 125, \quad x = 3.$$
$$\text{В. } 4 = \log_x 16, \quad x^4 = 16, \quad x = 2.$$

Пример 2. На основании тождества $a^{\log_a N} = N$ найти:

А. $36^{\log_6 2}$, Б. $81^{0{,}5\log_9 7}$ В. $2^{\log_2 5+1}$

Решение.

А. $36^{\log_6 2} = 6^{2\log_6 2} = 6^{\log_6 2^2} = 2^2 = 4.$

Б. $81^{0{,}5\log_9 7} = \left[(9^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{\log_9 7} = 9^{\log_9 7} = 7.$

В. $2^{\log_2 5+1} = 2^{\log_2 5} \cdot 2 = 5 \cdot 2 = 10.$

Пример 3. Что больше: $\log_a 2$ или $\log_a 3$?

Если $a > 1$, то большему числу соответствует и больший логарифм, т. е. $\log_a 2 < \log_a 3$. Если $a < 1$, то большему числу соответствует меньший логарифм, т. е. $\log_a 2 > \log_a 3$. Здесь предполагается, что

$$a > 0, \quad a \neq 1.$$

Пример 4. Определить x, если:

А. $\log_{3\sqrt{3}} \frac{1}{27} = x$; Б. $\log_x 0{,}125 = -2$; В. $\log_{3\sqrt{3}} x = -\frac{2}{3}$.

Решение:

А. $(3\sqrt{3})^x = \frac{1}{27}$, $(\sqrt{27})^x = 27^{-1}$, $(27)^{\frac{x}{2}} = 27^{-1}$, $\frac{x}{2} = -1$, $x = -2$;

Б. $x^{-2} = 0{,}125$, $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{8}$, $x^2 = 8$, $x = 2\sqrt{2}$;

В. $x = (3\sqrt{3})^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{(3\sqrt{3})^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\left(3^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3}$.

Пример 5. Определить x из уравнений:

А. $5\log_2 x - 6 = 2\log_2 x$; Б. $(\log_3 x)^2 - 3\log_3 x + 2 = 0$,

Решение.

А. $5\log_2 x - 6 = 2\log_2 x$, $3\log_2 x = 6$, $\log_2 x = 2$, $x = 2^2 = 4$;

Б. $\log_3 x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$, $(\log_3 x)_1 = 2$,

$(\log_3 x)_2 = 1$, $x_1 = 3^2 = 9$ и $x_2 = 3^1 = 3$.

Переход от одного осиования логарифмов к другому. Если иадо перейти от логарифмов с основанием a к логарифмам с осиованием b, пользуются следующим тождеством:

$$\log_b N = \frac{1}{\log_a b} \cdot \log_a N.$$

Миожитель $\frac{1}{\log_a b}$ называют *модулем перехода.*

Рассмотрим более подробио, как переходить от десятичных логарифмов к натуральным и наоборот.

Чтобы по известному десятичному логарифму числа N найти его натуральный логарифм, нужно разделить десятичный логарифм числа N на десятичный логарифм числа e (последний равен 0,4343...).

Величина $\lg e = 0{,}4343...$ называется *модулем десятичных логарифмов* и обозначается буквой M, так что

$$\ln N = \frac{1}{M} \lg N.$$

Например, из таблиц десятичных логарифмов имеем

$\lg 2 = 0{,}3010$. Отсюда $\ln 2 = \frac{1}{M} \cdot 0{,}3010 = 0{,}6932$.

Чтобы по известному натуральному логарифму числа N найти его десятичный логарифм, нужно умножить натуральный логарифм на модуль десятичных логарифмов $M = \lg e$:

$$\lg N = \lg e \cdot \ln N = 0{,}4343 \ln N.$$

Например, $\ln 3 = 1{,}0986$, а отсюда $\lg 3 = M \cdot 1{,}0986 = 0{,}4771$.

Очеиь часто в логарифмических преобразованиях пользуются также следующими формулами:

$$\log_{a^k} a^n = \frac{n}{k}; \quad \log_{b^n} a^n = \log_b a; \quad \log_{a^k} b = \frac{1}{k} \log_a b;$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

Пример 1. Что больше, $\log_3 3$ или $\log_{16} 9$?

Используя формулу $\log_{b^n} a^n = \log_b a$, получаем

$$\log_{16} 9 = \log_{4^2} 3^2 = \log_4 3.$$

Пример 2. Вычислить $\log_{\sqrt{3}} 8$, зная, что $\log_2 3 = a$.

$$\log_{\sqrt{3}} 8 = \log_3 64 = \frac{1}{\log_{64} 3} = \frac{1}{\log_{2^6} 3} = \frac{1}{\frac{1}{6} \log_2 3} = \frac{6}{\log_2 3} = \frac{6}{a}.$$

Логарифмирование. Прологарифмировать алгебраическое выражение — значит выразить логарифм его через логарифмы отдельных чисел, входящих в это выражение. Это можно сделать, используя теоремы о логарифме произведения, частного, степеии и корня.

Логарифм произведения равен сумме логарифмов сомножителей:

$$\log(ab) = \log a + \log b.$$

Логарифм частного (дроби) равен разности логарифмов делимого и делителя:

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b.$$

Логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм ее основания:

$$\log a^m = m \log a.$$

Логарифм корня равен частному от деления логарифма подкоренного числа на показатель корня:

$$\log \sqrt[m]{a} = \frac{\log a}{m}.$$

Примечание. При логарифмировании алгебраических выражений надо иметь в виду, что логарифм суммы не равен сумме логарифмов, т. е. нельзя вместо $\log (a + b)$ писать $\log a + \log b$. Нельзя также вместо $\log (a - b)$ писать $\log a - \log b$. Все сформулированные выше теоремы справедливы только для положительных значений a и b.

Логарифмирование алгебраических выражений проиллюстрируем на примерах.

Примеры. Прологарифмируем следующие выражения:

1) $x = 3bc$; $\log x = \log 3 + \log b + \log c$;

2) $x = \frac{a}{bc}$; $\log x = \log a - \log (bc) = \log a - \log b - \log c$;

3) $x = a^3b^2$; $\log x = \log a^3 + \log b^2 = 3 \log a + 2 \log b$;

4) $x = \sqrt[4]{\frac{a^3}{2b^2c}}$; $\log x = \frac{1}{4} \log \frac{a^3}{2b^2c} = \frac{1}{4} (\log a^3 - \log 2b^2c) =$

$= \frac{1}{4} [3 \log a - (\log 2 + \log b^2 + \log c)] = \frac{1}{4} (3 \log a - \log 2 -$

$- 2 \log b - \log c)$;

5) $x = 15p^2 \sqrt[4]{2p^2 (p-q)^3}$; $\log x = \log 15 + 2 \log p + \frac{1}{4} [\log 2 +$

$+ 2 \log p + 3 \log (p - q)] = \log 15 + 2 \log p + \frac{1}{4} \log 2 + \frac{1}{2} \log p +$

$+ \frac{3}{4} \log (p - q) = \log 15 + \frac{5}{2} \log p + \frac{1}{4} \log 2 + \frac{3}{4} \log (p - q)$;

6) $x = \frac{\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}{\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a}}}$; $\log x = \frac{1}{2} \log a + \frac{1}{4} \log a + \frac{1}{8} \log a -$

$- \frac{1}{3} \log a - \frac{1}{9} \log a = \frac{31}{72} \log a.$

7. Потенцирование. Если по данному результату логарифмирования находят выражение, от которого получен этот результат, то такую операцию называют *потенцированием.*

Примеры. Пропотенцировать следующие выражения:

А) $\log x = 5\log c - \frac{1}{3}\log d$;

Б) $\log x = \log b - \frac{1}{m}\log(b-c) + m\log(b+c)$.

Решение.

А) $\log x = \log c^5 - \log\sqrt[3]{d} = \log\frac{c^5}{\sqrt[3]{d}}$; $x = \frac{c^5}{\sqrt[3]{d}}$;

Б) $\log x = \log b + \log(b-c)^{-\frac{1}{m}} + \log(b+c)^m = \log[b(b-c)^{-\frac{1}{m}}(b+c)^m]$; $x = \frac{b(b+c)^m}{\sqrt[m]{b-c}}$.

§ 43. Десятичные логарифмы

Свойства десятичных логарифмов. 1. *Логарифм целого числа, изображенного единицей с последующими нулями, есть целое положительное число, содержащее столько единиц, сколько нулей в данном числе.*

Примеры. $\lg 100 = 2$; $\lg 10000 = 4$.

2. *Логарифм десятичной дроби, изображаемой единицей с предшествующими нулями, есть целое отрицательное число содержащее столько отрицательных единиц, сколько нулей в изображении дроби, считая и 0 целых.*

Примеры. $\lg 0{,}00001 = -5$; $\lg 0{,}001 = -3$.

3. *Логарифм рационального числа, которое не является степенью 10 с целым показателем (положительным, отрицательным или нулевым), есть трансцендентное число, выражаемое бесконечной десятичной дробью.*

Логарифм иррационального числа может быть как рациональным, так и иррациональным числом. Например, $\lg\sqrt[7]{100}\frac{1}{7}\lg 100 = \frac{2}{7}$ (рациональное число). $\lg\sqrt{3} = \frac{1}{2}\lg 3$ (трансцендентное число).

Целая часть логарифма называется его *характеристикой*, а дробная — *мантиссой*.

4. *Характеристика логарифма числа, большего единицы, на единицу меньше числа цифр его целой части.*

Примеры. $\lg 3{,}15 = 0, \ldots$; $\lg 375 = 2, \ldots$; $\lg 2000 = 3, \ldots$

5. *Характеристика логарифма числа, меньшего единицы, содержит столько отрицательных единиц, сколько нулей в этом числе предшествует первой значащей цифре, считая и нуль целых.* При этом мантисса логарифма положительна.

Примеры. $\lg 0{,}35 = \bar{1}, \ldots$; $\lg 0{,}0054 = \bar{3}, \ldots$

6. *От умножения числа на 10, 100, 1000, ..., вообще на единицу с последующими нулями, мантисса логарифма не меняется, а характеристика увеличивается на столько единиц, сколько нулей в множителе.*

От деления числа на единицу с нулями мантисса логарифма не изменяется, а характеристика уменьшается на столько единиц, сколько нулей в делителе.

Поэтому перенесение запятой в десятичной дроби на несколько знаков вправо или влево не изменяет мантиссы логарифма этой дроби, а изменяет только характеристику.

Таким образом, логарифмы чисел 0,00423; 0,0423; 4,23; 423 отличаются только характеристиками, но не мантиссами (при условии, что все мантиссы положительны). Мантиссы логарифмов чисел, имеющих одну и ту же значащую часть, одинаковы.

Преобразование отрицательного логарифма. Известно, что десятичные логарифмы чисел, меньших 1, отрицательны. Такие логарифмы всегда можно преобразовать так, что мантисса у них будет положительная, а характеристика — отрицательная. Это выполняется по следующему правилу.

Чтобы преобразовать логарифм с отрицательной мантиссой в логарифм с положительной мантиссой, надо к характеристике прибавить минус единицу, а к мантиссе прибавить плюс единицу.

Так, например, если мы имеем логарифм — 2,3781, то можно его преобразовать так:

$-2{,}3781 = -2 - 0{,}3781 = (-2 - 1) + (1 - 0{,}3781) = -3 + 0{,}6219 = \bar{3}{,}6219.$

Кратко эти действия записывают следующим образом:

$$-2{,}3781 = \overset{-1+1}{-2{,}3781} = \bar{3}{,}6219.$$

Примеры.

$$-1{,}3720 = \overset{-1+1}{-1{,}3720} = \bar{2}{,}6280$$

$$-0{,}7421 = \overset{-1+1}{-0{,}7421} = \bar{1}{,}2579.$$

Действия над логарифмами с отрицательными характеристиками. Сложение. При сложении логарифмов с отрицательными характеристиками сначала складывают их мантиссы, а затем характеристики.

Примеры.

а) $\begin{array}{r} +\ \bar{3}{,}1628 \\ \bar{1}{,}2291 \\ \hline \bar{4}{,}3919 \end{array}$ б) $\begin{array}{r} +\ \bar{1}{,}8456 \\ \bar{2}{,}5164 \\ \hline \bar{2}{,}3620 \end{array}$

Вычитание. При вычитании логарифмов с отрицательными характеристиками вычитают сначала мантиссу, а затем характеристику.

Примеры.

а) $\begin{array}{r} 2{,}1582 \\ -\ \bar{1}{,}3791 \\ \hline 2{,}7791 \end{array}$ б) $\begin{array}{r} -\ 0{,}3724 \\ 3{,}5492 \\ \hline \bar{4}{,}8232 \end{array}$ в) $\begin{array}{r} -\ \bar{3}{,}3284 \\ 2{,}3437 \\ \hline \bar{6}{,}9847 \end{array}$

Умножение. Чтобы умножить логарифм с отрицательной характеристикой на положительное число, надо отдельно умножить на это число характеристику и отдельно положительную мантиссу

Примеры.

1) $\begin{array}{r} \bar{1}{,}7428 \\ \times\ \ 2 \\ \hline \bar{1}{,}4856 \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} \bar{3}{,}6735 \\ \times\ \ 4 \\ \hline \bar{10}{,}6940 \end{array}$

Деление. При делении рассматривают два случая.

Если характеристика кратна делителю, то надо отдельно делить характеристику и отдельно мантиссу.

Примеры. 1) $\overline{4},0568 : 2 = \overline{2},0284$; 2) $\overline{2},1314 : 2 = \overline{1},0657$.

Если характеристика не кратна делителю, то для характеристики прибавляют столько единиц, чтоб получить отрицательное число, кратное делителю, а к положительной мантиссе прибавляют столько же положительных единиц; после этого делят отрицательную характеристику и положительную мантиссу отдельно.

Пример. $\overline{3},6428 : 2 = (\overset{-1}{-3} \overset{+1}{+ 0},6428) : 2 = (-4 + 1,6428) : 2 = -2 + 0,8214 = \overline{2},8214$.

Логарифмические вычисления.

Пример 1. Вычислить

$$x = \frac{8,367 \cdot \sqrt{0,6725}}{0,9658^2 \cdot \sqrt[3]{0,3575}}.$$

$$\lg x = \lg 8,367 + \frac{1}{2}\lg 0,6725 - 2\lg 0,9658 - \frac{1}{3}\lg 0,3575$$

$$\lg 8,367 = 0,9226$$

$$\frac{1}{2}\lg 0,6725 = \frac{1}{2}\overset{-1}{\cdot}\overset{+1}{\overline{1},8277} = \overline{1},9139$$

$$-2\lg 0,9658 = -2 \cdot \overline{1},9849 = -\overline{1},9698 = 0,0302$$

$$-\frac{1}{3}\lg 0,3575 = -\frac{1}{3}\overset{-2}{\cdot}\overset{+2}{\overline{1},5533} = -1,8511 = 0,1489$$

$$\lg x = 1,0156$$

$$x = 10,36.$$

§ 44. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства

Показательные уравнения. *Показательными* уравнениями называют такие уравнения, в которых неизвестное входит в показатель степени. Общего метода решения показательных уравнений нет. Однако можно указать несколько групп уравнений, которые могут быть решены методами элемеитарной математики.

Решение показательных уравнений основано на следующих теоремах.

Теорема 1. *Если основания двух степеней равны и степени равны, причем основания* $a > 0$ *и* $a \neq 1$, *то показатели степеней также равны, т. е. если* $a^m = a^n$, то $m = n$.

Теорема 2. *Если у равных степеней равны и отличны от нуля показатели степени, то равны и основания степеней, т. е. если* $a^m = b^m$, $m \neq 0$, *то* $a = b$ *(имеются в виду положительные* a *и* b*).*

Теперь рассмотрим основные типы показательных уравнений.

Простейшие показательные уравнения. *Простейшим показательным уравнением* называется уравнение вида $a^x = b$,

где a — отличное от 1 положительное число. При $b \leqslant 0$ уравнение решений не имеет, так как при действительных значениях x степень a^x не может быть отрицательным числом или быть равным нулю. При $b > 0$ это уравнение имеет единственное решение.

Пример. Решить уравнение $25^x = \frac{1}{5}$.

Решение. Первый способ:

$$(5^2)^x = 5^{-1},\ 5^{2x} = 5^{-1},\ 2x = -1,\ x = -\frac{1}{2}.$$

Второй способ:

$$x \lg 25 = -\lg 5,\ 2x \lg 5 = -\lg 5,\ 2x = -1,\ x = -\frac{1}{2}.$$

Показательные уравнения вида $a^{\varphi(x)} = b$, где a — отличное от 1 положительное число, а $\varphi(x)$ — элементарная алгебраическая функция.

Введением нового неизвестного $u = \varphi(x)$ это уравнение приводится к простейшему показательному уравнению $a^u = b$.

Пример. Решить уравнение $2^{x^2-6x-2,5} = 16\sqrt{2}$.

Решение Первый способ:

$$2^{x^2-6x-2,5} = 2^4 \cdot 2^{\frac{1}{2}};\ 2^{x^2-6x-2,5} = 2^{\frac{9}{2}}.$$

Отсюда

$$x^2 - 6x - 2,5 = 4,5,\ \text{или}\ x^2 - 6x - 7 = 0.$$

Тогда

$$x_1 = 7,\ x_2 = -1.$$

Второй способ:

$$(x^2 - 6x - 2,5) \lg 2 = \lg 16\sqrt{2};\ (x^2 - 6x - 2,5) \lg 2 = 4,5 \lg 2.$$

Отсюда

$$x^2 - 6x - 2,5 = 4,5,\ \text{или}\ x^2 - 6x - 7 = 0$$

и т. д.

Показательные уравнения вида $a^{f(x)} = b^{\varphi(x)}$, где a и b — отличные от 1 положительные числа, а $f(x)$ и $\varphi(x)$ — элементарные алгебраические функции.

Это уравнение приводится к равносильному уравнению

$$f(x) \log_c a = \varphi(x) \log_c b.$$

Если a и b — степени какого-нибудь числа c, т. е. $a = c^p$, $b = c^q$, то уравнение можно записать так:

$$c^{pf(x)} = c^{q\varphi(x)}$$

и его решение приводится к решению равносильного ему уравнения:

$$pf(x) = q\varphi(x).$$

Пример 1. Решить уравнение $4^{\frac{x-1}{2}} = 8^{x^2-1}$.

Запишем уравнение так:

$$2^{2\cdot\frac{x-1}{2}} = 2^{3(x^2-1)}.$$

Отсюда

$$\frac{2(x-1)}{2} = 3(x^2-1), \quad x_1 = 1, \quad x_2 = -\frac{2}{3}.$$

Пример 2. Решить уравнение

$$4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}.$$

Запишем уравнение так:

$$2^{2x} + 2^{2x-1} = 3^{x+\frac{1}{2}} + 3^{x-\frac{1}{2}}.$$

Отсюда

$$2^{2x-1}(2+1) = 3^{x-\frac{1}{2}}(3+1), \quad 2^{2x-1}\cdot 3 = 3^{x-\frac{1}{2}}\cdot 4,$$

$$\frac{2^{2x-1}}{4} = \frac{3^{x-\frac{1}{2}}}{3}, \quad 2^{2x-3} = 3^{\frac{2x-3}{2}}.$$

Прологарифмировав, получим

$$(2x-3)\lg 2 = \frac{2x-3}{2}\lg 3.$$

Тогда

$$(2x-3)\left(\lg 2 - \frac{1}{2}\lg 3\right) = 0,$$

значит

$$2x - 3 = 0, \quad x = \frac{3}{2}.$$

Показательные уравнения вида $F[\varphi(x)] = 0$, где $\varphi(x)$ — некоторая показательная функция, а F — элементарная алгебраическая функция. Полагая $\varphi(x) = u$, получаем уравнение $F(u) = 0$. Если $t_1, t_2, \ldots, t_s$ — действительные решения последнего, то решение уравнения $F[\varphi(x)] = 0$ приводится к решению уравнений

$$\varphi(x) = t_i \quad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Пример. Решить уравнение

$$3^{x+3} - \frac{2}{3^{x+2}} - 1 = 0.$$

Так как $3^{x+3} = 3^3 \cdot 3^x$ и $3^{x+2} = 3^2 \cdot 3^x$, то уравнение запишем так:

$$3^3 \cdot 3^x - \frac{2}{3^x \cdot 3^2} - 1 = 0.$$

Умножив обе части уравнения на $3^2 \cdot 3^x$, получим

$$3^5 \cdot 3^{2x} - 3^2 \cdot 3^x - 2 = 0.$$

Полагая $3^x = t$, получим квадратное уравнение $3^5 t^2 - 3^2 t - 2 = 0$. Отсюда $t_1 = -\frac{2}{27}$, $t_2 = \frac{1}{9}$.

Уравнение $3^x = -\frac{2}{27}$ решений не имеет; уравнение $3^x = \frac{1}{9}$ имеет решение $x = -2$. Следовательно, данное уравнение имеет решение $x = -2$. (Еще лучше было бы заменить: $3^{x+2} = y$).

Логарифмические уравнения. *Логарифмическими уравнениями* называют такие уравнения, в которых неизвестное входит под знак логарифма.

При решении логарифмических уравнений часто приходится логарифмировать и потенцировать обе части уравнения. То же бывает и при решении показательных уравнений. Указанные операции могут привести к уравнениям, не равносильным данным.

Так, если A и B являются выражениями, содержащими неизвестные, то следующие уравнения не всегда равносильны:

А) $A = B$ и $\lg A = \lg B$;

Б) $\lg(AB) = \lg C$ и $\lg A + \lg B = \lg C$;

В) $\lg \frac{A}{B} = \lg C$ и $\lg A - \lg B = \lg C$;

Г) $\lg A^n = C$ и $n \lg A = C$.

Для логарифмических уравнений, так же как и для показательных, общего метода решения нет. Однако среди логарифмических уравнений можно выделить несколько групп уравнений, решаемых элементарными методами. Приступая к решению уравнения, необходимо установить область допустимых значений для неизвестного.

Простейшими логарифмическими уравнениями называют уравнения вида

$$\log_a x = b,$$

где a — отличное от 1 положительное число. При всяком действительном b уравнение имеет единственное решение: $x = a^b$.

Пример. Решить уравнение $\lg x = 2 - \lg 5$.

$$x > 0,\ \lg x = \lg 100 - \lg 15 = \lg \frac{100}{5} = \lg 20;\ x = 20.$$

Логарифмическое уравнение вида $\log f(x) = b$, где a — отличное от 1 положительное число, а $f(x)$ — элементарная алгебраическая функция.

Введением неизвестного $t = f(x)$ уравнение приводится к простейшему логарифмическому уравнению $\log_a t = b$.

Пример 1. Решить уравнение $\log_3(x^2 - 7x + 21) = 2$.

Область допустимых значений для x — вся числовая ось, так как $x^2 - 7x + 21 > 0$ при любом x (дискриминант $D < 0$). По определению логарифма

$$x^2 - 7x + 21 = 3^2, \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 4.$$

Пример 2. Решить уравнение $\log_{x-1}(x^2 - 5x + 2{,}25) = 2$.

Область допустимых значений неизвестного определяется из условий:

$$x - 1 > 0, \quad x - 1 \neq 1; \qquad x^2 - 5x + 2{,}25 > 0.$$

Следовательно, $x > 4{,}5$.

Решение данного уравнения приводится к решению уравнения

$$x^2 - 5x + 2{,}25 = (x-1)^2, \text{ или } -3x = -1{,}25, \quad x = \frac{5}{12};$$

$x = \frac{5}{12}$ не входит в область допустимых значений.

Уравнение не имеет действительных корней.

Логарифмическое уравнение вида $\log_a f(x) = \log_a \varphi(x)$, где a — отличное от 1 положительное число, $f(x)$ и $\varphi(x)$ — элементарные алгебраические функции. Данное уравнение приводится к решению уравнения $f(x) = \varphi(x)$. Поэтому для решения уравнения $\log_a f(x) = \log_a \varphi(x)$ достаточно найти все решения уравнения $f(x) = \varphi(x)$ и среди них выбрать те, которые относятся к области допустимых значений уравнения $\log_a f(x) = \log_a \varphi(x)$. Если же уравнение $f(x) = \varphi(x)$ решений не имеет, то их не имеет и уравнение

$$\log_a f(x) = \log_a \varphi(x).$$

Пример 1. Решить уравнение $5 \lg x = 3 \lg \frac{x}{2}$.

Область допустимых значений $x > 0$;

$$\lg x^5 = \lg \left(\frac{x}{2}\right)^3, \text{ тогда } x^5 = \left(\frac{x}{2}\right)^3.$$

Решая уравнение $x^5 = \left(\frac{x}{2}\right)^3$, получаем $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = -\frac{\sqrt{2}}{4}$, $x_5 = \frac{\sqrt{2}}{4}$. К области допустимых значений уравнения относится только x_5. Следовательно, данное уравнение имеет одно решение $x = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Пример 2. Решить уравнение $\lg(2x) = 2 \lg(4x - 15)$.

Для $\lg(2x)$ область допустимых значений неизвестного $x > 0$; для $\lg(4x - 15)$ имеем $4x - 15 > 0$, или $x > \frac{15}{4}$. Следовательно, область допустимых значений неизвестного уравнения будет $x > 3\frac{3}{4}$. Преобразуем данное уравнение:

$\lg(2x) = \lg(4x - 15)^2$, $2x = (4x - 15)^2$, $16x^2 - 122x + 225 = 0$.

Значит, $x_1 = \frac{9}{2}$, $x_2 = 3\frac{1}{8}$. Так как x_2 не принадлежит области допустимых значений уравнения, а x_1 удовлетворяет уравнению, то уравнение имеет единственный корень:

$$x = \frac{9}{2}.$$

Логарифмические уравнения вида $\log_a f_1(x) + \log_a f_2(x) + \cdots + \log_a f_s(x) = \log_a \varphi_1(x) + \log_a \varphi_2(x) + \cdots + \cdots \log_a \varphi_m(x)$, где a — отличное от 1 положительное число, а $f_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$, $\varphi_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ — алгебраические функции; при этом некоторые из них могут быть постоянными числами.

Уравнения такого вида приводятся к уравнению вида

$$f_1(x)f_2(x) \ldots f_s(x) = \varphi_1(x)\varphi_2(x) \ldots \varphi_m(x).$$

Пример 1. Решить уравнение $\lg(3x - 11) + \lg(x - 27) = 3$.

Найдем сначала область допустимых значений для x:

$$3x - 11 > 0, \qquad x > 3\frac{2}{3};$$

$$x - 27 > 0, \qquad x > 27.$$

Общая область допустимых значений $x > 27$.

Заменив $3 = \lg 1000$, уравнение перепишем так: $\lg[(3x - 11)(x - 27)] = \lg 1000$, отсюда $(3x - 11)(x - 27) = 1000$, или $3x^2 - 92x - 703 = 0$, $x_1 = 37$, $x_2 = -\frac{19}{3}$. Так как $x_2 = -\frac{19}{3}$ не принадлежит области допустимых значений, то уравнение имеет единственный корень $x = 37$.

Пример 2. Решить уравнение

$$\lg(2x) + \lg(x + 3) = \lg 2 + \lg(6x - 2).$$

Область допустимых значений для

$$\lg(2x) : 2x > 0, \quad x > 0;$$

$$\lg(x + 3) : x + 3 > 0, \; x > -3;$$

$$\lg(6x - 2) : 6x - 2 > 0, \quad x > \frac{1}{3}.$$

Общая область допустимых значений будет $x > \frac{1}{3}$.

Уравнение принимает вид $x(x + 3) = 6x - 2$, или $x^2 - 3x + 2 = 0$, отсюда $x_1 = 2$, $x_2 = 1$. Оба эти значения принадлежат области определения и оба они являются решениями данного уравнения.

Логарифмические уравнения вида $F[g(x)] = 0$, где $g(x)$ — логарифмическая функция, а F — элементарная алгебраическая. Для решения уравнения вводят переменную $t = g(x)$. Тогда данное уравнение приводится к уравнению $F(t) = 0$.

Пример 1. Решить уравнение $(\lg x - 5)\lg x^3 + 18 = 0$.

Область допустимых значений $x > 0$. Так как $\lg x^3 = 3 \lg x$, то данное уравнение равносильно уравнению

$$(\lg x - 5)3 \lg x + 18 = 0.$$

Полагая $\lg x = t$, получим

$$3t(t - 5) + 18 = 0, \; t^2 - 5t + 6 = 0, \; t_1 = 2, \; t_2 = 3.$$

Решив уравнения $\lg x = 2$ и $\lg x = 3$, получим решения данного уравнения $x_1 = 100$ и $x_2 = 1000$.

Пример 2. Решить уравнение $(\log_2 x)^2 - \log_2 x - 2 = 0$.

Область допустимых значений $x > 0$. Положим $\log_2 x = z$, откуда $z^2 - z - 2 = 0$, $z_1 = +2$, $z_2 = -1$. Следовательно,

$$\log_2 x = 2, \; x_1 = 4; \; \log_2 x = -1, \; x_2 = \frac{1}{2}.$$

Пример 3. Решить уравнение $\log_5 \log_4 \log_3 x = 0$.
Перепишем уравнение так:

$$\log_5(\log_4 \log_3 x) = 0.$$

Тогда число, стоящее в скобках, по определению логарифма, равно 5^0, т. е. 1:

$$\log_4 \log_3 x = 1.$$

Записывая это уравнение так: $\log_4 (\log_3 x) = 1$, получаем $\log_3 x = 4$, откуда $x = 3^4 = 81$.

Системы показательных и логарифмических уравнений.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 0, \\ x + y = 3\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Потенцируя первое уравнение, получаем систему

$$\begin{cases} xy = 1, \\ x + y = \frac{10}{3}, \end{cases}$$

решив которую, получим

$$x_1 = 3,\ y_1 = \frac{1}{3};\ x_2 = \frac{1}{3},\ y_2 = 3.$$

Пример 2. Решить систему уравнений (при $a > 0$, $b > 0$):

$$\log_a x + \log_a y = 2,$$
$$\log_b x - \log_b y = 4.$$

Очевидно, что неизвестные x и y положительны. Потенцируя, получаем

$$xy = a^2,\ \frac{x}{y} = b^4.$$

Эта система имеет два решения:

$$x_1 = ab^2,\ y_1 = \frac{a}{b^2};\ x_2 = -ab^2,\ y_2 = -\frac{a}{b^2}.$$

Но второе решение не годится, так как при положительных значениях a и b, значения x и y отрицательные. Следовательно, данная система имеет единственное решение

$$x = ab^2,\ y = \frac{a}{b^2}.$$

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = 512, \\ \lg \sqrt{xy} = 1 + \lg 2. \end{cases}$$

Так как $2^{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=2^9$, то получаем $\sqrt{x}+\sqrt{y}=9$. С другой стороны, $\lg\sqrt{xy}=\lg 10+\lg 2$, $\lg\sqrt{xy}=\lg 20$, т. е. $\sqrt{xy}=20$. Таким образом, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=9,\\ \sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=20,\end{cases}$$

решив которую, получим

$$x_1=16,\ y_1=25;\ x_2=25,\ y_2=16.$$

Пример 4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\log_x\log_2\log_x y=0,\\ \log_y 9=1.\end{cases}$$

Со второго уравнения находим $y=9$. Тогда

$$\log_x(\log_2\log_x 9)=0 \text{ и } \log_2\log_x 9=1.$$

Отсюда $\log_x 9=2$, $x^2=9$, $x=\pm 3$. Отбрасывая $x=-3$, получаем $x=3$.

Ответ. $x=3$, $y=9$.

Показательные неравенства. Простейшими показательными неравенствами называют неравенства вида

$$a^x>b \text{ или } a^x<b.$$

Первое из них при $b<0$ не имеет решений, а при $b>0$ имеет решение

$$x>\log_a b \text{ если } a>1,$$
$$x<\log_a b \text{ если } 0<a<1.$$

В частности, если $b=a^m$, получим неравенство

$$a^x>a^m,$$

которому удовлетворяют

$$x>m \text{ при } a>1,$$
$$x<m \text{ при } 0<a<1.$$

Если в данном неравенстве знак $>$ поменять на $<$, то и в ответах надо поменять знаки на противоположные.

Пример 1. Решить неравенство $3^x>\sqrt[5]{\frac{1}{3}}$.

Решение. Первый способ. Здесь основание степени 3 — больше 1, следовательно, $x>\log_3\sqrt[5]{\frac{1}{3}}$. Но

$$\log_3\sqrt[5]{\frac{1}{3}}=\log_3 3^{-\frac{1}{5}}=-\frac{1}{5},\ \text{поэтому } x>-\frac{1}{5}.$$

Второй способ. Поскольку $\sqrt[5]{\frac{1}{3}}=3^{-\frac{1}{5}}$, то данное неравенство можно переписать как $3^x>3^{-\frac{1}{5}}$, откуда следует $x>-\frac{1}{5}$.

Пример 2. Решить неравенство $0{,}5^x<10$.

Здесь основание степени 0,5 меньше 1. Следовательно, $x>\log_{0,5}10$.

Пример 3. Решить неравенство $3^{x+3}-\frac{2}{3^{x+2}}>1$.

Умножим обе части неравенства на 3^{x+2}. Это число при всех x положительно, значит, знак неравенства должен остаться прежним: $3^{2x+5}-2>3^{x+2}$, $3\cdot 3^{2(x+2)}-3^{x+2}-2>0$.

Обозначив $3^{x+2}=z$, получим новое неравенство $3z^2-z-2>0$, которое имеет решения $z<-\frac{2}{3}$ и $z>1$. Следовательно, $3^{x+2}<-\frac{2}{3}$, чего не может быть, или $3^{x+2}>1$, откуда $x+2>0$, $x>-2$.

Ответ. $x>-2$.

Пример 4. Решить неравенство

$$\frac{1}{3^x-1}>\frac{1}{1-3^{x-1}}.$$

Рассмотрим три случая в зависимости от величины знаменателей.

А. Если $3^x-1>0$ и $1-3^{x-1}>0$, то соответственно $x>0$ и $x<1$, т. е. $0<x<1$. В этом случае

$$3^x-1<1-3^{x-1},$$

откуда $3^x+3^{x-1}-2<0$, $3^{x-1}(3+1)<2$,

$3^{x-1}<\frac{1}{2}$, $x-1<\log_3\frac{1}{2}$, $x<1-\log_3 2$,

$x<\log_3 1{,}5$.

Б. Если $3^x-1>0$ и $1-3^{x-1}<0$, то $x>0$ и $x>1$. Обоим неравенствам удовлетворяет $x>1$.

В. Если $3^x-1<0$ и $1-3^{x-1}<0$, то $x<0$ и $x>1$. Этого не может быть.

Ответ. Данному неравенству удовлетворяют все числа $0<x<\log_3\frac{3}{2}$ и $x>1$.

Пример 5. Решить неравенство $2^{x-2}<3x+5$.

Разделив обе части его на 4, получим $2^x<\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$. Обозначим $y_1=2^x$, $y_2=\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$ и построим на одной координатной плоскости графики этих двух функций (рис. 56). Как видим, y_1 меньше соответствующего значения y_2 для x из промежутка $(-1;\ 1)$.

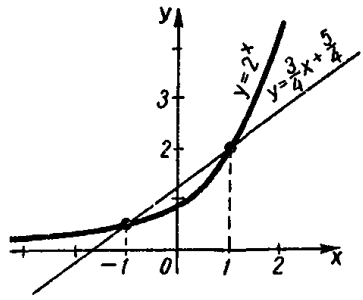


Рис. 56.

Ответ. $-1<x<1$.

Логарифмические неравенства. Простейшими логарифмическими неравенствами называют неравенства вида $\log_a x>b$ или $\log_a x<b$. Первое из них имеет решение $x>a^b$ при $a>1$; $0<x<a^b$ при $0<a<1$.

Пример 1. Решить неравенство $\log_{0,5} x \geqslant 3$.

Потенцируя, имеем $x \leqslant 0{,}5^3$, $0 < x \leqslant 0{,}125$.

Пример 2. Решить неравенство

$$\frac{1}{\lg x} + \frac{1}{1 - \lg x} > 1.$$

Выполнив сложение в левой части, получим

$$\frac{1}{\lg x (1 - \lg x)} > 1,$$

откуда следует $0 < \lg x (1 - \lg x) < 1$.

Как видим, решение x должно удовлетворять одновременно двум неравенствам: $\lg^2 x - \lg x + 1 > 0$ и $\lg x (1 - \lg x) > 0$.

Первому удовлетворяет любое положительное значение x, так как дискриминант трехчлена в его левой части отрицателен. Второму удовлетворяют значения x, при которых $0 < \lg x < 1$, т.е. $1 < x < 10$.

Ответ. $1 < x < 10$.

Пример 3. Найти все значения x, для которых

$$\lg \frac{x+3}{x+4} > \lg \frac{x+5}{x+2}.$$

Сначала установим область допустимых значений для x. Должны выполняться неравенства

$$\frac{x+3}{x+4} > 0 \text{ и } \frac{x+5}{x+2} > 0.$$

Первое из них верно при $x < -4$ и $x > -3$, а второе при $x < -5$ и $x > -2$. Область допустимых значений для x есть $x < -5$ и $x > -2$.

Теперь преобразуем данное неравенство:

$$\lg \frac{x+3}{x+4} - \lg \frac{x+5}{x+2} > 0; \quad \lg \frac{(x+3)(x+2)}{(x+4)(x+5)} > 0;$$

$$\frac{(x+2)(x+3)}{(x+4)(x+5)} > 1; \quad (x+2)(x+3) > (x+4)(x+5); \quad x < -3{,}5.$$

Однако, учитывая область допустимых значений для x, окончательно получим $x < -5$.

Пример 4. Решить неравенство $1 + \log_a x > 2 \log_x a$ при условии, $0 < a < 1$.

Область допустимых значений: $x > 0$ и $x \neq 1$.

Преобразуем данное неравенство так:

$$1 + \log_a x > \frac{2}{\log_a x}; \quad 1 + \log_a x - \frac{2}{\log_a x} > 0;$$

$$\frac{\log_a^2 x + \log_a x - 2}{\log_a x} > 0.$$

Далее рассмотрим два возможных случая: первый — когда числитель и знаменатель положительны, второй — когда они отрицательны

1) $\log_a^2 x + \log_a x - 2 > 0$ и $\log_a x > 0$.

Обозначив $\log_a x = z$, получим

$$z^2 + z - 2 > 0 \text{ и } z > 0.$$

Первое из этих неравенств имеет решения $z < -2$ и $z > 1$. Обоим удовлетворяют только числа $z > 1$.

Итак, $\log_a x > 1$, откуда с учетом $0 < a < 1$ получаем $0 < x < a$;

2) $\log_a^2 x + \log_a x - 2 < 0$ и $\log_a x < 0$. Эту систему неравенств удовлетворяют значения x, для которых $-2 < \log_a x < 0$. С учетом $0 < a < 1$ получаем $1 < x < a^{-2}$.

Ответ. $0 < x < a$ и $1 < x < a^{-2}$.

§ 45. Исторические сведения о логарифмах

Логарифмы были изобретены в первой четверти XVII в. Они явились ответом на настоятельную потребность астрономов, которым приходилось иметь дело с большим количеством очень трудоемких вычислений. Поэтому изобретение это было сделано почти одновременно разными лицами и усовершенствовано в течение очень короткого времени. По меткому выражению Лапласа, изобретение логарифмов, «сократив труд астронома, удвоило его жизнь».

Первым из изобретателей логарифмов был шотландский любитель-математик Джон Непер (1550—1617), который ввел и самый термин «логарифмы». Вычисленные им таблицы вышли в свет в 1614 г. под названием «Описание удивительных таблиц логарифмов»; они содержали, кроме логарифмов чисел от 1 до 1449, также логарифмы синусов, косинусов и тангенсов, вычисленные через каждую минуту дуги.

Однако таблицы Непера были неудобны для вычислений, что, впрочем, заметил и сам их автор. Он не определил основания своей системы, не знал и самого понятия основания системы. То же число, которое соответствовало основанию его системы, было обратно основанию натуральных логарифмов. Логарифмы Непера убывали с возрастанием числа, а числа типа 10 имели логарифмы с большим числом значащих цифр.

Первым из ученых, внесших в логарифм существенные усовершенствования, был Генри Бригг (1556—1630), профессор геометрии в Лондоне. В качестве основания системы логарифмов Бригг выбрал число 10.

В 1624 г. Бригг опубликовал «Логарифмическую арифметику», которая содержала 14-значные логарифмы чисел от 1 до 20 000 и от 90 000 до 100 000. Составление этих таблиц потребовало затраты огромного труда: для вычисления логарифма каждого опорного числа Бригг извлекал корень 54 раза с точностью до 32-го знака.

Одновременно с Бриггом над усовершенствованием изобретения Непера работал лондонский учитель математики Джон Спейдель, который в 1619 г. издал вычисленные им таблицы под названием «Новые логарифмы». Таблицы Спейделя включали логарифмы синусов, тангенсов и секансов. Несколько позже, в 1622 г., Спейдель опубликовал также таблицу логарифмов чисел. В качестве основания своей системы Спейдель избрал число e; от принятых в настоящее время натуральных логарифмов эта система отличалась лишь множителем 10^6.

В 1628 г. голландский математик Адриан Влакк опубликовал десятизначные таблицы логарифмов от 1 до 100 000, а несколько позже—

десятизначные таблицы тригонометрических функций. Влакк в своих таблицах применил бригговы логарифмы.

Одновременно с Бриггом и Спейделем над усовершенствованием и облегчением вычислений работал в Праге великий астроном Иоганн Кеплер (1571—1630) и швейцарский часовщик Иост Бюрги (1552—1632). Разработанная имн система была опубликована Бюрги в 1620 г. под названием «Арифметические и геометрические таблицы прогрессий вместе с основательным поученнем, как их нужно понимать и с пользой употреблять во всевозможных вычислениях». Таблицы содержали члены арифметической прогрессии с разностью 10 (логарифмы) и геометрической прогрессии со знаменателем 1,0001.

Способы вычислений, которые применяли первые изобретатели логарифмов, основаны на применении пропорций. С помощью последних, затрачивая громадный труд, они вычислили первые таблицы логарифмов. Впоследствии были найдены иные, более легкие, способы вычислений при помощи бесконечных рядов.

На русском языке таблицы логарифмов были изданы впервые в 1703 г. Составили их преподаватели Московской навигацкой школы Андрей Фархварсон, Стефан Гвин и Леонтий Магницкий. В «Универсальную арифметику» Леонард Эйлер включил главы, посвященные теории логарифмов.

В 1783 г. вышли из печати семизначные таблицы логарифмов, вычисленные австрийским математиком Георгом Вегой. Таблицы эти благодаря тщательности своего выполнения стали незаменимым пособием при вычислениях и переиздавались на многих языках (в том числе и на русском) свыше полутораста лет, причем выдержали несколько сот изданий.

Почти одновременно с логарифмами была изобретена и счетная линейка. В 1620 г. Эдмунд Гюнтер сконструировал шкалу, расстояния которой были пропорциональны логарифмам чисел. С помощью циркуля можно было складывать и вычитать числа этой шкалы, производя таким образом операции умножения и деления.

В середине XIX в. усовершенствованием логарифмической линейки занялся известный французский геометр и механик Амеде Маннгейм (1831—1906). Предложенная им линейка находится в применении до настоящего времени. Изменения в конструкции линейки после 1850 г. касаются лишь незначительных частностей.

Тригонометрические функции

§ 46. Исторические сведения

Тригонометрия — слово греческое и в буквальном переводе означает измерение треугольников (τρίγωνον — треугольник, а μετρέω — измеряю).

В данном случае измерение треугольников следует понимать как решение треугольников, т. е. определение сторон, углов и других элементов. Большое количество практических задач, а также задач планиметрии, стереометрии, астрономии и других наук приводится к задаче решения треугольников.

Впервые способы решения треугольников, основанные на зависимостях между сторонами и углами, были найдены древнегреческими астрономами Гиппархом (2 в. до н. э.) и Клавдием Птолемеем (2 в. н. э.).

Позднее зависимость между отношениями сторон треугольника и его углами начали называть тригонометрическими функциями.

Значительный вклад в развитие тригонометрии внесли арабские ученые аль-Батани (850—929) и Абу-ль-Вефа Мухамед-бен Мухамед (940—998), который составил таблицы синусов и тангенсов через 10′ с точностью до $1/60^4$. Теорему синусов уже знали индийский ученый Бхаскара (р. 1114, год смерти неизвестен) и азербайджанский астроном и математик Насиреддин Туси Мухамед (1201—1274). Кроме того, Насиреддин Туси в своей работе «Трактат о полном четырехстороннике» изложил плоскую и сферическую тригонометрию как самостоятельную дисциплину.

Теорему тангенсов доказал Регномонтан (латинизированное имя немецкого астронома и математика Иогана Мюллера (1436—1476). Регномонтан составил также подробные тригонометрические таблицы; благодаря его трудам плоская и сферическая тригонометрия стала самостоятельной дисциплиной и в Европе.

Дальнейшее развитие тригонометрия получила в трудах выдающихся астрономов Николая Коперника (1473—1543) — творца гелиоцентрической системы мира, Тихо Браге (1546—1601) и Иогана Кеплера (1571—1630), а также в работах математика Франсуа Виета (1540—1603), который полностью решил задачу об определении всех элементов плоского или сферического треугольника по трем данным.

Долгое время тригонометрия носила чисто геометрический характер. Такою она была еще в средине века, хотя иногда в ней использовались и аналитические методы, особенно после появления логарифмов. Постепенно тригонометрия органически вошла в математический анализ, механику, физику и технические дисциплины.

Начиная с XVII в., тригонометрические функции начали применять к решению уравнений, задач механики, оптики, электричества, радиотехники, для описания движения различных механизмов и т. д. Поэтому тригонометрические функции всесторонне и глубоко исследовались и приобрели важное значение для всей математики.

Аналитическая теория тригонометрических функций в основном была создана выдающимся математиком XVIII в. Леонардом Эйлером (1707—1783), членом Петербургской академии наук.

Таким образом, тригонометрия, возникшая как наука о решении треугольников, со временем развилась и в науку о тригонометрических функциях. Позднее часть тригонометрии, изучающую свойства тригонометрических функций и зависимости между ними, начали называть *гониометрией* (в переводе — наука об измерении углов, от греч. γωνία — угол, μετρέω — измеряю). Термин *гониометрия* в последнее время мало употребляется.

Изучение свойств тригонометрических функций и зависимостей между ними отнесено к школьному курсу алгебры, а решение треугольников — к курсу геометрии.

§ 47. Обобщение понятия угла. Измерение дуг и углов

Общее определение угла. В геометрии *угол* определяется как фигура, образованная двумя лучами, исходящими из одной точки. Эти лучи называются *сторонами* угла, а их общая точка — *вершиной* угла. При этом стороны угла считаются равноправными.

Для тригонометрии такое понятие угла недостаточно и его обобщают следующим образом.

В некоторой плоскости фиксируют положение луча OA (рис. 57) и называют его *начальной стороной угла*, а второй луч, исходящий из той же точки, вращают в этой плоскости от положения OA до положения OB и его называют *подвижным лучом*, а его конечное положение OB — *конечной стороной угла* AOB, т. е. угол AOB рассматривают как результат вращения луча в плоскости от положения OA до положения OB.

При таком определении угла его величина является мерой вращения конечной его стороны относительно начальной.

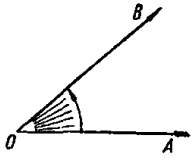


Рис. 57.

Положительным направлением вращения в плоскости называют вращение против движения часовой стрелки, а *отрицательным* — по движению часовой стрелки.

Измерение дуг и углов. Для непосредственного измерения дуг и углов, как и отрезков, принимают некоторую определенную дугу (угол) за единицу измерения и при помощи этой единицы измеряют остальные дуги и углы.

Существуют различные единицы измерения дуг и углов: градус, радиан, большое и малое деления, полный оборот, румб и т. д.

Дугу, длина которой равна $\frac{1}{360}$ части длины ее окружности, называют *дугой в один градус*. А угол, равный центральному углу, опирающемуся на дугу в один градус, называют *углом в один градус* (1°).

Дугу, равную по длине радиусу ее окружности, называют *дугой в один радиан*. А угол, равный центральному углу, опирающемуся на дугу в один радиан, называют *углом в один радиан*.

Можно показать, что как градусная, так и радианная мера дуг и углов не зависит от величины радиуса окружности, а зависит только от величины соответствующего центрального угла.

Полный оборот, которому соответствует длина окружности, содержит 360° или $\frac{2\pi R}{R} = 2\pi$ [*рад*]. При радианном измерении дуг и углов слово «радиан», как правило, не пишут; например, говорят, что прямой угол равен $\frac{\pi}{2}$ или угол равен 2,537, а подразумевают, что «угол равен $\frac{\pi}{2}$ радианам» или «2,537 *рад*». Однако это не означает, что при радианном измерении дуг и углов их мера выражается отвлеченными числами. Никакого принципиального различия между градусным и радианным измерением дуг и углов не существует. Различие состоит лишь в выборе единицы измерения.

Таким образом, 360° соответствует 2π радианам. Отсюда получаем формулу перехода от градусной меры дуг и углов к радианной и наоборот:

$$\frac{\alpha^\circ}{180^\circ} = \frac{\alpha \text{ радианов}}{\pi \text{ радианов}}. \qquad (1)$$

В частности

$$1 \text{ рад} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 44'',8 = 57^\circ,29578 = 3437',\ 747 = 206264'',8;$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \approx 0{,}01745329 \text{ рад}$$

(для вычисления углов с точностью до 0,1 *сек* значение числа π нужно брать с семью значащими цифрами, т. е. $\pi \approx 3{,}141593$).

Пример 1. Найти радианную меру угла $\alpha = 18°15'$.

По формуле (1), взяв $\pi \approx 3{,}1416$, находим ($18°15' = 18°25$)

$$\alpha = \frac{\pi \cdot 18°,25}{180°} = 0{,}31852 \text{ } рад.$$

Пример 2. Найти градусную меру угла $\alpha = 3{,}68$ *рад*.

По формуле (1) находим

$$\alpha = \frac{3{,}68 \cdot 180°}{\pi} \approx 57°,296 \cdot 3{,}68 = 210°,849 = 210°51'.$$

Приведем таблицу градусной и радианной меры часто встречающихся углов:

Углы в градусах	15	30	45	60	75	90	180	270	360
Углы в радианах	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Углы и дуги произвольной величины. Если вектор $\overrightarrow{OA}$ (рис. 58, *а*) вращается в плоскости вокруг точки O в положительном направлении, то дуга, описанная концом вектора A, и соответствующий этому вращению угол называются *положительными*, а если вращение вектора $\overrightarrow{OA}$ отрицательное (рис. 58, *б*), то соответствующую дугу и угол называют *отрицательными*.

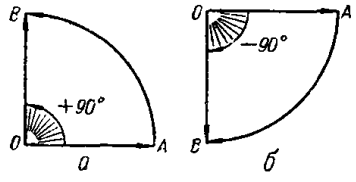


Рис. 58.

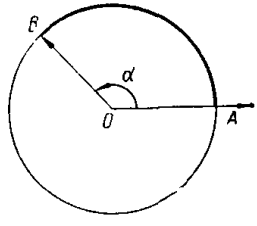


Рис. 59.

Дуга (угол) измеряется действительным числом, абсолютная величина которого равна величине дуги (угла), взятой со знаком плюс, если дуга (угол) положительна, и со знаком минус, если дуга (угол) отрицательна.

Если горизонтальную полуось $\overrightarrow{OA}$ зафиксировать (рис. 59) и считать начальной стороной угла AOB, а подвижный вектор $\overrightarrow{OB}$ — конечной стороной этого угла, то вектор $\overrightarrow{OB}$, вращаясь в плоскости вокруг своего начала, будет образовывать углы любой величины, а его конец B будет описывать дуги любой величины. Положение вектора $\overrightarrow{OB}$ не определяет однозначно величину угла AOB. Так, если вектор $\overrightarrow{OB}$ вращался вокруг точки O в положительном направлении и не сделал полного

оборота, то $\angle AOB = \alpha$, где $0 < \alpha < 360°$, если же вектор $\overrightarrow{OB}$ сделал 7 оборотов и поворот на угол α, то

$$\angle BOA = \alpha + 7 \cdot 2\pi = \alpha + 14\pi.$$

Если число оборотов не указано, то

$$\angle BOA = \alpha + 2\pi n,$$

где n может быть любым целым положительным и отрицательным числом, т.е.

$$n = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \ldots$$

Таким образом в общем случае угол в тригонометрии задается с точностью до произвольного числа целых оборотов.

§ 48. Тригонометрические функции произвольного угла

Определение тригонометрических функций произвольного угла. Пусть в прямоугольной системе координат xOy задан радиус-вектор $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, образующий с положительным направлением оси Ox угол α (рис. 60). Будем считать, что ось Ox — начальная сторона, а вектор $\overrightarrow{OA}$ — конечная сторона угла α. Проекции вектора $\vec{a}$ на координатные оси соответственно обозначим a_x и a_y.

Можно показать, что отношения $\frac{a_x}{a}$, $\frac{a_y}{a}$, $\frac{a_x}{a_y}$, где a — длина вектора $\vec{a}$, зависят только от величины угла α и не зависят от длины вектора $\vec{a}$. Поэтому эти отношения можно рассматривать как функции произвольного угла α.

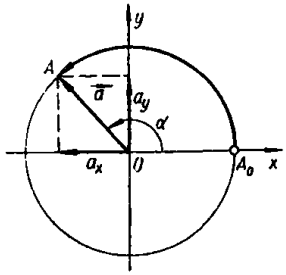


Рис. 60.

Синусом угла α, образованного осью Ox и произвольным радиусом-вектором $\overrightarrow{OA}$ (рис. 60), называется отношение проекции этого вектора на ось Oy к его длине:

$$\sin\alpha = \frac{a_y}{a}. \qquad (2)$$

Косинусом угла α, образованного осью Ox и произвольным радиусом-вектором $\overrightarrow{OA}$, называется отношение проекции этого вектора на ось Ox к его длине:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a}. \qquad (3)$$

Тангенсом угла α, образованного осью Ox и произвольным радиусом-вектором $\overrightarrow{OA}$, называется отношение проекции этого вектора на ось Oy к его проекции на ось Ox:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a_y}{a_x}. \qquad (4)$$

Котангенсом угла α, образованного осью Ox и произвольным радиусом-вектором $\overrightarrow{OA}$, называется отношение проекции этого вектора на ось Ox к его проекции на ось Oy:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{a_x}{a_y} \tag{5}$$

Секансом угла α, образованного осью Ox и произвольным радиусом-вектором $\overrightarrow{OA}$, называется отношение длины этого вектора к его проекции на ось Ox:

$$\sec\alpha = \frac{a}{a_x} \tag{6}$$

Косекансом угла α, образованного осью Ox и произвольным радиусом-вектором $\overrightarrow{OA}$, называется отношение длины этого вектора к его проекции на ось Oy:

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{a}{a_y}. \tag{7}$$

Замечание. Если не указано, сколько оборотов совершил вектор $\overrightarrow{OA}$ вокруг точки O в плоскости xOy (рис. 60), то положение вектора определяет угол с точностью до целого оборота, т. е. углу с начальной стороной Ox и конечной стороной $\overrightarrow{OA}$ соответствует бесчисленное множество углов, которые выражаются формулой

$360^\circ \cdot n + \alpha$, где $n = 0; \pm1; \pm2; \pm3; \pm4; \ldots$.

Так как для всех этих углов величины a_x, a_y и a остаются неизменными, то

$$\begin{aligned}
&\sin(\alpha + 360^\circ \cdot n) = \sin\alpha;\\
&\cos(\alpha + 360^\circ \cdot n) = \cos\alpha;\\
&\operatorname{tg}(\alpha + 360^\circ \cdot n) = \operatorname{tg}\alpha;\\
&\operatorname{ctg}(\alpha + 360^\circ \cdot n) = \operatorname{ctg}\alpha;\\
&\sec(\alpha + 360^\circ \cdot n) = \sec\alpha;\\
&\operatorname{cosec}(\alpha + 360^\circ \cdot n) = \operatorname{cosec}\alpha.
\end{aligned} \tag{8}$$

Знаки тригонометрических функций. Длина радиуса-вектора $|\vec{a}| = a$ всегда число положительное. Проекции его на координатные оси — величины алгебраические и в зависимости от координатных четвертей имеют следующие знаки:

в I четверти $a_x > 0$; $a_y > 0$;
во II четверти $a_x < 0$; $a_y > 0$;
в III четверти $a_x < 0$; $a_y < 0$;
в IV четверти $a_x > 0$; $a_y < 0$.

Соответственно тригонометрические функции имеют знаки, указанные на рис. 61.

Ось тангенсов и котангенсов. Значения тригонометрических функций не зависят от длины подвижного радиуса-вектора $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ (рис. 60).

Для удобства принимают длину радиуса-вектора равной единице, т. е. $|\vec{a}| = 1$. В этом случае

$$\sin\alpha = a_y;\quad \cos\alpha = a_x;\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a_y}{a_x};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{a_x}{a_y};\quad \sec\alpha = \frac{1}{a_x};\quad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{a_y}.$$

Окружность, описанную концом A радиуса-вектора $\vec{a}$, называют *единичной*.

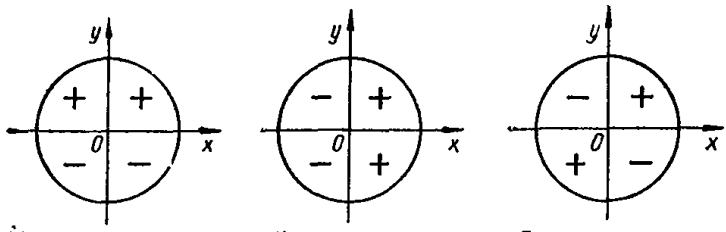


Рис. 61.

Касательная к единичной окружности в точке ее пересечения с положительной частью оси абсцисс, направленная одинаково с осью ординат, называется *осью тангенсов* (рис. 62).

Теорема 1. *Тангенс угла α равен алгебраической величине отрезка оси тангенсов, отсекаемого от нее продолжением вектора $\vec{a}$* (рис. 62).

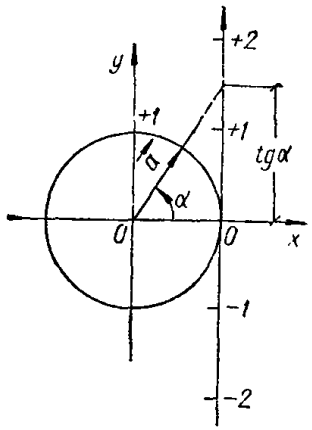


Рис. 62.

Касательная к единичной окружности в точке ее пересечения с положительной частью оси ординат, направленная одинаково с осью абсцисс, называется *осью котангенсов* (рис. 63).

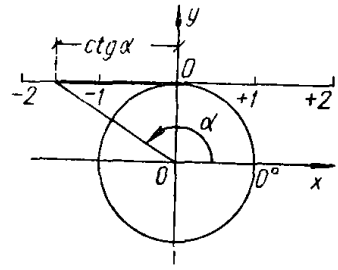


Рис. 63.

Теорема 2. *Котангенс угла α равен алгебраической величине отрезка оси котангенсов, отсекаемого от нее продолжением вектора $\vec{a}$* (рис. 63).

Построение угла по данному значению его тригонометрической функции.

Задача. Построить угол (дугу) α, синус которого равен m. Рассмотрим три случая.

А. Пусть $|m| < 1$. В координатной плоскости xOy строим единичную окружность. На оси ординат находим точку, соответствующую числу m. Через эту точку проводим прямую, параллельную оси абсцисс, и точки пересечения ее с единичной окружностью обозначаем через A и B (рис. 64,*а*). Соединив точки A и B с началом координат, получим углы AOx и BOx, синусы которых равны m. Эти углы определяются не однозначно. Обозначим наименьший положительный угол, определяемый конечной стороной AO, через $\angle AOx = \alpha_1$, а наименьший положительный угол, определяемый конечной стороной OB, через $\angle BOx = \alpha_2$. Тогда искомый угол α определится равенствами

$$\alpha = \alpha_1 + 2\pi n \text{ и } \alpha = \alpha_2 + 2\pi n,$$

где $n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$.

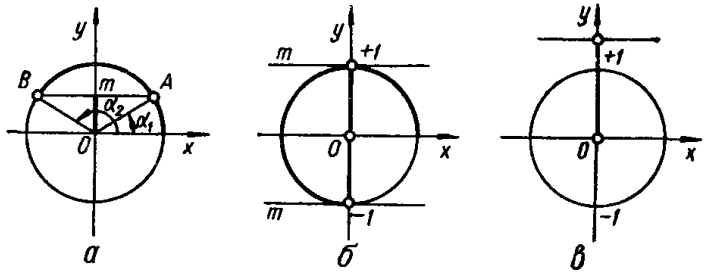


Рис. 64

Б. Если $|m| = 1$, т. е. $m = \pm 1$, тогда прямые, проведенные перпендикулярно оси ординат через точки (0; 1) и (0; —1), будут касаться единичной окружности в точках, соответствующих наименьшим положительным углам $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$, а искомый угол α определится формулами (рис. 64, *б*).

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \text{ и } \alpha = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n,$$

где $n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$.

В. Если $|m| > 1$, тогда прямая, проведенная перпендикулярно оси ординат через точку $(0, m)$, не пересекает единичной окружности (рис. 64,*в*). В этом случае задача решений не имеет.

Таким образом, данному значению тригонометрической функции соответствует бесчисленное множество значений угла. Для того чтобы подобные задачи были однозначными, из всех этих значений выделяют так называемое главное значение угла.

Главным значением угла (дуги) x_0, синус которого равен числу m ($|m| \leqslant 1$), называют угол (дугу), содержащийся в интервале от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$ (рис. 65), т. е.

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant x_0 \leqslant +\frac{\pi}{2}$$

Главное значение угла α_0, синус которого равен $m(|m| \leqslant 1)$, выражается символом

$$\arcsin m,$$

который читают так: «угол (дуга), синус которого равен m» или сокращенно «арксинус m».

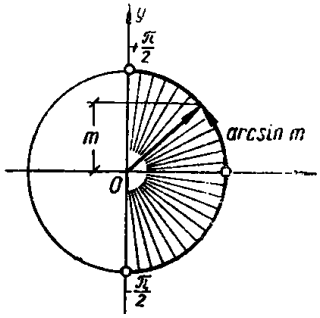


Рис. 65.

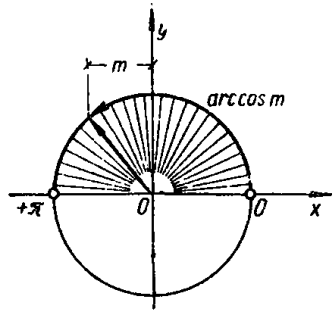


Рис. 66.

Все углы (дуги), синус которых равен m, обозначают символом

$$\operatorname{Arcsin} m.$$

При этом все множество различных значений $\operatorname{Arcsin} m$ выражается через соответствующие главные значения формулой

$$\operatorname{Arcsin} m = (-1)^n \arcsin m + \pi n, \tag{9}$$

где $n = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \ldots$

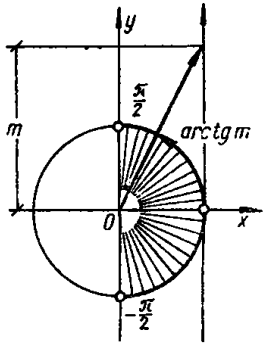


Рис. 67.

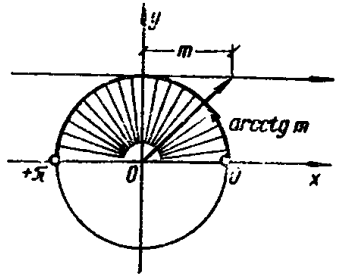


Рис. 68.

Задача построения главного значения угла (дуги) по данному значению тригонометрической функции решается однозначно.

Главным значением угла (дуги) $\arccos m$ $(|m| \leqslant 1)$ называется угол (дуга), содержащийся в интервале от 0 до π (рис. 66), т. е.

$$0 \leqslant \arccos m \leqslant \pi.$$

Тогда все углы (дуги), косинус которых равен m, выражаются формулой

$$\operatorname{Arccos} m = \pm \arccos m + 2\pi n, \tag{10}$$

где $n = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \ldots$.

Главным значением угла (дуги) $\operatorname{arctg} m$ называется угол (дуга), содержащийся в промежутке от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$ (рис. 67), т. е.

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} m < +\frac{\pi}{2}.$$

Все углы (дуги), тангенс которых равен m, выражаются формулой

$$\operatorname{Arctg}\ m = \operatorname{arctg} m + \pi n, \tag{11}$$

где $n = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \ldots$.

Главным значением угла (дуги) $\operatorname{arcctg} m$ называется угол (дуга), содержащийся в промежутке от 0 до π (рис. 68), т.е.

$$0 < \operatorname{arcctg} m < \pi.$$

Все углы (дуги), котангенс которых равен m, выражаются формулой

$$\operatorname{Arcctg}\ m = \operatorname{arcctg} m + \pi n, \tag{12}$$

где $n = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \ldots$.

§ 49. Основные тригонометрические тождества

Тригонометрическим тождеством называется равенство, в которое входят тригонометрические функции и которое удовлетворяется произвольным допустимым значением угла — аргумента тригонометрических функций, но не удовлетворяется, если каждую в отдельности тригонометрическую функцию заменить произвольной величиной.

Пример. Равенство $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha$ по существу не является тригонометрическим тождеством, так как оно будет верным, если вместо $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ подставить произвольные величины a и b. Тогда это равенство будет алгебраическим тождеством

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

А равенство

$$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

является тригонометрическим тождеством, так как при замене $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ на произвольные величины такое равенство места не имеет.

Между тригонометрическими функциями одного и того же произвольного угла существуют соотношения, называемые основными тригонометрическими тождествами:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \tag{13}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \left[\alpha \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)\right]; \tag{14}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad [\alpha \neq \pi k]; \tag{15}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \quad \left[\alpha \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)\right]; \tag{16}$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}, \quad [\alpha \neq \pi k]. \tag{17}$$

В квадратных скобках указаны значения аргумента α, при которых соответствующие тождества имеют числовой смысл. Основные тригонометрические тождества позволяют по значению одной из тригонометрических функций найти значения всех остальных.

Из пяти основных тождеств вытекают три вспомогательных (производных) тождества:

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1, \quad \left[\alpha \neq \frac{\pi}{2} k\right]; \tag{18}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha, \quad \left[\alpha \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)\right]; \tag{19}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha, \quad [\alpha \neq \pi k], \tag{20}$$

где $k = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \ldots$. Эти тождества часто употребляются в преобразованиях.

Рассмотрим несколько примеров использования основных тригонометрических тождеств.

Пример 1. Определить значения тригонометрических функций угла α, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$ и $180° < \alpha < 270°$.

По формуле (18) находим

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{4}{3}.$$

По формуле (19) имеем

$$\sec^2\alpha = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16}$$

или $|\sec\alpha| = \frac{5}{4}$.

Учитывая, что $\sec\alpha < 0$ при $180° < \alpha < 270°$, получаем

$$-\sec\alpha = \frac{5}{4}, \quad \text{откуда} \quad \sec\alpha = -\frac{5}{4}.$$

Тогда по формуле (16)

$$\cos\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Значение $\sin\alpha$ найдем из формулы (13):

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \quad \text{или} \quad |\sin\alpha| = \frac{3}{5}.$$

Учитывая, что $\sin\alpha < 0$ при $180° < \alpha < 270°$, находим

$$\sin\alpha = -\frac{3}{5}$$

и, наконец, по формуле (17) определяем

$$\operatorname{cosec}\alpha = -\frac{5}{3}.$$

Пример 2. Доказать тождество

$$3(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) - 2(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) = 1.$$

Преобразуем вначале левую часть равенства, а затем, используя формулу (13), находим

$$3(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) - 2(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) =$$
$$= 3(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) - 2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\sin^4\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha) = 3\sin^4\alpha + 3\cos^4\alpha - 2\sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha - 2\cos^4\alpha =$$
$$= \sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 = 1,$$

что и требовалось доказать.

Пример 3. Доказать тождество

$$\sin^3\alpha(1 + \operatorname{ctg}\alpha) + \cos^3\alpha(1 + \operatorname{tg}\alpha) = \sin\alpha + \cos\alpha.$$

$$\sin^3\alpha(1 + \operatorname{ctg}\alpha) + \cos^3\alpha(1 + \operatorname{tg}\alpha) = \sin^3\alpha\left(1 + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) +$$
$$+ \cos^3\alpha\left(1 + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right) = \sin^2\alpha(\sin\alpha + \cos\alpha) + \cos^2\alpha(\cos\alpha + \sin\alpha) =$$
$$= (\sin\alpha + \cos\alpha)(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = \sin\alpha + \cos\alpha,$$

что и требовалось доказать.

§ 50. Формулы сложения и вычитания аргументов тригонометрических функций

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha; \tag{21}$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha; \tag{22}$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta; \tag{23}$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta; \tag{24}$$
$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};\ \alpha,\ \beta,\ \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2}(1 + 2k); \tag{25}$$
$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};\ \alpha,\ \beta,\ \alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2}(1 + 2k); \tag{26}$$
$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta};\ \alpha,\ \beta,\ \alpha + \beta \neq k\pi; \tag{27}$$
$$\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta + 1}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha};\ \alpha,\ \beta,\ \alpha - \beta \neq k\pi, \tag{28}$$

где $k = 0; \pm1; \pm2; \pm3; \ldots$

Формулы (21)—(28) позволяют определять по известным тригонометрическим функциям аргументов α и β значения этих функций для сумм или разностей заданных аргументов.

Пример 1. Вычислить $\sin 15°$.

Известно, что $\sin 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin 30° = \frac{1}{2}$ и $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, тогда по формуле (22) получаем

$$\sin 15° = \sin(45° - 30°) = \sin 45°\cos 30° - \sin 30°\cos 45°$$

или

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = 0{,}258819045\ldots$$

Пример 2. Доказать тождество

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) - \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}(\alpha+\beta).$$

Рассмотрим левую часть тождества и вынесем в ней за скобки $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$; тогда, воспользовавшись формулой (25), имеем

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) - \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\alpha+\beta)\left[1 - \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}\right] =$$

$$= \operatorname{tg}(\alpha+\beta)\left[1 - \frac{(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}\right] = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}(\alpha+\beta),$$

что и требовалось доказать.

§ 51. Формулы приведения

Формулы, при помощи которых тригонометрические функции произвольного угла можно привести к функциям острого угла, называют *формулами приведения*. Поэтому таблица значений тригонометрических функций составляется только для углов α, лежащих в первом квадранте, т.е. для

$$0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Пользуясь формулами сложения и вычитания аргументов тригонометрических функций и полагая в них последовательно $\beta = \frac{\pi}{2}$, $\beta = \pi$, $\beta = \frac{3\pi}{2}$, $\beta = 2\pi$, легко получить следующие формулы приведения:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = +\cos\alpha;\ \sin(\pi \pm \alpha) = \mp\sin\alpha;$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right) = -\cos\alpha;\ \sin(2\pi \pm \alpha) = \pm\sin\alpha; \tag{29}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp\sin\alpha;\ \cos(\pi \pm \alpha) = -\cos\alpha;$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right) = \pm\sin\alpha;\ \cos(2\pi \pm \alpha) = +\cos\alpha; \tag{30}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp\operatorname{ctg}\alpha;\ \operatorname{tg}(\pi \pm \alpha) = \pm\operatorname{tg}\alpha; \tag{31}$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \pm\operatorname{tg}\alpha;\ \operatorname{ctg}(\pi \pm \alpha) = \pm\operatorname{ctg}\alpha. \tag{32}$$

Если учесть, что прибавление целого числа оборотов 360° или $2\pi n$, где n целое число, к аргументу тригонометрических функций на значение функции не влияет, то, пользуясь этим свойством и формулами (29)—(32), любую тригонометрическую функцию произвольного угла можно привести к функции острого угла.

Для приведения тригонометрических функций произвольного угла к функциям острого угла удобно представлять произвольный угол в виде $90° \cdot n + \alpha$; тогда

$$\sin(90° \cdot n + \alpha) = \begin{cases} +\sin\alpha, & \text{если } n = 4k; \\ +\cos\alpha, & \text{если } n = 4k + 1; \\ -\sin\alpha, & \text{если } n = 4k + 2; \\ -\cos\alpha, & \text{если } n = 4k + 3; \end{cases} \tag{33}$$

$$\cos(90° \cdot n + \alpha) = \begin{cases} +\cos\alpha, & \text{если } n = 4k \\ -\sin\alpha, & \text{если } n = 4k + 1; \\ -\cos\alpha, & \text{если } n = 4k + 2; \\ +\sin\alpha, & \text{если } n = 4k + 3; \end{cases} \tag{34}$$

$$\operatorname{tg}(90° \cdot n + \alpha) = \begin{cases} +\operatorname{tg}\alpha, & \text{если } n = 2k; \\ -\operatorname{ctg}\alpha, & \text{если } n = 2k + 1; \end{cases} \tag{35}$$

$$\operatorname{ctg}(90° \cdot n + \alpha) = \begin{cases} +\operatorname{ctg}\alpha, & \text{если } n = 2k; \\ -\operatorname{tg}\alpha, & \text{если } n = 2k + 1, \end{cases} \tag{36}$$

где $k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$.

Из формул (33)—(36) вытекает следующее правило. Любая тригонометрическая функция угла $90° \cdot n + \alpha$ по абсолютной величине равна той же функции угла α, если число n — четное, и сходственной функции, если n — число нечетное. При этом, если функция угла $90° \cdot n + \alpha$ положительна, когда α — острый угол, то знаки обеих функций одинаковы; если отрицательна, то различны.

Пример. Привести $\operatorname{tg} 3728°$ к функции острого угла.

Представим угол $3728° = 90° \cdot 41 + 38°$, тогда согласно формуле (35)

$$\operatorname{tg}(90° \cdot 41 + 38°) = -\operatorname{ctg} 38°.$$

Два угла, сумма которых равна 90°, называются дополнительными. Например, $90° - \alpha$ и α, $45° + \alpha$ и $45° - \alpha$ или $60° + \alpha$ и $30° - \alpha$.

Сходственные функции дополнительных углов равны между собой. Например,

$$\sin(45° + \alpha) = \cos(45° - \alpha);$$
$$\operatorname{tg}(45° + \alpha) = \operatorname{ctg}(45° - \alpha);$$
$$\sin(60° + \alpha) = \cos(30° - \alpha);$$
$$\sin(30° - \alpha) = \cos(60° + \alpha).$$

Эти формулы вместе с формулами приведения позволяют привести любую тригонометрическую функцию произвольного угла к функции положительного угла α, не превышающего 45°.

§ 52. Четность и нечетность тригонометрических функций

Из тригонометрических функций $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ и $\operatorname{cosec}\alpha$ — нечетные, а $\cos\alpha$ и $\sec\alpha$ — четные, т.е.

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha; \tag{37}$$
$$\cos(-\alpha) = +\cos\alpha; \tag{38}$$
$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha; \tag{39}$$
$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha; \tag{40}$$
$$\sec(-\alpha) = +\sec\alpha; \tag{41}$$
$$\operatorname{cosec}(-\alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha. \tag{42}$$

§ 53. Формулы двойных и тройных углов (аргументов)

Из формул сложения аргументов тригонометрических функций при $\alpha = \beta$ получаем следующие формулы удвоения аргумента:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha; \tag{43}$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha; \tag{44}$$
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}; \tag{45}$$
$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}. \tag{46}$$

Если формулы (13) и (44) сначала вычесть одну из другой, а затем сложить, то получим следующие две формулы, часто употребляемые при различных тригонометрических преобразованиях:

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \tag{47}$$

и

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}. \tag{48}$$

Путем последовательного применения формул сложения аргументов тригонометрических функций можно получить формулы для 3α, 4α и т.д. Приведем формулы для тройных углов:

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha; \tag{49}$$
$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha; \tag{50}$$
$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}; \tag{51}$$
$$\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}^3\alpha}{1-3\operatorname{ctg}^2\alpha}. \tag{52}$$

Рассмотрим несколько упражнений на формулы кратных углов.

Пример 1. Доказать, что

$$\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cos 8\alpha = \frac{\sin 16\alpha}{16\sin\alpha}.$$

Умножим и разделим левую часть данного равенства на $\sin\alpha$ и применим 4 раза подряд формулу (43), представив ее в виде $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$. Тогда

$$\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cos 8\alpha = \frac{(\sin\alpha\cos\alpha)\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cos 8\alpha}{\sin\alpha} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(\sin 2\alpha\cos 2\alpha)\cos 4\alpha\cos 8\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\frac{1}{4}(\sin 4\alpha\cos 4\alpha)\cos 8\alpha}{\sin\alpha} =$$

$$= \frac{\frac{1}{8}\sin 8\alpha\cos 8\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{16}\cdot\frac{\sin 16\alpha}{\sin\alpha},$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что если $16\alpha + \alpha = \pi$, то $\frac{\sin 16\alpha}{16\sin\alpha} = \frac{1}{16}$, т. е.

$$\cos\frac{\pi}{17}\cos\frac{2\pi}{17}\cos\frac{4\pi}{17}\cos\frac{8\pi}{17} = \frac{1}{16}.$$

Пример 2. Доказать, что

$$\sin\alpha\sin(60^\circ - \alpha)\sin(60^\circ + \alpha) = \frac{1}{4}\sin 3\alpha.$$

$\sin\alpha\sin(60^\circ - \alpha)\sin(60^\circ + \alpha) = \sin\alpha(\sin 60^\circ\cos\alpha - \cos 60^\circ\sin\alpha)\times$
$\times(\sin 60^\circ\cos\alpha + \cos 60^\circ\sin\alpha) = \sin\alpha(\sin^2 60^\circ\cos^2\alpha - \cos 60^\circ\sin^2\alpha) =$

$$= \sin\alpha\left(\frac{3}{4}\cos^2\alpha - \frac{1}{4}\sin^2\alpha\right) = \frac{1}{4}\sin\alpha(3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) =$$

$$= \frac{1}{4}\sin\alpha[3(1 - \sin^2\alpha) - \sin^2\alpha] =$$

$$= \frac{1}{4}(3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha) = \frac{1}{4}\sin 3\alpha,$$

что и требовалось доказать.

Аналогично можно доказать тождества

$$\cos\alpha\cos(60^\circ - \alpha)\cos(60^\circ + \alpha) = \frac{1}{4}\cos 3\alpha;$$

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(60^\circ - \alpha)\operatorname{tg}(60^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} 3\alpha;$$

$$\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}(60^\circ - \alpha)\operatorname{ctg}(60^\circ + \alpha) = \operatorname{ctg} 3\alpha.$$

Пример 3. Упростить

$$A = \operatorname{tg} 3^\circ\operatorname{tg} 17^\circ\operatorname{tg} 23^\circ\operatorname{tg} 37^\circ\operatorname{tg} 43^\circ\operatorname{tg} 57^\circ\operatorname{tg} 63^\circ\operatorname{tg} 77^\circ\operatorname{tg} 83^\circ.$$

Представим данное выражение в виде

$$A = (\operatorname{tg} 3^\circ\operatorname{tg} 57^\circ\operatorname{tg} 63^\circ)(\operatorname{tg} 17^\circ\operatorname{tg} 43^\circ\operatorname{tg} 77^\circ)(\operatorname{tg} 23^\circ\operatorname{tg} 37^\circ\operatorname{tg} 83^\circ)$$

и воспользуемся тождеством для тангенсов из примера 2; тогда

$$A = \operatorname{tg} 9^\circ\operatorname{tg} 51^\circ\operatorname{tg} 69^\circ = \operatorname{tg} 27^\circ.$$

Ответ: $A = \operatorname{tg} 27^\circ$.

Пример 4. Вычислить $\sin 18°$.

Воспользуемся тождеством $\sin 36° = \cos 54°$. Обозначив $18° = \alpha$, находим, что в данном случае $\sin 2\alpha = \cos 3\alpha$ или $2 \sin \alpha \cos \alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$. Так как $\cos \alpha \neq 0$, то после сокращения на $\cos \alpha$ имеем

$$2 \sin \alpha = 4 \cos^2 \alpha - 3 = 4 (1 - \sin^2 \alpha) - 3,$$

откуда

$$4 \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha - 1 = 0.$$

Решая это уравнение относительно $\sin \alpha$, найдем

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \text{ или } \sin \alpha = \frac{-\sqrt{5} - 1}{4}.$$

Так как в первом квадранте $\sin \alpha > 0$, то второе значение не подходит.

Ответ: $\sin 18° = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} = 0{,}30901699\ldots$

§ 54. Формулы половинного аргумента

Формулы деления аргумента пополам выражают тригонометрические функции половинного аргумента $\frac{\alpha}{2}$ через тригонометрические функции аргумента α.

$$\left|\sin \frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}; \tag{53}$$

$$\left|\cos \frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}; \tag{54}$$

$$\left|\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}; \quad \alpha \neq \pi (2k + 1); \tag{55}$$

$$\left|\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}; \quad \alpha \neq 2k\pi; \quad k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots \tag{56}$$

Для $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ иногда удобнее пользоваться формулами

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}; \quad \alpha \neq \pi (2k + 1); \tag{57}$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}; \quad \alpha \neq 2k\pi; \quad k = 0; \pm 1; \ldots \tag{58}$$

Пример 1. Вычислить $\sin \frac{\alpha}{2}$, если $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ и $180° < \alpha < 270°$.

По формуле (53) находим

$$\left|\sin \frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 + \frac{4}{5}}{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Учитывая, что $\sin\frac{\alpha}{2}>0$ при $180°<\alpha<270°$, т. е. $90°<\frac{\alpha}{2}<135°$, получаем

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{3}{\sqrt{10}}=0{,}3\sqrt{10}\approx 0{,}948683.$$

Пример 2. Доказать, что

$$\operatorname{tg} 7°30'=\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2\approx 0{,}13165249.$$

Применяя сначала формулу (57), а затем (53) и (54), получаем

$$\operatorname{tg} 7°30'=\frac{1-\cos 15°}{\sin 15°}=\frac{1-\sqrt{\frac{1+\cos 30°}{2}}}{\sqrt{\frac{1-\cos 30°}{2}}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}}=\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}=$$

$$=\frac{\left(2-\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}}=2\sqrt{2+\sqrt{3}}-(2+\sqrt{3})=$$

$$=\sqrt{8+4\sqrt{3}}-2-\sqrt{3}=\sqrt{8+2\sqrt{12}}-2-\sqrt{3}=$$

$$=\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2,$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что для вычисления $\sqrt{8+2\sqrt{12}}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$ была применена формула

$$\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}+\sqrt{b},$$

часто используемая при преобразовании иррациональных выражений

§ 55. Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]; \tag{59}$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]; \tag{60}$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]. \tag{61}$$

Пример 1. Упростить выражение

$$A=\sin 3\alpha\sin^3\alpha+\cos 3\alpha\cos^3\alpha.$$

Преобразуем данное выражение следующим образом:

$$A=(\sin 3\alpha\sin\alpha)\sin^2\alpha+(\cos 3\alpha\cos\alpha)\cos^2\alpha.$$

Воспользовавшись теперь формулами (60), (61) и (48), находим

$$A = \frac{1}{2}(\cos 2\alpha - \cos 4\alpha)\sin^2\alpha + \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 4\alpha)\cos^2\alpha =$$

$$= \frac{1}{2}\cos 2\alpha\,(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + \frac{1}{2}\cos 4\alpha\,(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) =$$

$$= \frac{1}{2}\cos 2\alpha + \frac{1}{2}\cos 4\alpha\cos 2\alpha = \frac{1}{2}\cos 2\alpha\,(1 + \cos 4\alpha) =$$

$$= \frac{1}{2}\cos 2\alpha \cdot 2\cos^2 2\alpha = \cos^3 2\alpha.$$

Заметим, что при решении этого примера можно было воспользоваться формулами $\sin 3\alpha$ и $\cos 3\alpha$.

Пример 2. Упростить выражение

$$A = \cos\alpha + \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + 2\beta) + \ldots + \cos[\alpha + (n-1)\beta] + \cos(\alpha + n\beta),$$

где n — любое целое положительное число.

Если $\beta \neq 2k\pi$, где k — целое число или 0, то умножив и разделив обе части выражения A на $\sin\frac{\beta}{2}$, получим

$$A = \frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}}\left\{\sin\frac{\beta}{2}\cos\alpha + \sin\frac{\beta}{2}\cos(\alpha+\beta) + \sin\frac{\beta}{2}\cos(\alpha+2\beta) + \cdots\right.$$

$$\left. \cdots + \sin\frac{\beta}{2}\cos[\alpha + (n-1)\beta] + \sin\frac{\beta}{2}\cos(\alpha + n\beta)\right\}.$$

При помощи формулы (59) найдем

$$A = \frac{1}{2\sin\frac{\beta}{2}}\left[\sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) - \sin\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) + \sin\left(\alpha + \frac{3\beta}{2}\right) -\right.$$

$$- \sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) + \sin\left(\alpha + \frac{5\beta}{2}\right) - \sin\left(\alpha + \frac{3\beta}{2}\right) + \cdots +$$

$$+ \sin\left(\alpha + \frac{2n-1}{2}\beta\right) - \sin\left(\alpha + \frac{2n-3}{2}\beta\right) + \sin\left(\alpha + \frac{2n+1}{2}\beta\right) -$$

$$\left. - \sin\left(\alpha + \frac{2n-1}{2}\beta\right)\right] = \frac{1}{2\sin\frac{\beta}{2}}\left[\sin\left(\alpha + \frac{2n+1}{2}\beta\right) - \sin\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\beta}{2}} \cdot 2\sin\frac{n+1}{2}\beta\cos\left(\alpha + \frac{n}{2}\beta\right) =$$

$$= \frac{\sin\frac{(n+1)\beta}{2}\cos\left(\alpha + \frac{n}{2}\beta\right)}{\sin\frac{\beta}{2}}.$$

Если $\beta = 2k\pi$, то, воспользовавшись формулами приведения, получим

$$A = (n+1)\cos\alpha.$$

Ответ:

$$A = \begin{cases} \dfrac{\sin\dfrac{(n+1)\beta}{2}\cos\left(\alpha+\dfrac{n}{2}\beta\right)}{\sin\dfrac{\beta}{2}}, & \text{если } \beta \neq 2k\pi; \\ (n+1)\cos\beta, & \text{если } \beta = 2k\pi, \end{cases}$$

где $k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$

Пример 3. Доказать, что

$$\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}.$$

Умножив и разделив левую часть равенства на $\sin\dfrac{\pi}{7}$, получим

$$\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} =$$

$$= \frac{\sin\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{2\pi}{7} + \sin\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{4\pi}{7} + \sin\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{6\pi}{7}}{\sin\dfrac{\pi}{7}} =$$

$$= \frac{1}{2\sin\dfrac{\pi}{7}}\left(\sin\frac{3\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7} + \sin\frac{5\pi}{7} - \sin\frac{3\pi}{7} + \sin\frac{7\pi}{7} - \sin\frac{5\pi}{7}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sin\dfrac{\pi}{7}}\left(\sin\pi - \sin\frac{\pi}{7}\right) = -\frac{1}{2},$$

что и требовалось доказать.

Упражнение. Проверьте формулы (59)—(61), преобразовав их правые части при помощи формул (21)—(24) § 50.

§ 56. Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}; \tag{62}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}; \tag{63}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}; \tag{64}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2} = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}; \tag{65}$$

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};\tag{66}$$

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};\tag{67}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta};\tag{68}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta=\frac{-\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}.\tag{69}$$

Пример 1. Доказать тождество

$$\frac{\sin\alpha+\sin3\alpha+\sin5\alpha}{\cos\alpha+\cos3\alpha+\cos5\alpha}=\operatorname{tg}3\alpha.$$

Перегруппировав в левой части тождества слагаемые в числителе и знаменателе, а затем, воспользовавшись формулами (62) и (64), найдем

$$\frac{\sin\alpha+\sin3\alpha+\sin5\alpha}{\cos\alpha+\cos3\alpha+\cos5\alpha}=\frac{\sin3\alpha+(\sin\alpha+\sin5\alpha)}{\cos3\alpha+(\cos\alpha+\cos5\alpha)}=$$
$$=\frac{\sin3\alpha+2\sin3\alpha\cos(-2\alpha)}{\cos3\alpha+2\cos3\alpha\cos(-2\alpha)}=\frac{\sin3\alpha(1+2\cos2\alpha)}{\cos3\alpha(1+2\cos2\alpha)}=\operatorname{tg}3\alpha,$$

что и требовалось доказать.

Пример 2. Доказать тождество

$$\cos\left(\frac{3\pi}{10}-\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{10}-\alpha\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{10}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{10}+\alpha\right)=\sin\alpha.$$

Преобразуем левую часть тождества следующим образом:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{10}-\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{10}-\alpha\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{10}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{10}+\alpha\right)=$$
$$=\left[\cos\left(\frac{3\pi}{10}-\alpha\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{10}+\alpha\right)\right]-\left[\cos\left(\frac{\pi}{60}-\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{10}+\alpha\right)\right]=$$
$$=2\sin\frac{3\pi}{10}\sin\alpha-2\sin\frac{\pi}{10}\sin\alpha=2\sin\alpha\left(\sin\frac{3\pi}{10}-\sin\frac{\pi}{10}\right)=$$
$$=2\sin\alpha\cdot2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{2\pi}{10}=\frac{4\sin\alpha\cdot\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10}\cdot\cos\frac{2\pi}{10}}{\cos\frac{\pi}{10}}=$$
$$=\frac{2\sin\alpha\cdot\sin\frac{2\pi}{10}\cos\frac{2\pi}{10}}{\cos\frac{\pi}{10}}=\frac{\sin\alpha\sin\frac{4\pi}{10}}{\cos\frac{\pi}{10}}=\frac{\sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{10}\right)}{\cos\frac{\pi}{10}}=\sin\alpha,$$

что и требовалось доказать.

Пример 3. Доказать, что

$$4(\cos^3 20^\circ+\cos^3 40^\circ)=3\sqrt{3}\cos10^\circ.$$

Преобразуем

$$4(\cos^3 20^\circ + \cos^3 40^\circ) = 4(\cos 20^\circ \cos^2 20^\circ + \cos 40^\circ \cos^2 40^\circ) =$$

$$= 4\left(\cos 20^\circ \frac{1+\cos 40^\circ}{2} + \cos 40^\circ \frac{1+\cos 80^\circ}{2}\right) =$$

$$= 2\left[\cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \frac{1}{2}(\cos 60^\circ + \cos 20^\circ) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}(\cos 120^\circ + \cos 40^\circ)\right] = 2\cos 20^\circ + 2\cos 40^\circ + \frac{1}{2} + \cos 20^\circ -$$

$$- \frac{1}{2} + \cos 40^\circ = 3(\cos 20^\circ + \cos 40^\circ) =$$

$$= 6\cos 30^\circ \cos 10^\circ = 3\sqrt{3}\cos 10^\circ.$$

Пример 4. Доказать, что если $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, то

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma.$$

По условию $\alpha + \beta = \pi - \gamma$, тогда

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \operatorname{tg}(\pi - \gamma) = -\operatorname{tg}\gamma.$$

Воспользовавшись формулой (25) § 50, получим

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} = -\operatorname{tg}\gamma,$$

откуда

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma,$$

что и требовалось доказать.

Исследуйте, будет ли доказанное тождество справедливо в частном случае, когда $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

Пример 5. Доказать, что если α, β, γ — острые углы и $\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\beta \operatorname{ctg}\gamma = 1$, то $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Преобразуем данное в условии равенство следующим образом:

$$\operatorname{ctg}\alpha(\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma) = 1 - \operatorname{ctg}\beta \operatorname{ctg}\gamma,$$

тогда

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1 - \operatorname{ctg}\beta \operatorname{ctg}\gamma}{\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma}$$

или, согласно формулам (27) и (32)

$$\operatorname{ctg}\alpha = -\operatorname{ctg}(\beta + \gamma) = \operatorname{ctg}(\pi - \beta - \gamma).$$

Так как по условию углы α, β, γ острые, то

$$\alpha = \pi - \beta - \gamma$$

или

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi = 180^\circ,$$

что и требовалось доказать.

§ 57. Формулы, выражающие тригонометрические функции через тангенс половинного аргумента

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}; \tag{70}$$

$$\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}; \tag{71}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}; \tag{72}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}. \tag{73}$$

Формулы (70) —(73) находят, в частности, широкое применение в интегральном исчислении.

§ 58. Преобразование тригонометрических выражений с помощью введения вспомогательного аргумента

Рассматриваемый прием заключается в том, что некоторое число представляют как тригонометрическую функцию соответствующего аргумента φ.

Пример 1. Пусть требуется преобразовать в произведение сумму $A + B$, где A и B — произвольные действительные числа.

Вынесем A за скобки и обозначим $\frac{B}{A} = \operatorname{tg}\varphi$, тогда

$$A+B = A\left(1+\frac{B}{A}\right) = A(1+\operatorname{tg}\varphi) = A\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\varphi\right) =$$

$$= A\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\varphi} = \frac{A\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)}{\cos\varphi},$$

где величина вспомогательного аргумента φ определяется по заданному значению

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{B}{A}.$$

Пример 2. Преобразовать в произведение $A = a\sin\alpha + b\cos\alpha$.

Подберем такие положительные числа ρ и φ, чтобы имели место равенства

$$\begin{cases} \rho\cos\varphi = a, \\ \rho\sin\varphi = b. \end{cases}$$

Возведем обе части каждого из уравнений системы в квадрат и сложим, тогда

$$\rho^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = a^2 + b^2,$$

откуда

$$\rho = +\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Значит

$$\cos\varphi = \frac{a}{\rho} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad \sin\varphi = \frac{b}{\rho} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Последние равенства определяют вспомогательный аргумент φ.

Подставляя в выражение для A вместо a и b соответственно $\rho\cos\varphi$ и $\rho\sin\varphi$, найдем

$$A = a\sin\alpha + b\cos\alpha = \rho(\cos\varphi\sin\alpha + \cos\alpha\sin\varphi) = \rho\sin(\alpha + \varphi)$$

или

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha = +\sqrt{a^2 + b^2}\cdot\sin(\alpha + \varphi).$$

где φ определяется из равенств

$$\cos\varphi = \frac{a}{+\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{и} \quad \sin\varphi = \frac{b}{+\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Можно также величину вспомогательного аргумента φ определить из уравнения

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a},$$

а затем из всех его возможных корней выбрать тот наименьший, который дает соответствующие знаки заданным величинам

$$a = \rho\cos\varphi, \quad b = \rho\sin\varphi, \quad \text{где } \rho = +\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Например, если $a < 0$ и $b > 0$, то φ надо взять во второй четверти, так как только в этом случае $\cos\varphi < 0$ и $\sin\varphi > 0$, что и обеспечит требуемые знаки для заданных величин a и b, поскольку ρ всегда положительное.

§ 59. Тригонометрические функции абстрактного аргумента

До сих пор аргументами тригонометрических функций рассматривались именованные величины — углы (дуги), измеренные в градусах или радианах. Значения тригонометрических функций, как отношения отрезков, являются абстрактными величинами (числами). При изучении свойств тригонометрических функций приходится сравнивать изме-

нения функции в связи с изменением аргумента, а сравнивать можно только однородные нли, что лучше, абстрактные величины. Введение тригонометрических функций от абстрактного аргумента дает возможность применять эти функции в различных вопросах математики, физики, техники и т. д.

Понятие абстрактного аргумента можно ввести следующим образом.

Вместо именованного значения аргумента тригонометрических функций в x (радианов) рассматривать абстрактное число: $\frac{x \text{ радианов}}{1 \text{ радиан}} = x$ и по определению принять, что $\sin x$, где x = абстрактное число, равен $\sin x$, где x измерен в радианах.

Аналогично определяются другие тригонометрические функции абстрактного (числового) аргумента.

Тригонометрические функции абстрактного аргумента x — это одноименные тригонометрические функции угла в x радианов.

§ 60. Периодичность тригонометрических функций

Функция $y = f(x)$ называется периодической, если существует число a, отличное от нуля, такое, что при любом целом n тождественно (т.е. при любом значении x) выполняется равенство

$$f(x + na) = f(x), \; n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots .$$

Число a называется *периодом* функции.

Если число a есть период функции, то и числа $2a$, $3a$, $4a$ и т.д. также будут периодами этой функции. Как правило, периодом называют наименьшее из возможных положительных значений числа a. Иногда это значение называют основным периодом.

Период функций $\sin x$ и $\cos x$ равен 2π. Для этих функций имеют место формулы

$$\begin{aligned} &\sin(x + 2\pi n) = \sin x, \\ &\cos(x + 2\pi n) = \cos x, \\ &\text{где } n = 0, \pm 1, \pm 2; \ldots . \end{aligned} \tag{74}$$

Период функций $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ равен π, т. е.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(x + \pi n) &= \operatorname{tg} x, \\ \operatorname{ctg}(x + \pi n) &= \operatorname{ctg} x, \end{aligned} \tag{75}$$

где $n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$.

Свойство периодичности тригонометрических функций позволяет изучать их на отрезке, длина которого равна основному периоду.

§ 61. График и некоторые свойства функции $y = \sin x$

Построение графика функции $y = \sin x$. График функции $y = \sin x$ называют *синусоидой* (обыкновенной). Для построения графика можно взять значения аргумента x с определенным интервалом и составить таблицу значений $y = \sin x$, соответствующих выбранным значениям x, а затем по точкам, как это часто делается в алгебре, построить график.

Приведем геометрический способ построения графика функции $y = \sin x$.

Строим в системе координат $x_1O_1y_1$ единичную окружность $R = 1$ с центром O_1 на оси абсцисс (рис. 69). Дугу этой окружности $2\pi R = 2\pi$, начиная от точки оси абсцисс $x_1 = +1$, делим на n равных частей: 0, $\frac{2\pi}{n}$, $\frac{4\pi}{n}$, $\frac{6\pi}{n}$, $\frac{8\pi}{n}$, ..., $\frac{2(n-1)\pi}{n}$ (на рис. 69 взято $n = 12$).

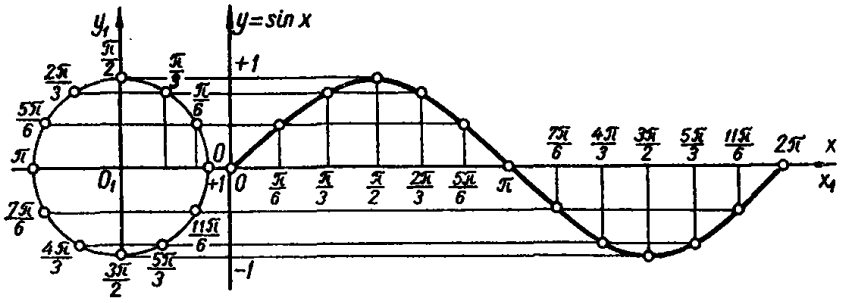


Рис. 69.

Затем строим вторую систему координат xOy, ось которой Ox совпадает с осью O_1x_1, но начала координат $O_1(x_1 = 0)$ и $O(x = 0)$ у этих систем различные. В новой системе координат отрезок оси абсцисс от $x = 0$ до $x = 2\pi$ делим также на n равных частей: 0, $\frac{2\pi}{n}$, $\frac{4\pi}{n}$, ..., 2π.

Из точек деления окружности проводим прямые, параллельные оси Ox, а из точек деления отрезка $[0; 2\pi]$ проводим прямые, перпендикулярные этой оси. Точки пересечения соответствующих прямых будут точками графика $y = \sin x$, так как ординаты этих точек равны значениям синуса, соответствующим значениям аргумента в точках деления рассматриваемого отрезка $[0, 2\pi]$.

Пользуясь периодичностью функции $\sin x$ легко продолжить график этой функции на всю числовую ось (см. рис. 72).

Простейший синусоидограф. *Синусоидографом* называют прибор, с помощью которого можно начертить график функции *синус*.

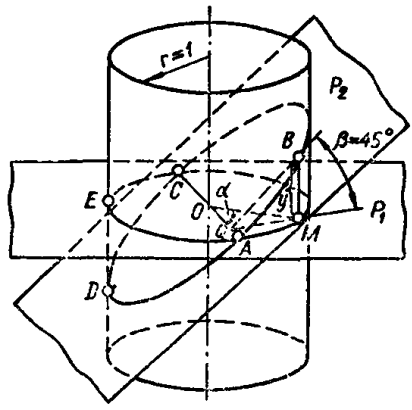


Рис. 70.

Рассмотрим прямой круговой цилиндр, радиус которого $r = 1$ (рис. 70). Пересечем его двумя плоскостями, одна из которых P_1 перпендикулярна оси цилиндра, а вторая P_2 образует с плоскостью P_1 угол $\beta = 45°$.

Плоскость P_1 в сечении с цилиндром дает окружность AMCE, плоскость P_2 пересекает цилиндр по замкнутой кривой, которую называют эллипсом (см. § 57, III). Плоскости P_1 и P_2 пересекаются по прямой AC, являющейся диаметром окружности AMCE. Найдем величину

отрезка образующей цилиндра $y = MB$, который лежит между плоскостями P_1 и P_2.

Величина $y = MB$ является переменной и зависит от положения точки M на окружности $AMCE$. Положение точки M будем определять при помощи центрального угла $\alpha = \angle MOA$, который образуют радиусы OA и OM. Величину $y = MB$ определим из треугольника QMB. В этом треугольнике угол QMB прямой, потому что образующая MB перпендикулярна к плоскости P_1. Острый угол $BQM = \beta = 45°$, так как BQ и MQ перпендикулярны к AC — линии пересечения плоскостей P_1 и P_2. Тогда $BM = MQ$. Из треугольника OMQ по определению тригонометрических функций находим

$$MQ = r \sin \alpha = 1 \cdot \sin \alpha.$$

Учитывая, что $MQ = MB$, получаем

$$y = MB = \sin \alpha.$$

Таким образом, отрезок образующей кругового цилиндра, заключенный между плоскостями P_1 и P_2 составляющими угол в 45°, равен синусу центрального угла α, который определяет положение рассматриваемой образующей.

Теперь можно воспользоваться полученными результатами для построения синусоиды. Проще всего взять свечу, обмотать ее бумагой несколько раз и перерезать острым ножом под углом 45° к ее оси. Развернув бумагу, получим на ней синусоиду.

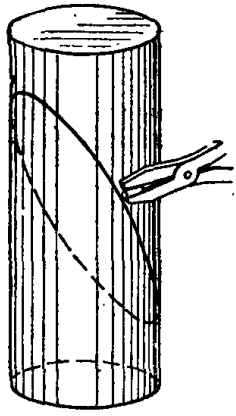


Рис. 71.

По этому же принципу можно построить синусоидограф. Возьмем деревянный круговой цилиндр диаметром 3—5 *см* и сделаем на нем острым ножом треугольную выемку глубиной в 1 *мм* вдоль той линии, по которой плоскость P_2 пересекала бы цилиндр. Вдоль сделанной выемки обвяжем цилиндр медной проволокой диаметром приблизительно в 1 *мм* и закрепим ее плоскогубцами (рис. 71). При этом проволока должна немного выступать над поверхностью цилиндра. Место скручивания проволоки следует пропаять и зачистить напильником с таким расчетом, чтобы место скручивания несколько возвышалось над проволокой. При вычерчивании синусоиды это возвышение будет отмечать периоды функции.

Чтобы начертить синусоиду, нужно положить синусоидограф на лист чистой бумаги, и, надавливая на концы цилиндра, прокатить его по бумаге. Тогда проволока, которая выступает над поверхностью цилиндра и реализует линию пересечения цилиндра с плоскостью P_2, оставит на бумаге след в виде кривой $y = \sin x$. Чтобы сделать этот след более четким, можно на чистую бумагу предварительно положить лист копировальной бумаги и катить цилиндр по ней.

Некоторые свойства функции $y = \sin x$. 1. Непрерывность функции $\sin x$. Функция $y = \sin x$ существует при всех действительных значениях x, причем график ее является сплошной кривой линией (без разрывов), т. е. функция $\sin x$ непрерывна. (Строгое определение и доказательство непрерывности функции $y = \sin x$ рассматривается в курсах высшей математики.)

2. Функция $y = \sin x$ нечетная и ее график симметричен относительно начала координат (рис. 72).

3. Наибольшие и наименьшие значения. Все возможные значения функции $\sin x$ ограничены неравенствами $-1 \leqslant \sin x \leqslant +1$, причем $\sin x = +1$, если $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ и $\sin x = -1$, если $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, где $n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$

4. Нулевые значения (точки пересечения графика функции с осью абсцисс). $\sin x = 0$, если $x = \pi n (n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots)$.

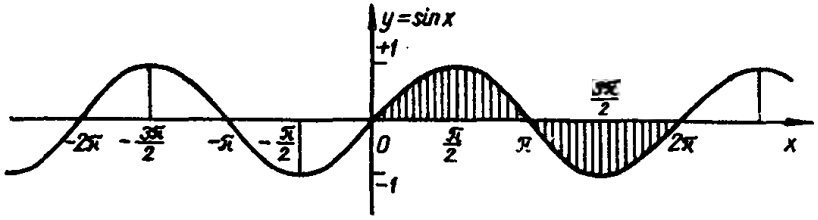


Рис. 72.

5. Интервалы возрастания и убывания. Функция $\sin x$ возрастает, т.е. бо́льшему значению аргумента соответствует большее значение функции, на интервалах

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad (n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots)$$

и убывает, т.е. бо́льшему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, на интервалах

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \quad (n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots).$$

§ 62. График и некоторые свойства функции $y = \cos x$

График функции $y = \cos x$ легко получить из графика функции $y = \sin x$.

При любом x, согласно формуле (29) § 51, имеем

$$y = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Следовательно, вместо значения косинуса можно взять значение синуса, увеличив аргумент на $\frac{\pi}{2}$, т. е. графиком функции $y = \cos x$ служит та же синусоида, но передвинутая на $\frac{\pi}{2}$ влево по оси абсцисс (рис. 73).

График функции $y = \cos x$ называют *косинусоидой*.

Некоторые свойства функции $y = \cos x$. 1. Область определения и непрерывность. Функция $y = \cos x$ определена при всех действительных значениях x и непрерывна.

2. Фуикция $\cos x$ — четная и ее график симметричен относительно оси ординат.

3. Наибольшие и наименьшие значения. Все возможные значения фуикции $\cos x$ ограничены неравенствами.

$$-1 \leqslant \cos x \leqslant +1,$$

прнчем $\cos x = +1$, если $x = 2\pi n (n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots)$

и $\cos x = -1$, если $x = (2n + 1)\pi$ $(n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots)$.

4. Нулевые значения (точки пересечения графика функции с осью абсцисс).

$$\cos x = 0, \text{ если } x = \frac{\pi}{2}(2n + 1) \ (n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots).$$

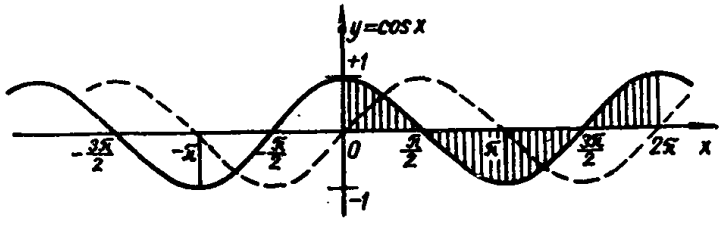


Рис. 73.

5. Интервалы возрастания и убывания. Функция $\cos x$ возрастает на интервалах

$$\pi + 2\pi n \leqslant x \leqslant 2\pi(n + 1) \ (n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots)$$

и убывает на интервалах

$$2\pi n \leqslant x \leqslant \pi + 2\pi n \ \ (n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots).$$

§ 63. График и некоторые свойства функции $y = \operatorname{tg} x$

График функции $y = \operatorname{tg} x$. Подобно тому как была построена синусоида, может быть построен график функции $y = tgx$ (рис. 74).

График функции $y = \operatorname{tg} x$ называют *тангенсоидой.*

Некоторые свойства функции $y = \operatorname{tg} x$. 1. Область определения и непрерывность. Функция $y = \operatorname{tg} x$ определена при $x \neq \frac{\pi}{2}(2n + 1)$ $(n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots)$ или на промежутках

$$\frac{\pi}{2}(2n - 1) < x < \frac{\pi}{2}(2n + 1).$$

В точках $x = \frac{\pi}{2}(2n + 1)$ функция $\operatorname{tg} x$ не существует $(\operatorname{tg} x = \pm\infty)$, и говорят, что в этих точках она терпит разрыв, т. е. функция $\operatorname{tg} x$ не является непрерывной. Ее график сплошной (непрерывный) только на промежутках ее определения, а не на всей числовой оси.

2. Функция $\operatorname{tg} x$ — нечетная и ее график симметричен относительно начала координат.

3. $\operatorname{tg} x$ — функция неограниченная; наибольшего и наименьшего значения не имеет.

4. Нулевые значения

$$\operatorname{tg} x = 0, \text{ если } x = \pi n \ (n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots).$$

5. Функция $\operatorname{tg} x$ на всех промежутках определения возрастает.

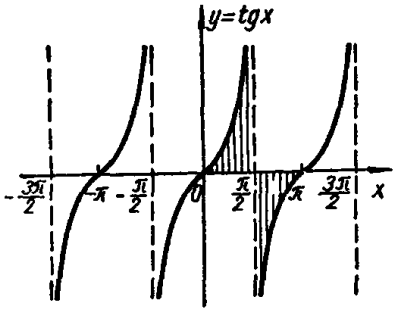


Рис. 74.

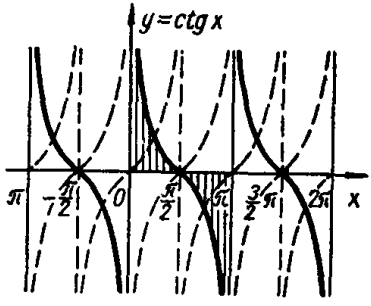


Рис. 75.

§ 64. График и некоторые свойства функции $y = \operatorname{ctg} x$

График функции $y = \operatorname{ctg} x$ можно получить из графика функции $y = \operatorname{tg} x$, пользуясь формулой (31) § 51

$$\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

График функции $y = \operatorname{ctg} x$ получается из графика функции $y = \operatorname{tg} x$ сдвигом последнего влево в направлении оси абсцисс на $\frac{\pi}{2}$ и последующего отображения его (перевертывания) относительно этой оси (рис. 75). График функции $y = \operatorname{ctg} x$ называют *котангенсоидой*.

Свойства функции $y = \operatorname{ctg} x$. 1. Область определения и непрерывность. Функция $y = \operatorname{ctg} x$ определена при $x \neq \pi n$ $(n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots)$, т. е. в промежутках

$$\pi n < x < \pi(n + 1) \quad (n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots).$$

В точках $x = \pi n$ функция $y = \operatorname{ctg} x$ не существует ($\operatorname{ctg} x = \pm\infty$), и говорят, что она в этих точках терпит разрыв.

2. Функция $y = \operatorname{ctg} x$ — нечетная и ее график симметричный относительно начала координат.

3. Как и $\operatorname{tg} x$, функция $\operatorname{ctg} x$ неограниченная и наибольшего или наименьшего значений не имеет.

4. Нулевые значения. $\operatorname{ctg} x = 0$, если $x = \frac{\pi}{2}(2n + 1)$ $(n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots)$.

5. На всех промежутках определения $\operatorname{ctg} x$ убывает.

§ 65. Простые гармонические колебания

Пусть вектор $\vec{OA}$ равномерно вращается с угловой скоростью ω (греческая буква «омега») вокруг точки O в плоскости xOy, т. е. за одну секунду угол изменяется на ω радианов (рис. 76). За время t вектор $\vec{OA}$ сделает поворот на ωt радианов. Угол φ (греческая буква «фи»), образованный осью Ox и вектором $\vec{OA}$, называют *фазовым углом* вращения или просто *фазой*.

Допустим, что в начальный момент движения вектор $\vec{OA}$ совпадает по направлению с положительным направлением оси Ox, тогда за время t вектор $\vec{OA}$ сделает поворот на угол

$$\varphi = \omega t \text{ радианов.} \tag{76}$$

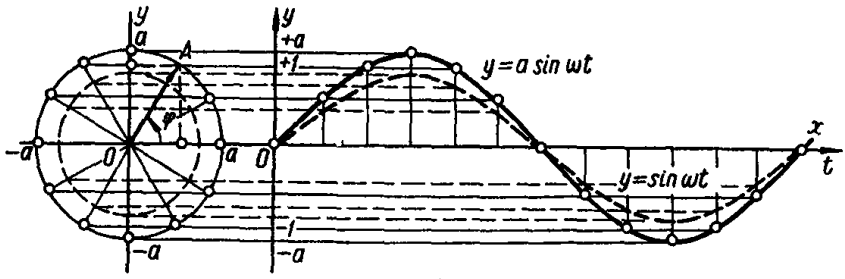


Рис. 76.

Конец вектора — точка A — описывает окружность, радиус которой обозначим через a ($|\vec{OA}| = a$).

Исследуем движение проекции точки A на горизонтальный и вертикальный диаметры окружности (соответственно оси Ox и Oy).

Координаты точки A обозначим через $(x; y)$. Тогда

$$\begin{cases} x = a\cos\omega t; \\ y = a\sin\omega t, \end{cases} \tag{77}$$

т.е. проекции точки A, равномерно движущейся по окружности, на диаметры этой окружности изменяют свое расстояние от начала координат по закону синуса и косинуса.

Движение рассматриваемых проекций — колебательное. Размах колебаний равен диаметру окружности $2a$; половина этого размаха называется *амплитудой колебаний*. Время, за которое осуществляется одно полное колебание, называется *периодом колебаний* и обозначается буквой T.

Количество колебаний ν (греческая буква «ню») на протяжении одной секунды называется *частотой колебаний*.

Так как одно колебание осуществляется на протяжении периода T, а на протяжении одной секунды происходит ν колебаний, то

$$\nu T = 1; \tag{78}$$

таким образом, частота и период колебаний величины взаимно обратные:

$$T = \frac{1}{\nu} \text{ секунд и } \nu = \frac{1}{T} \text{ оборотов в секунду.}$$

За время периода T вектор $\overrightarrow{OA}$ совершает полный оборот, т. е. поворачивается на угол 2π радианов, поэтому

$$\omega T = 2\pi \text{ радианов.} \tag{79}$$

Отсюда

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \frac{рад}{сек}. \tag{80}$$

Графики рассмотреиных колебательных процессов получим из графиков функций $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$, если умножим ординаты этих графиков на амплитуду a. При этом ординаты новых графиков увеличатся, если $a > 1$, или уменьшатся, если $0 < a < 1$, при $a = 1$ останутся без изменения (рис. 76).

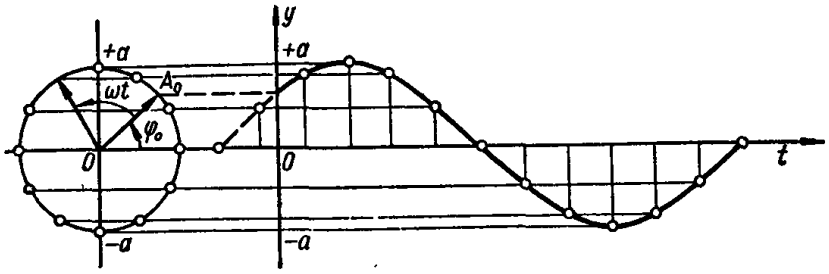


Рис. 77.

Если в начальный момент движения ($t = 0$) вектор $\overrightarrow{OA}_0$ образует с осью Ox угол φ_0 (рис. 77), который иазывают *начальной фазой*, то за время t вектор $\overrightarrow{OA}$ сделает поворот ωt и в момент времени t величина фазового угла

$$\varphi = \omega t + \varphi_0. \tag{81}$$

Тогда графиком простого гармонического колебания будет график функции (рис. 77)

$$y = a\sin(\omega t + \varphi_0), \tag{82}$$

который сдвинут по оси Ox от ее начала иа $-\varphi_0$.

Тригонометрические уравнения и неравенства

§ 66. Простейшие тригонометрические уравнения

Тригонометрическим уравнением называется равенство, содержащее неизвестную величину только под знаком тригонометрических функций* и справедливое лишь при некоторых определенных значе-

* Если неизвестная величина входит в равенство не только под знаком тригонометрической функции, напримеp, $x + \sin x = 1$, то такое уравнение называют смешанным тригонометрическим.

ниях неизвестной. Эти значения называются корнями (решениями) уравнения.

Например: $\sin x + \cos x = 1$; $\operatorname{tg} x = \cos \frac{x}{2} + 1$ и т. д.

Простейшими тригонометрическими уравнениями называют уравнения

$$\sin x = m; \quad \cos x = m; \quad \operatorname{tg} x = m; \quad \operatorname{ctg} x = m,$$

где m — данное число.

Решения простейших тригонометрических уравнений

1. Рассмотрим уравнение $\sin x = m$.

Если $|m| \leqslant 1$, то решения этого уравнения определяются формулой

$$x = (-1)^n \arcsin m + \pi n, \tag{83}$$

где $n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$

В частности, при

$$m = 0 \qquad x = \pi n,$$

$$m = +1 \qquad x = +\frac{\pi}{2} + 2\pi n,$$

$$m = -1 \qquad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n.$$

Если $|m| > 1$, то уравнение (действительных) решений не имеет.

2. Уравнение $\cos x = m$.

Если $|m| \leqslant 1$, то

$$x = \pm \arccos m + 2\pi n, \tag{84}$$

где $n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$

В частности, при $m = 0$ $x = \frac{\pi}{2}(2n + 1)$, при $m = +1$ $x = 2\pi n$, а при $m = -1$ $x = \pi(2n + 1)$.

Если $|m| > 1$, то уравнение решений (действительных) не имеет.

3. Уравнение $\operatorname{tg} x = m$ имеет решения при любом действительном значении m, которые определяются формулой

$$x = \operatorname{arctg} m + \pi n, \tag{85}$$

где $n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$

4. Уравнение $\operatorname{ctg} x = m$ имеет решения при всех действительных значениях m, которые определяются формулой

$$x = \operatorname{arcctg} m + \pi n, \tag{86}$$

где $n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$

Уравнения $\sin(ax + b) = m$; $\cos(ax + b) = m$; $\operatorname{tg}(ax + b) = m$; $\operatorname{ctg}(ax + b) = m$ приводятся к простейшим заменой $ax + b = t$.

§ 67. О решении тригонометрических уравнений

При решении тригонометрических уравнений, как и при решении алгебраических уравнений, прежде всего следует определить область допустимых значений неизвестного. Для тригонометрических уравне-

ний такой областью могут быть только действительные числа. Функции $\sin x$ и $\cos x$ определены при всех действительных значениях x, а функция $\operatorname{tg} x$ определена при $x \neq \frac{\pi}{2}(2n+1)$, где $n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$ и функция $\operatorname{ctg} x$ определена при $x \neq \pi n$, где $n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$

Кроме того, при определении области допустимых значений неизвестного следует учитывать, что дробное выражение существует, если знаменатель его отличен от нуля и т. д.

При преобразованиях уравнений область допустимых значений их неизвестного может изменяться. Если она расширяется, то можно получить лишние (посторонние) решения, которые из множества найденных могут быть исключены проверкой полученных решений по условию уравнения. Если же область допустимых значений неизвестного при преобразованиях уравнения сужается, то корни можно потерять, поэтому необходимо исследовать, нет ли среди тех значений, на которые сузилась область допустимых, решений данного уравнения. Иногда это делается непосредственной проверкой по исходному уравнению.

§ 68. Методы решения тригонометрических уравнений с функциями одного аргумента

Будем рассматривать рациональные тригонометрические уравнения относительно тригонометрических функций.

Рациональное уравнение относительно тригонометрических функций одного и того же аргумента можно привести к виду

$$\frac{R_1(\sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x,\ \operatorname{ctg} x)}{R_2(\sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x,\ \operatorname{ctg} x)} = 0, \tag{87}$$

где R_1 и R_2 — целые рациональные функции относительно $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$.

Если функции $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ заменить соответственно на $\frac{\sin x}{\cos x}$ и $\frac{\cos x}{\sin x}$, то после преобразований уравнение приводится к виду

$$\frac{R_3(\sin x,\ \cos x)}{R_4(\sin x,\ \cos x)} = 0, \tag{88}$$

где R_3 и R_4 — целые рациональные функции от $\sin x$ и $\cos x$. Рассматривая уравнение (88), приходим к выводу, что дробь может равняться нулю, если числитель

$$R_3(\sin x,\ \cos x) = 0, \tag{89}$$

а знаменатель $R_4(\sin x, \cos x) \neq 0$. Заметим, что $R_1(\sin x, \cos x)$, как многочлен от функций $\sin x$ и $\cos x$ величина ограниченная, так как $|\sin x| \leqslant 1$ и $|\cos x| \leqslant 1$, поэтому при всех значениях x

$$\frac{1}{R_4(\sin x,\ \cos x)} \neq 0.$$

Что касается тех корней уравнения (89), при которых $R_4(\sin x, \cos x) = 0$, то для уравнения (88) они являются посторонними, так как

левая часть уравнения (88) при этом принимает вид $\frac{0}{0}$ и не имеет числового смысла.

Таким образом, в общем случае рациональные тригонометрические уравнения относительно функций одного аргумента приводятся к уравнению вида

$$R(\sin x, \cos x) = 0, \tag{90}$$

где R многочлен относительно $\sin x$ и $\cos x$.

Рассмотрим некоторые методы решения уравнения (90).

1. Один из методов состоит в применении так называемой универсальной тригонометрической подстановки, т. е. формул, выражающих $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ через $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$. При применении этого метода уравнение (87) можно не приводить к виду (88). Функция $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ не имеет смысла при $x = \pi(2n + 1)$, где $n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$, поэтому при решении уравнения этим методом дополнительно следует проверить, нет ли среди значений $x = \pi(2n + 1)$ корней данного уравнения.

Пример 1. Решить уравнение $\sin x - 2\cos x = 2$.

Заменив с помощью формул (70) и (71) § 57

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \qquad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},$$

получим

$$\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} - 2\frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = 2.$$

После преобразований получим уравнение

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 2,$$

из которого находим

$$x = 2\operatorname{arc}\operatorname{tg} 2 + 2\pi n, \; n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$$

Допустимыми значениями неизвестного в данном уравнении были все действительные значения x. При переходе к функции $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ из рассмотрения выпали значения $x = \pi(2n + 1)$, которые следует проверить по условию. Подставляя $x = \pi(2n + 1)$ в данное уравнение, убеждаемся, что эти значения являются решениями уравнения. Ответ:

$$x = 2\operatorname{arctg} 2 + 2\pi n; \quad x = \pi(2n + 1),$$

где $n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$

Пример 2. Решить уравнение $1 - \sin x = \cos x(\sin x + \cos x)$.

Заменяя $\sin x$ и $\cos x$ через $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, получим уравнение

$$1-\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\left(\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}+\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\right),$$

которое после преобразований имеет вид

$$\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}-\operatorname{tg}\frac{x}{2}=0.$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=0 \text{ или } \operatorname{tg}\frac{x}{2}=1$$

и, следовательно,

$$x=2\pi n \text{ или } x=\frac{\pi}{2}+2\pi n\ (n=0;\ \pm1;\ \pm2;\ \ldots).$$

Проверим не будут ли корнями данного уравнения значения $x=\pi(2n+1)$.

Подставляя это значение в данное уравнение, находим

$$1-\sin[\pi(2n+1)]=\cos[\pi(2n+1)\{\sin[\pi(2n+1)]+\cos[\pi(2n+1)]\}$$

или $1-0=-1(0-1)$; $1=1$, т. е. значения $x=\pi(2n+1)$ также являются корнями уравнения.

Таким образом, корнями данного уравнения будут значения, определяемые формулами

$$x=2\pi n,\quad x=\frac{\pi}{2}+2\pi n;\quad x=\pi(2n+1),$$

где $n=0;\ \pm1;\ \pm2;\ \ldots$

Заметим, что первая и третья формулы могут быть заменены одной формулой $x=\pi n$.

Ответ: $x=\pi n$, $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, где $n=0;\ \pm1;\ \pm2;\ \ldots$

2. Универсальная подстановка часто приводит к уравнению высокой степени относительно $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ и поэтому не удобна. Иногда проще при решении уравнения (90) применять замены

$$\sin x=\sqrt{1-\cos^2 x} \text{ или } \cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}.$$

Напомним, что $\sin(-x)=-\sin x$, $\cos(-x)=\cos x$, $\sin(\pi-x)=\sin x$, а $\cos(2\pi-x)=\cos x$. Поэтому, если в уравнении (90) левая часть не изменяется при замене x на $-x$ или x на $\pi-x$, то это значит, что она ведет себя как $\cos x$ и в этом случае целесообразно заменить $\sin x$ на $\sqrt{1-\cos^2 x}$. Наоборот, если при замене x на $-x$ левая часть уравнения (90) изменяет только знак или, если при замене x на $\pi-x$ она не изменяется, то целесообразно в уравнении оставить функцию $\sin x$, т.е. $\cos x$ заменить на $\sqrt{1-\sin^2 x}$.

Пример 3. Решить уравнение

$$3\sin^3 x + 3\sin x \cos^2 x + 2\cos^2 x = 0.$$

Левая часть этого уравнения не является функцией ни четной, ни нечетной. Поэтому проверяем поведение левой части уравнения при замене x на $\pi - x$. Убеждаемся, что при такой замене она не изменяется. В этом случае целесообразно произвести замену $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. После замены получим

$$3\sin^3 x + 3\sin x (1 - \sin^2 x) + 2(1 - \sin^2 x) = 0$$

или

$$2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0.$$

Решая это квадратное уравнение относительно $\sin x$, найдем

$$\sin x = 2, \quad \sin x = -\frac{1}{2}.$$

Первое из уравнений решений не имеет, а из второго получаем искомый ответ

$$x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n,$$

где $n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$

Пример 4. Решить уравнение

$$4\sin^4 x - 2\sin^2 x \cos x + 4\cos 2x = 2\cos^3 x - \sin^2 2x + 2.$$

При замене x на $-x$ обе части уравнения не изменяются. Поэтому целесообразно произвести замену $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$. Учитывая, что $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ и $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, получим

$$4(1 - \cos^2 x)^2 - 2(1 - \cos^2 x)\cos x + 4(2\cos^2 x - 1) = 2\cos^3 x - 4\cos^2 x(1 - \cos^2 x) + 2.$$

Отсюда

$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0.$$

Решая последнее уравнение относительно $\cos x$, найдем

$$\cos x = 1 \text{ и } \cos x = -\frac{1}{2}.$$

Из этих уравнений получим

$$x = 2\pi n \text{ и } x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n.$$

Ответ: $x = 2\pi n$ и $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi x$, где $n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$

3. Уравнение (90) можно решать приведением к однородному тригонометрическому уравнению относительно $\sin x$ и $\cos x$.

Однородным уравнением относительно $\sin x$ и $\cos x$ называют уравнение, каждый член которого имеет одну и ту же степень относительно

$\sin x$ и $\cos x$. Например, однородное уравнение второй степени относительно $\sin x$ и $\cos x$ имеет вид

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0.$$

Такое уравнение легко приводится к уравнению с одной неизвестной функцией делением обеих частей уравнения на $\cos^2 x$ или $\sin^2 x$. После деления на $\cos^2 x$ получим квадратное относительно $\operatorname{tg} x$ уравнение

$$a\operatorname{tg}^2 x + b\operatorname{tg} x + c = 0.$$

При делении на $\cos^2 x$ (или $\sin^2 x$) необходимо показать, что $\cos^2 x \neq 0$. Действительно, подставив $\cos x = 0$ в исходное уравнение, получаем $a\sin^2 x = 0$, а это при $a \neq 0$ невозможно, так как, если $\cos x = 0$, то $\sin x = \pm 1$.

Аналогично однородное относительно $\sin x$ и $\cos x$ уравнение n-й степени

$$a_n \sin^n x + a_{n-1}\sin^{n-1} x\cos x + \cdots + a_1 \sin x\cos^{n-1} x + a_0\cos^n x = 0$$

делением на $\cos^n x$ или $\sin^n x$ можно привести к алгебраическому уравнению n-ой степени относительно $\operatorname{tg} x$ или $\operatorname{ctg} x$.

Уравнение (90) всегда можно привести к однородному уравнению относительно $\sin x$ и $\cos x$. Для этого достаточно в уравнении (90) члены четной степени перенести в одну, а нечетной степени относительно $\sin x$ и $\cos x$ в другую часть и возвести обе части уравнения в квадрат. Далее, пользуясь тем, что при любом k $(\sin^2 x + \cos^2 x)^k = 1$, показатель k подбирается так, чтобы уравнение стало однородным. Покажем это на примере. Приведем уравнение

$$2\sin^2 x + \cos x - 3\sin x + 1 = 0$$

к однородному. Перепишем это уравнение в виде

$$2\sin^2 x + 1 = 3\sin x - \cos x;$$

обе его части возведем в квадрат, после чего получим

$$4\sin^4 x + 4\sin^2 x + 1 = 9\sin^2 x - 6\sin x\cos x + \cos^2 x.$$

Подбирая показатель k соответствующим образом, данное уравнение можно записать так:

$$4\sin^4 x + 4\sin^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x) + 1\cdot(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = (9\sin^2 x - 6\sin x\cos x + \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x).$$

Отсюда после очевидных преобразований получаем уравнение четвертой степени

$$3\sin^3 x\cos x - 2\sin^2 x\cos^2 x + 3\sin x\cos^3 x = 0,$$

однородное относительно $\sin x$ и $\cos x$.

Пример 5. Решить уравнение $\sec x = 4\sin x + 6\cos x$.

Умножив обе части уравнения на $\cos x \neq 0$, получим

$$1 = 4\sin x\cos x + 6\cos^2 x$$

и заменим $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$; тогда имеем

$$\sin^2 x - 4\sin x\cos x - 5\cos^2 x = 0.$$

Последнее уравнение разделим на $\cos^2 x$, после чего получаем $\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x - 5 = 0$; отсюда находим $\operatorname{tg} x = 5$, $\operatorname{tg} x = -1$. Следовательно,

$$x = \operatorname{arctg} 5 + \pi n, \quad x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \text{ где } n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$$

Пример 6. Решить уравнение $\sin^3 x - \cos^3 x + 1 = 0$.

Перенеся члены нечетной степени относительно $\sin x$ и $\cos x$ в одну часть, получим

$$\cos^3 x - \sin^3 x = 1.$$

Возведем обе части в квадрат и умножим 1 на $(\sin^2 x + \cos^2 x)^3$; уравнение примет вид $(\cos^3 x - \sin^3 x)^2 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3$ или

$$\cos^6 x - 2\sin^3 x \cos^3 x + \sin^6 x =$$
$$= \sin^6 x + 3\sin^4 x \cos^2 x + 3\sin^2 x \cos^4 x + \cos^6 x.$$
$$3\sin^4 x \cos^2 x + 2\sin^3 x \cos^3 x + 3\sin^2 x \cos^4 x = 0$$

или $3\sin^2 x \cos^2 x + 2\sin^3 x \cos^3 x = 0$.

Разлагая на множители, получим $\sin^2 x \cos^2 x (3 + 2\sin x \cos x) = 0$. Так как $3 + 2\sin x \cos x \neq 0$, то окончательно имеем $\sin^2 x = 0$ и $\cos^2 x = 0$ и, следовательно,

$$x = \pi n \text{ и } x = \frac{\pi}{2}(2n + 1).$$

Проверив найденные значения по условию уравнения, в ответе получим

$$x = 2\pi k \text{ и } x = \frac{\pi}{2}(4k - 1), \text{ где } k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$$

4. Рассмотрим уравнение вида $a\sin x + b\cos x = c$, являющееся частным случаем уравнения (90). Коэффициенты a, b и c — произвольные вещественные числа.

Будем решать данное уравнение введением вспомогательного угла. Для этого разделим обе части уравнения на $+\sqrt{a^2 + b^2}$; получим

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Коэффициенты при $\sin x$ и $\cos x$ будем рассматривать как значения косинуса и синуса вспомогательного аргумента φ, т. е. будем считать

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos\varphi, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin\varphi,$$

так как

$$\left|\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| \leqslant 1; \quad \left|\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| \leqslant 1 \text{ и } \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = 1.$$

Без ограничения общности можно полагать, что $b \geqslant 0$, тогда $\sin\varphi \geqslant 0$ и угол можно взять в промежутке $0 < \varphi < \pi$.

Определив по таблицам значение φ, данное уравнение запишем в виде

$$\cos\varphi \sin x + \sin\varphi \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

или

$$\sin(x+\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Если $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leqslant 1$, т. е. $a^2+b^2 \geqslant c^2$, то решениями уравнения являются значения

$$x = (-1)^n \arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} - \varphi + \pi n,$$

где $n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$

Если $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| > 1$, т. е. $a^2+b^2 < c^2$, то уравнение решений не имеет.

Пример 7. Решить уравнение $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1$.

Разделив обе части уравнения на 2, получим

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x = \frac{1}{2}.$$

Обозначим $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30°$, $\frac{1}{2} = \sin 30°$; тогда исходное уравнение примет вид $\sin(x+30°) = \frac{1}{2}$, откуда следует $x + 30° = (-1)^n 30° + 180° \cdot n$, $n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$ или при $n = 2k$ и $n = 2k+1$

$$x = 180° \cdot 2k \text{ и } x = -60° + 180°(2k+1).$$

Ответ: $x = 360° \cdot k$ и $x = 120°(3k+1)$, где $k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$

5. Рассмотрим уравнение $\sin^n x + \cos^n x = 1$, где n — натуральное число.

Если $n = 1$, то уравнение приводится к виду, рассмотренному в п. 4.

При $n = 2$ имеем тождество $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, где x — любое действительное число.

При $n \geqslant 3$, если $|\sin x| \neq 1$ и $|\cos x| \neq 1$, имеем

$$\begin{cases} \sin^n x < \sin^2 x, \\ \cos^n x < \cos^2 x, \end{cases}$$

так как показательная функция при основании, меньшем единицы, убывает. Складывая почленно полученные неравенства, найдем, что

$$\sin^n x + \cos^n x < 1, \quad n \geqslant 3,$$

при всех x, для которых $|\sin x| \neq 1$, и $|\cos x| \neq 1$. Таким образом, если n — нечетное число, то возможны случаи

$$\begin{cases} \sin x = 1, \\ \cos x = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x = 1, \end{cases}$$

из которых соответственно получаем решения данного уравнения

$$x = \frac{\pi}{2}(4k + 1) \text{ и } x = 2\pi k, \text{ где } k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots;$$

если n — четное число, то возможны случаи

$$\begin{cases} \sin x = \pm 1; \\ \cos x = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x = \pm 1, \end{cases}$$

из которых получаем решения данного уравнения

$$x = \frac{\pi}{2} \cdot k, \text{ где } k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$$

Пример 8. Решить уравнение $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$.

Из изложенного выше следует, что уравнение может иметь решение в следующих двух случаях:

$$\begin{cases} \sin x = 1, \\ \cos x = 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x = 1, \end{cases}$$

откуда находим решения $x = \frac{\pi}{2}(4k + 1)$ и $x = 2\pi k$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2}(4k + 1)$ и $x = 2\pi k$, где $k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$

Заметим, что при $n \geqslant 3$ корни уравнения $\sin^n x + \cos^n x = 1$ зависят не от численного значения величины n, а только от того, четное n или нет.

§ 69. Тригонометрические уравнения с функциями разных аргументов

Рациональные тригонометрические уравнения с функциями разных аргументов можно записать в виде

$$R(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x, \sin 2x, \cos 2x, \operatorname{tg} 2x, \operatorname{ctg} 2x, \ldots) = 0, \quad (91)$$

где R — символ рациональной функции.

Уравнение (91) можно привести к виду

$$R(\sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots) = 0. \quad (92)$$

Тригонометрические уравнения с разными аргументами и одновременно с разными функциями решают приведением их к уравнениям с одним аргументом.

Уравнения типа (91), левые части которых раскладываются на множители. Если левую часть уравнения (91) можно разложить на множители $R_1 \cdot R_2 \ldots R_n = 0$, где $R_1, R_2, \ldots, R_n$ — рациональные функции тригонометрических функций, то достаточно решить каждое из уравнений $R_1 = 0; R_2 = 0; \ldots; R_n = 0$ и объединить общие решения в одно множество, которое и будет решением исходного уравнения (91). При

этом можно получить посторонние решения, т.е. те, при которых хотя бы один из множителей левой части уравнения (91) $[R_1, R_2, \ldots, R_n]$ теряет смысл.

Пример 1. Решить уравнение $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$.

Сгруппируем члены левой части уравнения так:

$$(\sin x + \sin 4x) + (\sin 2x + \sin 3x) = 0$$

и каждую из сумм в круглых скобках преобразуем в произведение, воспользовавшись формулой (62) § 56:

$$2 \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{3x}{2} + 2 \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{x}{2} = 0.$$

Вынесем $2 \sin \frac{5x}{2}$ за скобки и опустим множитель 2:

$$\sin \frac{5x}{2} \left(\cos \frac{3x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right) = 0.$$

Преобразовав сумму косинусов в произведение, получим $2 \sin \frac{5x}{2} \cos x \times \cos \frac{x}{2} = 0$; из уравнений $\sin \frac{5x}{2} = 0$; $\cos x = 0$; $\cos \frac{x}{2} = 0$ находим решения

$$x = \frac{2}{5} \pi n, \quad x = \frac{\pi}{2} (2n + 1), \quad x = \pi (2n + 1), \quad n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$$

Так как все множители левой части данного уравнения имеют смысл при всех значениях x, то посторонних решений здесь нет.

Ответ: $x = \frac{2}{5} \pi n$; $x = \frac{\pi}{2} (2n + 1)$ и $x = \pi (2n + 1)$, где $n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$

Пример 2. Решить уравнение $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$.

Перенесем все члены уравнения в левую часть; получим

$$\sin^2 x + \sin^2 2x - \sin^2 3x = 0.$$

Сгруппировав первый и третий члены данного уравнения и разложив эту разность квадратов на множители, найдем

$$(\sin x + \sin 3x) \cdot \sin x - \sin 3x) + \sin^2 2x = 0$$

или

$$-2 \sin 2x \cos x \cdot 2 \sin x \cos 2x + \sin^2 2x = 0.$$

Учитывая, что $2 \sin x \cos x = \sin 2x$, имеем $-2 \sin^2 2x \cos 2x + \sin^2 2x = 0$ или $\sin^2 2x (1 - 2 \cos 2x) = 0$.

Последнее уравнение распадается на $\sin 2x = 0$ и $\cos 2x = \frac{1}{2}$, откуда следует

$$x = \frac{\pi n}{2}; \quad x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n.$$

Ответ: $x = \frac{\pi x}{2}$ и $x = \frac{\pi}{6} (6n \pm 1)$, где $n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$

Пример 3. Решить уравнение $2\sin 3x = 3\cos x + \cos 3x$.
Согласно формулам (49) и (50)

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x; \quad \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x.$$

Уравнение примет вид

$$2(3\sin x - 4\sin^3 x) = 3\cos x + 4\cos^3 x - 3\cos x$$

или

$$6\sin x - 8\sin^3 x - 4\cos^3 x = 0.$$

Так как $\cos x \neq 0$, то разделив обе части уравнения на $2\cos^3 x$, получим $\frac{3\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} - 4\operatorname{tg}^3 x - 2 = 0$ или $3\operatorname{tg} x(1 + \operatorname{tg}^2 x) - 4\operatorname{tg}^3 x - 2 = 0$ и после приведения подобных членов:

$$\operatorname{tg}^3 x - 3\operatorname{tg} x + 2 = 0.$$

Раскладывая левую часть уравнения на множители, найдем, что

$$(\operatorname{tg} x + 2)(\operatorname{tg} x - 1)^2 = 0; \text{ откуда } \operatorname{tg} x = -2 \text{ и } \operatorname{tg} x = 1,$$

а следовательно,

$$x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi n \text{ и } x = \frac{\pi}{4} + \pi n.$$

Ответ: $x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi n$; $x = \frac{\pi}{4}(4n + 1)$, где $n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$

Тригонометрические уравнения, решаемые преобразованием произведений тригонометрических функций в суммы.

К этому типу уравнений, в частности, относятся уравнения

$$\sin mx \cos nx = \sin px \cos qx,$$
$$\sin mx \sin nx = \sin px \sin qx,$$
$$\cos mx \cos nx = \cos px \cos qx,$$

легко раскладывающееся на множители, если $m \pm n = p \pm q$.

Пример 4. Решить уравнения $\sin 2x \sin 6x = \sin 3x \sin 5x$.

При помощи формулы (61) § 55 преобразуем обе части уравнения в суммы и перенесем все члены уравнения в левую часть:

$$\frac{\cos 4x - \cos 8x}{2} = \frac{\cos 2x - \cos 8x}{2} \text{ или } \cos 4x - \cos 2x = 0.$$

Воспользовавшись формулой (65) § 56, разложим левую часть последнего уравнения на множители: $2\sin 3x \sin x = 0$; отсюда находим $\sin 3x = 0$ и $\sin x = 0$, а следовательно,

$$x = \frac{\pi n}{3} \text{ и } x = \pi n.$$

Так как вторая серия решений включается в первую, то получаем окончательно

$$x = \frac{\pi n}{3}, \text{ где } n = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \ldots$$

Пример 5. Решить уравнение $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$.

Преобразовав все члены левой части уравнения по формуле $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$, получим

$$\frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1 + \cos 4x}{2} + \frac{1 + \cos 6x}{2} + \frac{1 + \cos 8x}{2} = 2$$

или

$$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x = 0.$$

Раскладывая левую часть уравнения на множители, приходим к уравнению $\cos x \cos 2x \cos 5x = 0$, откуда следует $\cos x = 0$, $\cos 2x = 0$ и $\cos 5x = 0$ и соответственно $x = \frac{\pi}{2}(2n + 1)$, $x = \frac{\pi}{4}(2n + 1)$ и $x = \frac{\pi}{10}(2n + 1)$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4}(2n + 1)$ и $x = \frac{\pi}{10}(2n + 1)$,
где $n = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \ldots$

§ 70. Графические методы решения тригонометрических уравнений

Графические методы решения уравнений, известные из курса алгебры, могут быть применены и к решению тригонометрических уравнений. Эти методы в элементарной математике, в частности для смешанных тригонометрических уравнений, являются единственными.

Пример 1. Решить уравнение $\operatorname{tg} x - \cos^2 x + 0{,}8 = 0$.

Перепишем это уравнение в виде $\operatorname{tg} x = \cos^2 x - 0{,}8$. Решениями данного уравнения будут абсциссы точек пересечения графиков этих функций (рис. 78). Заметим, что графики функций достаточно построить на промежутке $-\frac{\pi}{2}$, $+\frac{\pi}{2}$, так как функции $\cos^2 x - 0{,}8$ и $\operatorname{tg} x$ имеют период π.

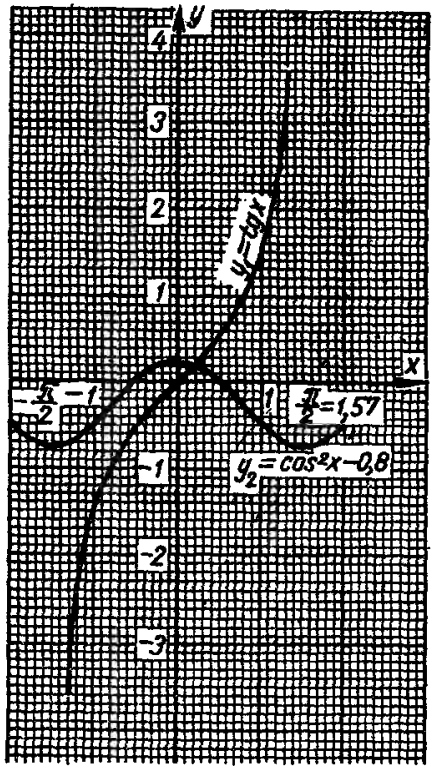


Рис. 78.

Построив график, найдем

$$x_1 \approx 0{,}17; \quad x = x_1 + k\pi.$$

Это уравнение допускает аналитическое решение, которое по сравнению с графическим является более трудоемким.

Пример 2. Решить уравнение $2^{x^2} = \cos x$.

Строим графики функций $y_1 = 2^{x^2}$ и $y_2 = \cos x$ (рис. 79). Абсциссы точек пересечения графиков этих функций будут решениями данного уравнения. По рисунку находим $x = 0$, причем других действительных корней данное уравнение иметь не может.

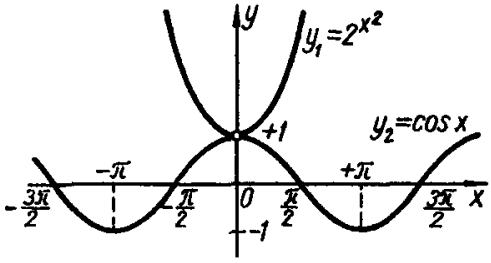


Рис. 79.

Пример 3. Решить уравнение $x = \cos x$.

Строим графики $y_1 = \cos x$ и $y_2 = x$ (рис. 80) и находим искомый корень $x \approx 0{,}74$, который будет единственным.

При графическом решении тригонометрических уравнений мы находим только действительные корни. В элементарном курсе тригонометрии это не является ограничением, так как рассматриваются только действительные значения тригонометрических функций.

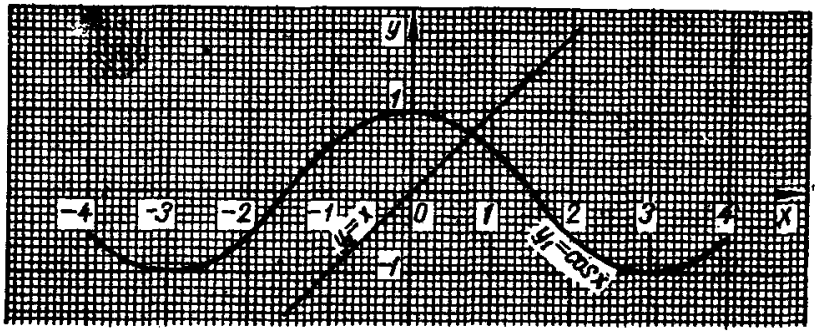


Рис. 80.

§ 71. Системы тригонометрических уравнений

Системы тригонометрических уравнений с двумя и тремя неизвестными встречаются в элементарном курсе тригонометрии в основном при решении треугольников. Решение и исследование систем тригонометрических уравнений в общем случае представляет значительные трудности.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = a, \\ x + y = 2b. \end{cases}$$

Преобразуем по формуле (62) левую часть первого уравнения в произведение, получим

$$2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = a$$

или после подстановки из второго уравнения

$$2 \sin b \cos \frac{x-y}{2} = a, \quad \frac{x+y}{2} = b \qquad (93)$$

Рассмотрим возможные случаи:

А. Если $a = 0$ и $b = \pi k$ ($k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$), то решением заданной системы будет любая пара чисел, определяемая системой

$$\begin{cases} x = \alpha, \\ y = 2\pi k - \alpha, \end{cases}$$

где α — любое действительное число, а $k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$

Б. Если $a = 0$ и $b \neq \pi k$, то из уравнения (93) находим

$$\cos \frac{x-y}{2} = 0$$

или

$$\frac{x-y}{2} = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k \; (k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots);$$

решение данной системы сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x + y = 2b, \\ x - y = \pm\pi + 4\pi k, \end{cases}$$

откуда находим

$$x = b \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

$$y = b \mp \frac{\pi}{2} - 2k\pi, \text{ где } k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$$

В. Если $a \neq 0$ и $b = \pi k$ ($k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$), то система решений не имеет.

Г. Если $a \neq 0$ и $b \neq \pi k$ ($k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$), то, определив $(x - y)$ из простейшего тригонометрического уравнения (93), сводим данную систему к системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x + y = 2b, \\ x - y = \pm 2 \arccos \dfrac{a}{2 \sin b} + 4k\pi. \end{cases}$$

Если $\left|\dfrac{a}{2 \sin b}\right| \leqslant 1$, то система имеет решение $x = b \pm \arccos \dfrac{a}{2 \sin b} + 2k\pi$, $y = b \mp \arccos \dfrac{a}{2 \sin b} - 2k\pi$, где $k = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \ldots$

Если $\left|\dfrac{a}{2 \sin b}\right| > 1$, то система решений не имеет.

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \cos x \cos y = a, \\ \sin x \sin y = b. \end{cases}$$

Складывая и вычитая почленно уравнения данной системы с помощью формул, получим

$$\begin{cases} \cos(x - y) = a + b, \\ \cos(x + y) = a - b. \end{cases}$$

Решив по формуле (84) § 66 каждое из найденных простейших тригонометрических уравнений, приходим к системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x - y = \pm \arccos(a+b) + 2\pi k \ (k = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots), \\ x + y = \pm \arccos(a-b) + 2\pi n \ (n = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots). \end{cases}$$

Если $|a+b| \leqslant 1$ и $|a-b| \leqslant 1$, то

$$x = \pm \frac{1}{2}[\arccos(a+b) + \arccos(a-b)] + \pi(n+k),$$

$$y = \pm \frac{1}{2}[\arccos(a-b) - \arccos(a+b)] + \pi(n-k),$$

где $n = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots,\ k = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots$

Если $|a+b| > 1$ или $|a-b| > 1$, то система решений не имеет.

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z = a, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = b, \\ x + y + z = \pi. \end{cases}$$

Если учесть, что при $x + y + z = \pi$, согласно примеру 4 § 56, $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z$, то система приводится к виду

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z = a, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = b, \\ x + y + z = \pi. \end{cases}$$

Тогда $\operatorname{tg} z = a - b$ и два первых уравнения исходной системы принимают вид $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \dfrac{a}{a-b}$, $(a \neq b)$,

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = b.$$

Воспользовавшись формулами Виета, находим $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{tg} y$ как корни t_1 и t_2 квадратного уравнения

$$t^2 - bt + \frac{a}{a-b} = 0,$$

а затем из простейших тригонометрических уравнений (см. § 66)

$$\operatorname{tg} x = t_1,\ \operatorname{tg} y = t_2,\ \operatorname{tg} z = a - b$$

определяем x, y и z.

§ 72. Тригонометрические неравенства

Неравенство, в котором неизвестное входит только под знак тригонометрической функции, называется *тригонометрическим*.

Простейшие тригонометрические неравенства. К ним относятся неравенства вида $\sin x \gtrless m$; $\cos x \gtrless m$; $\operatorname{tg} x \gtrless m$ и $\operatorname{ctg} x \gtrless m$.

1. Неравенство $\sin x > m$.

Если $m < -1$, то решением неравенства является любое действительное число.

Если $-1 \leqslant m < +1$, то решениями неравенства являются $2\pi k + \arcsin m < x < \pi(2k+1) - \arcsin m$, где $k = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \ldots$

На рис. 81 штриховкой отмечены значения x, удовлетворяющие неравенству $\sin x > m$ при $-1 \leqslant m < +1$.

Если $m \geqslant 1$, то неравенство решений не имеет.

2. Неравенство $\sin x < m$.

Если $m \leqslant -1$, то неравенство решений не имеет.

Если $-1 < m \leqslant +1$, то решениями неравенства являются $\pi(2k+1) - \arcsin m < x < \arcsin m + 2\pi(k+1)$, где $k = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \ldots$

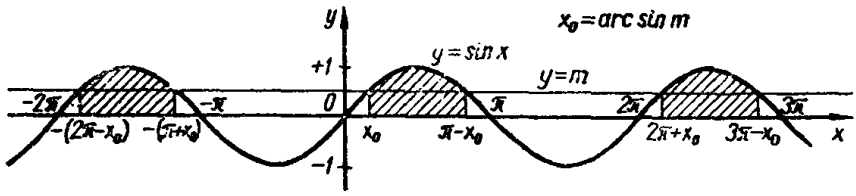


Рис. 81.

На рис. 81 значения x, удовлетворяющие неравенству $\sin x < m$, не заштрихованы.

Если $m > +1$, то неравенство справедливо при всех действительных значениях x.

3. Неравенство $\cos x > m$.

Если $m < -1$, то решением неравенства служит любое действительное число.

Если $-1 \leqslant m < +1$, то решения неравенства лежат в промежутках

$$-\arccos m + 2\pi k < x < 2\pi k + \arccos m,$$

где $k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$

Если $m \geqslant +1$, то неравенство решений не имеет.

4. Неравенство $\cos x < m$.

Если $m \geqslant -1$, то неравенство решений не имеет.

Если $-1 < m \leqslant +1$, то решениями неравенства являются значения x из промежутков

$$\arccos m + 2\pi k < x < 2\pi(k+1) - \arccos m,$$

где $k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$

Если $m > +1$, то любое действительное число есть решение неравенства.

Постройте рисунок для неравенств $\cos x \gtrless m$, аналогичный рис. 81.

5. Неравенство $\operatorname{tg} x > m$ имеет решением значения x из промежутков

$$\operatorname{arctg} m + \pi k < x < \frac{\pi}{2}(2k+1),$$

где $k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$

6. Неравенство $\operatorname{tg} x < m$ имеет решениями значения x из промежутков

$$\frac{\pi}{2}(2k-1) < x < \operatorname{arctg} m + \pi k,$$

где $k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$

7. Неравенство $\operatorname{ctg} x > m$ имеет решения в промежутках $\pi k < x < \operatorname{arcctg} m + \pi k$,
где $k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$

8. Неравенство $\operatorname{ctg} x < m$ имеет решения в промежутках $\operatorname{arcctg} m + \pi k < x < \pi(k+1)$,
где $k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$

Решение тригонометрических неравенств. Будем рассматривать неравенства вида $f(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x) \gtrless m$.

Если функция $f(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x)$ периодична, то достаточно найти решения на отрезке числовой оси, равном по длине наименьшему периоду функции f, а затем, пользуясь периодичностью функции, записать решения неравенства на всей числовой оси.

Рассмотрим несколько простых тригонометрических неравенств.

Пример 1. Решить неравенство $\cos^2 x - 3\cos x < 0$.

Разложим левую часть неравенства на множители

$$\cos x(\cos x - 3) < 0.$$

Учитывая, что $\cos x - 3 < 0$ при всех значениях x, получаем $\cos x > 0$, откуда $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, где $k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$

Пример 2. Решить неравенство $\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| < 1$.

Данное неравенство эквивалентно неравенствам $-1 < \operatorname{tg}\frac{x}{2} < 1$ или $-\frac{\pi}{4} + \pi k < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{4} + \pi k$, откуда $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, где $k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$

Пример 3. Решить неравенство $|\sin x| > \frac{1}{2}$.

Избавляясь от знака абсолютной величины, имеем

$$\sin x > +\frac{1}{2} \text{ и } \sin x < -\frac{1}{2}.$$

Из первого полученного неравенства находим

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \pi(2k+1) - \frac{\pi}{6},$$

а из второго —

$$\frac{\pi}{6} + \pi(2k+1) < x < 2\pi(k+1) - \frac{\pi}{6}.$$

Решения этих двух неравенств можно объединить и окончательный ответ записать в виде $\frac{\pi}{6} + \pi k < x < \pi(k+1) - \frac{\pi}{6}$, где $k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$

Пример 4. Решить неравенство $\sin^2 x + 2\sin x \cos x - 3\cos^2 x < 0$.

Разделив обе части данного неравенства на $\cos^2 x \neq 0$ (при $\cos x = 0$ неравенство принимает вид $\sin^2 x < 0$, что невозможно), получим $\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 3 < 0$ или $(\operatorname{tg} x + 3)(\operatorname{tg} x - 1) < 0$.
Отсюда находим $-3 < \operatorname{tg} x < +1$ и, следовательно,

$$-\operatorname{arcctg} 3 + \pi k < x < \frac{\pi}{4} + \pi k.$$

Ответ: $-\operatorname{arctg} 3 + \pi k < x < \frac{\pi}{4} + \pi k$, где $k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$

Пример 5. Решить неравенство $\sin x + \sin 3x < \sin 2x + \sin 4x$.

Перенесем все члены неравенства, содержащие неизвестное, в одну часть, тогда получим

$$\sin x + \sin 3x - \sin 2x - \sin 4x < 0.$$

Функция $f(x) = \sin x + \sin 3x - \sin 2x - \sin 4x$ имеет наименьший положительный период, равный 2π, поэтому достаточно найти решения этого неравенства, например, на отрезке $[0, 2\pi]$, а затем с учетом периода записать все множество его решений.

Преобразовав при помощи формулы (63) § 56 левую часть исходного неравенства в произведение, получим

$$-4 \sin \frac{x}{2} \cos x \cos \frac{5x}{2} < 0$$

или

$$4 \sin \frac{x}{2} \cos x \cos \frac{5x}{2} > 0$$

и найдем решения последнего неравенства на отрезке $[0, 2\pi]$. Так как в промежутке $(0, 2\pi)$ множитель $4 \sin \frac{x}{2} > 0$, то исходное неравенство сводится к решению неравенства

$$\cos x \cos \frac{5x}{2} > 0.$$

Для решения последнего неравенства на отрезке $[0, 2\pi]$ нанесем нули левой части этого неравенства, т. е. значения аргумента $\frac{\pi}{5}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{5}; \pi; \frac{7\pi}{5}; \frac{3\pi}{2}; \frac{9\pi}{5}$ (рис. 82).

Нетрудно проверить, что одинаковые знаки функции $\cos x$ и $\cos \frac{5x}{2}$ принимают на промежутках

$$0 < x < \frac{\pi}{5}; \quad \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{5}; \quad \pi < x < \frac{7\pi}{5}; \quad \frac{3\pi}{2} < x < \frac{9\pi}{5},$$

которые на рис. 82 отмечены штриховкой.

Тогда множество решений исходного неравенства запишется в виде

$$2\pi k < x < \frac{\pi}{5} + 2\pi k,$$

$$2\pi k + \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{5} + 2\pi k,$$

$$2\pi k + \pi < x < \frac{7\pi}{5} + 2\pi k,$$

$$2\pi k + \frac{3\pi}{2} < x < \frac{2\pi}{5} + 2\pi k,$$

где

$$k = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \ldots$$

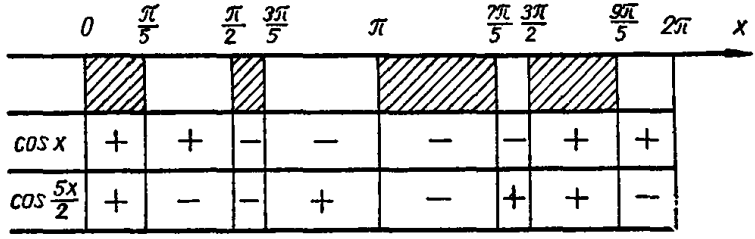


Рис. 82.

Доказательство тригонометрических неравенств. Методы доказательства тригонометрических неравенств почти ничем не отличаются от доказательства алгебраических неравенств.

Пример 6. Доказать, что если $0 < \alpha < \pi$, то

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \geqslant 1 + \operatorname{ctg}\alpha.$$

Найдем разность и покажем, что она не отрицательна:

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - (1 + \operatorname{ctg}\alpha) = \frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha} =$$

$$= \frac{1 - \sin\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin\alpha} = \frac{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha} \geqslant 0,$$

так как по условию $0 < \alpha < \pi$. Поэтому $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \geqslant 1 + \operatorname{ctg}\alpha$, причем знак равенства достигается при $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Пример 7. Доказать, что $|\sin\alpha| + |\cos\alpha| \geqslant 1$.

Для доказательства используем очевидное неравенство

$$2|\sin\alpha||\cos\alpha| \geqslant 0,$$

к обеим частям которого прибавим по 1. Тогда

$$1 + 2|\sin\alpha||\cos\alpha| \geqslant 1$$

или

$$\sin^2\alpha + 2|\sin\alpha||\cos\alpha| + \cos^2\alpha \geqslant 1,$$

откуда $(|\sin\alpha| + |\cos\alpha|)^2 \geqslant 1$.

Извлекая квадратный корень из обеих частей последнего неравенства и взяв при этом только положительные значения корней, получим

$$|\sin\alpha| + |\cos\alpha| \geqslant 1,$$

что и требовалось доказать.

Пример 8. Доказать, что

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha + \sec^2\alpha + \operatorname{cosec}^2\alpha \geqslant 7.$$

Левую часть неравенства преобразуем так:

$$\begin{aligned}\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha + \sec^2\alpha + \operatorname{cosec}^2\alpha = \\ = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha + (1 + \operatorname{tg}^2\alpha) + (1 + \operatorname{ctg}^2\alpha) = \\ = 3 + 2(\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha) \geqslant 7,\end{aligned}$$

поскольку при любом значении угла α

$$\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha \geqslant 2,$$

как сумма двух взаимообратных положительных величин. В частности, знак равенства будет только при $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} = 45° + 90°k$, где $k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$, так как в этом случае $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\alpha = \pm 1$.

Пример 9. Доказать, что если $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, то

$$\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2} \leqslant \frac{1}{8}.$$

Обозначим $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = a$ и произведем замену $\frac{\gamma}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2}$, тогда $\sin\frac{\gamma}{2} = \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ и, следовательно,

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2} = a$$

или

$$\frac{1}{2}\left[\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right]\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = a,$$

откуда получаем

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - \cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} = 2a.$$

Выделим в левой части последнего равенства полный квадрат:

$$\frac{1}{4}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} - \left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 = 2a.$$

Тогда

$$\frac{1}{4}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}-2a=\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2$$

и так как правая часть неотрицательна, то

$$\frac{1}{4}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}-2a\geqslant 0,$$

откуда

$$a\leqslant\frac{1}{8}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\leqslant\frac{1}{8}.$$

Заменив a его первоначальным значением, получим искомое неравенство

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\leqslant\frac{1}{8},$$

причем знак равенства достигает при $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$.

§ 73. Обратные тригонометрические функции

Функция $y=\operatorname{Arcsin}x$. Для тригонометрической функции $y=\sin x$, рассматриваемой в интервале $-\infty<x<+\infty$, переход к однозначной обратной функции невозможен, так как одному значению y соответствует множество значений аргумента x. Поэтому обратная функция $y=\operatorname{Arcsin}x$ при каждом значении x, лежащем на отрезке $-1\leqslant x\leqslant+1$, имеет бесчисленное множество значений.

При изучении функции, обратной синусу, выбирают отрезок $\left[-\frac{\pi}{2};\ +\frac{\pi}{2}\right]$, на котором функция $y=\sin x$ возрастает, и рассматривают соответствующую этому отрезку обратную функцию $y=\arcsin x$, которую называют *главным значением функции* $\operatorname{Arcsin}x$ (см. § 85).

Обратной тригонометрической функцией $y=\arcsin x$ называют дугу (угол) y, взятую на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}\right.$ до $\left.+\frac{\pi}{2}\right]$, синус которой равен x. Другими словами, равенства

$$y=\arcsin x \text{ и } \sin y=x$$

эквивалентны.

Основные свойства функции $y=\arcsin x$:

1. Функция $y=\arcsin x$ определена на отрезке $-1\leqslant x\leqslant+1$.
2. На отрезке $-1\leqslant x\leqslant+1$ функция $y=\arcsin x$ возрастает от

$$-\frac{\pi}{2}\text{ до }+\frac{\pi}{2},\text{ т. е. }-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin x\leqslant+\frac{\pi}{2}.$$

3. $y=\arcsin x$ функция нечетная, т. е. $\arcsin(-x)=-\arcsin x$.
4. Все значения дуг (углов), синус которых равен x, определяются формулой

$$\operatorname{Arcsin}x=(-1)^n\arcsin x+\pi n, \tag{94}$$

где $n=0;\pm1;\pm2\cdot\pm3;\ldots$

График функции $y = \arcsin x$ приведен на рис. 83, а график функции $y = \operatorname{Arcsin} x$ — на рис. 84.

Функция $y = \operatorname{Arccos} x$. *Обратной тригонометрической функцией* $y = \arccos x$ называют дугу (угол) y, взятую на отрезке $[0; +\pi]$, косинус которой равен x, т. е. равенства

$$y = \arccos x \quad \text{и} \quad \cos y = x,$$

эквивалентны.

Основные свойства функции $y = \arccos x$:

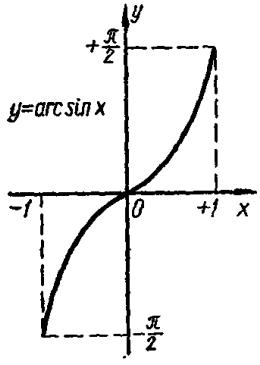


Рис. 83.

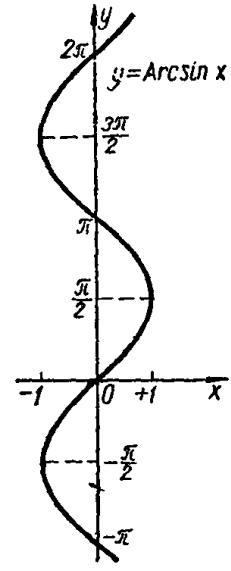


Рис. 84.

1. Функция определена на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant +1$.
2. На отрезке $-1 \leqslant x \leqslant +1$ функции убывает от π до 0, т.е. $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$.
3. Для $\arccos x$ имеет место равенство $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$, т. е. свойством четности или нечетности эта функции не обладает.
4. Функция $y = \arccos x$ называется главным значением функции $y = \operatorname{Arccos} x$.

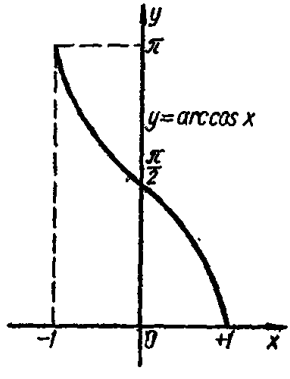


Рис. 85.

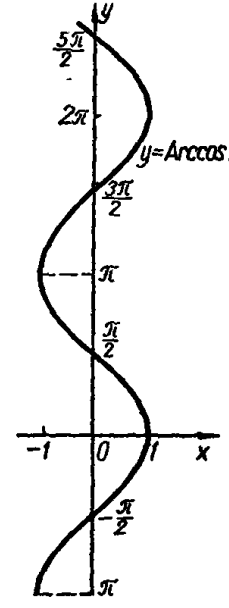


Рис. 86.

Все значения дуг (углов), косинус которых равен x, определяются формулой

$$\operatorname{Arccos} x = \pm \arccos x + 2\pi n, \qquad (95)$$

где $n = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \ldots$

Графики функций $y = \arccos x$ и $y = \operatorname{Arccos} x$ приведены на рис. 85 и 86.

Функции $y = \operatorname{Arctg} x$. *Обратной тригонометрической функцией* $y = \operatorname{arctg} x$ называют дугу (угол), взятую в промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которой равен x, т. е. равенства

$$y = \operatorname{arctg} x \text{ и } \operatorname{tg} y = x$$

эквивалентны.

Основные свойства функции $y = \operatorname{arctg} x$:

1. Функция определена на множестве всех действительных чисел, т. е. $-\infty < x < +\infty$.

2. В интервале $-\infty < x < +\infty$ функция возрастает от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$, т. е. $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < +\frac{\pi}{2}$.

3. $y = \operatorname{arctg} x$ — функция нечетная, т. е. $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$.

4. Функция $y = \operatorname{arctg} x$ называется главным значением функции $y = \operatorname{Arctg} x$.

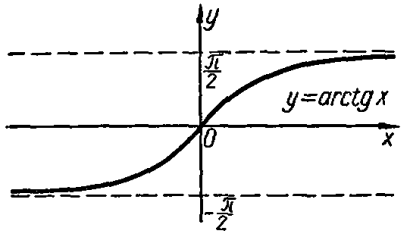


Рис. 87.

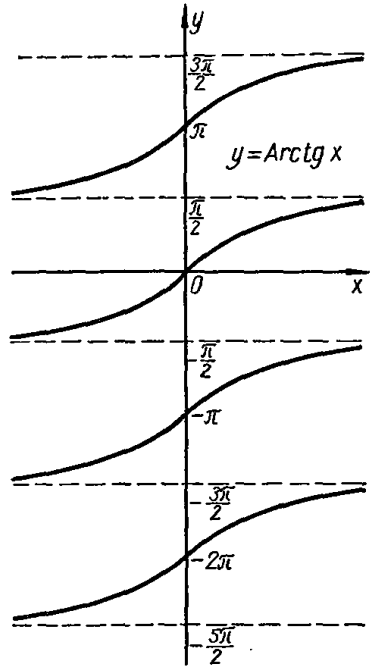


Рис. 88.

Все значения дуг (углов), тангенс которых равен x, определяются формулой

$$\operatorname{Arctg} x = \operatorname{arctg} x + \pi n, \qquad (96)$$

где $n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$

Графики функции $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{Arctg} x$ приведены на рис. 87 и 88.

Функции $y = \operatorname{Arcctg} x$. *Обратной тригонометрической функцией* $y = \operatorname{arcctg} x$ называется дуга (угол), взятая в промежутке $(0; \pi)$, котангенс которой равен x, т. е. равенства

$$y = \operatorname{arcctg} x \text{ и } \operatorname{ctg} y = x$$

эквивалентны.

Основные свойства функции $y = \operatorname{arcctg} x$:

1. Функция определена при всех действительных значениях x, т. е. $-\infty < x < +\infty$.

2. В интервале от $-\infty < x < +\infty$ функция убывает от π до 0, т. е. $0 < \operatorname{arcctg} x < \pi$.

3. Функция $y = \operatorname{arcctg} x$, как и функция $y = \arccos x$, не обладает ни свойством четности, ни свойством нечетности, но для нее справедливо равенство $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$.

4. Функцию $y = \operatorname{arcctg} x$ называют главным значением функции $y = \operatorname{Arcctg} x$. Все значения дуг (углов), котангенс которых равен x, определяются формулой

$$\operatorname{Arcctg} x = \operatorname{arcctg} x + \pi n, \quad \text{где} \quad n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots \quad (97)$$

Графики функций $y = \operatorname{arcctg} x$ и $y = \operatorname{Arcctg} x$ приведены на рис. 89 и 90.

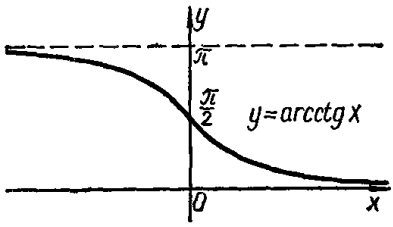


Рис. 89.

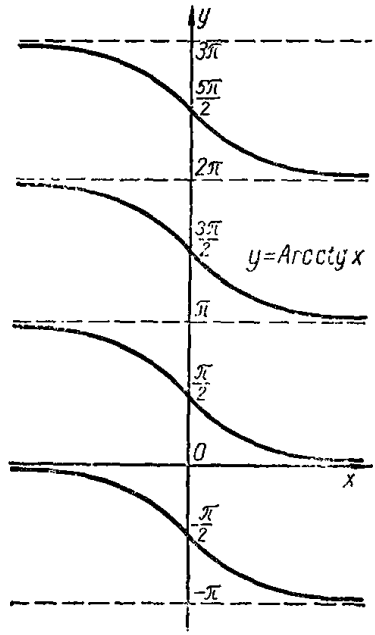


Рис. 90.

Основные соотношении дли обратных тригонометрических функций:

А.

$$\sin(\arcsin x) = x, \quad \text{если} \quad -1 \leqslant x \leqslant +1; \quad (98)$$

$$\cos(\arccos x) = x, \quad \text{если} \quad -1 \leqslant x \leqslant +1; \quad (99)$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x, \quad \text{если} \quad -\infty < x < +\infty; \quad (100)$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x, \quad \text{если} \quad -\infty < x < +\infty. \quad (101)$$

Б.

$$\arcsin(\sin x) = x, \quad \text{если} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant +\frac{\pi}{2}; \quad (102)$$

$$\arccos(\cos x) = x, \quad \text{если} \quad 0 \leqslant x \leqslant +\pi; \quad (103)$$

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x, \quad \text{если} \quad -\frac{\pi}{2} < x < +\frac{\pi}{2}; \quad (104)$$

$$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x, \quad \text{если} \quad 0 < x < +\pi. \quad (105)$$

В.

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad \text{если } -1 \leqslant x \leqslant +1; \tag{106}$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad \text{если } -\infty < x < +\infty. \tag{107}$$

Г.

$$\arcsin x = \arccos\sqrt{1-x^2} = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \tag{108}$$

если $0 < x < +1$;

$$\arccos x = \arcsin\sqrt{1-x^2} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \operatorname{arcctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{109}$$

если $0 < x < +1$.

$$\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg}\frac{1}{x} = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \tag{110}$$

если $0 < x < +\infty$;

$$\operatorname{arcctg} x = \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \arcsin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \tag{111}$$

если $0 < x < +\infty$.

Д.

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x; \tag{112}$$

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x; \tag{113}$$

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x; \tag{114}$$

$$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x. \tag{115}$$

Формулы сложения и вычитания для обратных тригонометрических функций.

$$\arcsin x + \arcsin y =$$

$$= \begin{cases} \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right), & \text{если } xy \leqslant 0 \text{ или } x^2+y^2 \leqslant 1, \\ \pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right), & \text{если } x>0,\ y>0 \text{ и } x^2+y^2>1 \\ -\pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right), & \text{если } x<0,\ y<0 \text{ и } x^2+y^2>1. \end{cases} \tag{116}$$

$$\arcsin x - \arcsin y =$$

$$= \begin{cases} \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right), & \text{если } xy \geqslant 0 \text{ или } x^2+y^2 \leqslant 1, \\ \pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right), & \text{если } x>0,\ y<0 \text{ и } x^2+y^2>1, \\ -\pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right), & \text{если } x<0,\ y>0 \text{ и } x^2+y^2>1. \end{cases} \tag{117}$$

$$\arccos x + \arccos y =$$

$$\begin{cases} \arccos\left(xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right), & \text{если } x+y \geqslant 0, \\ 2\pi - \arccos\left(xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right), & \text{если } x+y<0. \end{cases} \tag{118}$$

$$\arccos x - \arccos y =$$

$$= \begin{cases} -\arccos\left(xy + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right), & \text{если } x \geqslant y, \\ +\arccos\left(xy + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right), & \text{если } x<y. \end{cases} \tag{119}$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y =$$

$$= \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}, & \text{если } xy<1, \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}, & \text{если } x>0 \text{ и } xy>1, \\ -\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}, & \text{если } x<0 \text{ и } xy>1. \end{cases} \tag{120}$$

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y =$$

$$= \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{x-y}{1+xy}, & \text{если } xy>-1, \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{x-y}{1+xy}, & \text{если } x>0 \text{ и } xy<-1, \\ -\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{x-y}{1+xy}, & \text{если } x<0 \text{ и } xy<-1. \end{cases} \tag{121}$$

Формулы удвоения для обратных тригонометрических функций.

$$2\arcsin x = \begin{cases} \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right), & \text{если } |x| \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \pi - \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right), & \text{если } \dfrac{+\sqrt{2}}{2} < x \leqslant +1, \\ -\pi - \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right), & \text{если } -1<x<-\dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases} \tag{122}$$

$$2\arccos x = \begin{cases} \arccos(2x^2-1), & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant +1, \\ 2\pi - \arccos(2x^2-1), & \text{если } -1 \leqslant x<0. \end{cases} \tag{123}$$

$$2\operatorname{arctg} x = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2}, & \text{если } |x|<1, \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2}, & \text{если } x>+1, \\ -\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2}, & \text{если } x<-1. \end{cases} \tag{124}$$

Рассмотрим несколько упражнений на обратные тригонометрические функции.

Пример 1. Показать, что

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{7} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}.$$

Учитывая, что $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}<1$, и $\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{8}<1$, произведем, согласно формуле (120), сложение:

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{5}=\operatorname{arctg}\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}}=\operatorname{arctg}\frac{4}{7},$$

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}=\operatorname{arctg}\frac{\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{8}}=\operatorname{arctg}\frac{3}{11}.$$

Тогда

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{5}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}=\operatorname{arctg}\frac{4}{7}+\operatorname{arctg}\frac{3}{11}=$$

$$=\operatorname{arctg}\frac{\frac{4}{7}+\frac{3}{11}}{1-\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{11}}=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}\left(\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{11}<1\right),$$

что и требовалось доказать.

Пример 2. Показать, что

$$\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}-\arccos\frac{1+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}.$$

Так как $\sqrt{\frac{2}{3}}<\frac{1+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}$, то применяя формулу (119), получим

$$\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}-\arccos\frac{1+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}=\arccos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}+\right.$$

$$\left.+\sqrt{\left(1-\frac{2}{3}\right)\left(1-\frac{7+2\sqrt{6}}{12}\right)}\right)=\arccos\left(\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{6}+\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{6}\right)=\arccos\frac{(2\sqrt{3}+\sqrt{2})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{6}=$$

$$=\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6},$$

что и требовалось доказать.

Пример 3. Доказать, что

$$\arccos x=\begin{cases}\arcsin\sqrt{1-x^2}, & \text{если } 0\leqslant x\leqslant+1,\\ \pi-\arcsin\sqrt{1-x^2}, & \text{если } -1\leqslant x<0.\end{cases}$$

Обозначим $\arccos x=\alpha$, тогда $\cos\alpha=x$, причем $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$. Зная $\cos\alpha=x$, найдем

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}\quad\text{или}\quad\sin\alpha=\sqrt{1-x^2}.$$

Далее имеем

$$\arcsin(\sin\alpha) = \arcsin\sqrt{1-x^2}.$$

Теперь рассмотрим два случая:

Если $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, т. е. $0 \leqslant x \leqslant +1$, то согласно формуле (102)

$$\arcsin(\sin\alpha) = \alpha,$$

и тогда $\alpha = \arcsin\sqrt{1-x^2}$.

Учтя введенное нами обозначение, получаем

$$\alpha = \arccos x = \arcsin\sqrt{1-x^2}.$$

Если $\frac{\pi}{2} < \alpha \leqslant \pi$, т. е. $-1 \leqslant x < 0$, то по формулам приведения произведем замену $\sin\alpha = \sin(\pi - \alpha)$, где $0 \leqslant \pi - \alpha < \frac{\pi}{2}$. Тогда

$$\arcsin(\sin\alpha) = \arcsin[\sin(\pi-\alpha)] = \pi - \alpha$$

или $\pi - \alpha = \arcsin\sqrt{1-x^2}$, откуда получаем

$$\alpha = \arccos x = \pi - \arcsin\sqrt{1-x^2}.$$

Таким образом,

$$\arccos x = \begin{cases} \arcsin\sqrt{1-x^2}, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant +1, \\ \pi - \arcsin\sqrt{1-x^2}, & \text{если } -1 \leqslant x < 0, \end{cases}$$

что и требовалось доказать.

Пример 4. Решить уравнение

$$\operatorname{arctg} 3^x - \operatorname{arctg} 3^{-x} = \frac{\pi}{6}.$$

Учитывая, что согласно формулам (111) и (107)

$$\operatorname{arctg} 3^{-x} = \operatorname{arcctg}\frac{1}{3^x} = \operatorname{arctg} 3^x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 3^x,$$

получим $\operatorname{arctg} 3^x - \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 3^x\right) = \frac{\pi}{6}$.

После очевидных упрощений имеем

$$2\operatorname{arctg} 3^x = \frac{2\pi}{3} \quad \text{или} \quad \operatorname{arctg} 3^x = \frac{\pi}{3}$$

и, следовательно,

$$3^x = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}, \text{ т. е. } 3^x = 3^{\frac{1}{2}}; \quad x = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $x = \frac{1}{2}$.

Пример 5. Решить неравенство $\arcsin x - 2\arccos x > \frac{\pi}{3}$.

После замены в левой части неравенства

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x,$$

иаходим, что $3\arcsin x > \frac{4\pi}{3}$ или $\arcsin x > \frac{4\pi}{9}$, откуда получаем окончательный ответ:

$$\sin\frac{4\pi}{9} < x \leqslant +1.$$

Пример 6. Решить уравнение $\sin(5\operatorname{arctg} 3x) = 1$.

Обозиачим $5\operatorname{arctg} 3x = t$, тогда

$$-\frac{5\pi}{2} < t < +\frac{5\pi}{2},$$

и данное уравнение принимает вид $\sin t = 1$, откуда

$$t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad \text{где } n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$$

Найдем, при каких значениях n величина t будет удовлетворять условию $-\frac{5}{2}\pi < t < +\frac{5}{2}\pi$.

Решив иеравенство

$$-\frac{5}{2}\pi < \frac{\pi}{2} + 2\pi n < +\frac{5}{2}\pi,$$

получим $-6 < 4n < 4$ или $-\frac{3}{2} < n < 1$, т. е. $n = -1; 0$.

А. При $n = -1$ находим $t = \frac{\pi}{2} - 2\pi = -\frac{3\pi}{2}$, так что $5\operatorname{arctg} 3x = -\frac{3\pi}{2}$ или $\operatorname{arctg} 3x = -\frac{3\pi}{10}$; следовательно, $3x = -\operatorname{tg}\frac{3\pi}{10}$, $x = x_1 = -\frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{3\pi}{10}$.

Б. При $n = 0$ находим $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot 0 = \frac{\pi}{2}$; тогда

$$5\operatorname{arctg} 3x = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{arctg} 3x = \frac{\pi}{10}.$$

Следовательно,

$$3x = \operatorname{tg}\frac{\pi}{10} \text{ или } x = x_2 = \frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{\pi}{10}.$$

Ответ: $x_1 = -\frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{3\pi}{10} = -\frac{1}{3}\operatorname{tg} 54^\circ \approx \frac{-1{,}37638}{3} = -0{,}45879;$

$$x_2 = +\frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{\pi}{10} = +\frac{1}{3}\operatorname{tg} 18^\circ \approx \frac{+0{,}32492}{3} = +0{,}10831.$$

В заключение данного параграфа отметим, что обратные тригонометрические функции часто называют также *обратными круговыми функциями.*

Функции натурального аргумента

§ 74. Числовые последовательности

Определения. *Числовой последовательностью* называют функцию, заданную на множестве натуральных чисел. Числа, входящие в состав числовой последовательности, называют ее *членами**.

Последовательность часто задают такой записью:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

x_n называют общим членом последовательности.

Последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ кратко обозначается знаком $\{x_n\}$.

Примеры последовательностей:

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots;$$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots;$$

$$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \ldots;$$

$$+1, -1, +1, \ldots, +1, -1, \ldots;$$

$$2, 2, 2, \ldots, 2, \ldots$$

Последняя последовательность является примером *постоянной* последовательности. Если в последовательности есть последний член, то она называется *конечной*. Если последовательность имеет бесконечное множество членов, она называется *бесконечной*. Конечная последовательность может быть задана перечислением членов. Чтобы задать бесконечную последовательность $\{x_n\}$, нужно указать правило, по которому любому натуральному числу n можно привести в соответствие некоторое число x_n.

Как и функцию от действительного аргумента, последовательность можно задать с помощью формулы, табличным и графическим способами.

Например, последовательность нечетных натуральных чисел можно задать в виде формулы общего члена

$$x_n = 2n - 1$$

или в виде таблицы

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, \ldots$$

---

* В математике различают последовательности и числовые последовательности. Членами последовательности могут быть любые предметы: линии, фигуры и т. д. Членами числовой последовательности являются только числа. Однако дальше мы будем рассматривать только числовые последовательности и для краткости их будем называть просто последовательностями.

Можно задать ее также в виде графика, состоящего из изолированных друг от друга точек (рис. 91).

Можно задать эту последовательность и с помощью точек на числовой оси (рис. 92). Постоянной последовательности на числовой прямой соответствует одна точка. Последовательность

$$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \ldots$$

на числовой оси изображается так, как показано на рис. 93.

От задания последовательности с помощью формулы нетрудно перейти к табличному или графическому способу ее задания.

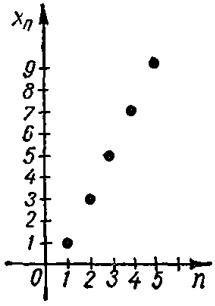


Рис. 91.

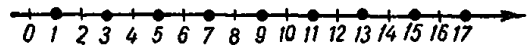


Рис. 92.

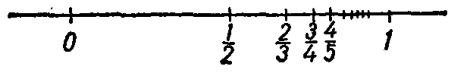


Рис. 93.

Пример 1. Если $x_n = n + (-1)^n$, то, полагая $n = 1, 2, 3, \ldots$, получим последовательность

$$0, 3, 2, 5, 4, 7, \ldots$$

Пример 2. Если

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{для нечетных } n, \\ \dfrac{n}{n+1} & \text{для четных } n, \end{cases}$$

то, полагая $n = 1, 2, 3, \ldots$, получим $1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{5}, \ldots$ Однако, если последовательность задана в виде таблицы, иногда очень трудно определить аналитическое выражение ее. Например, для последовательности простых чисел

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots$$

вообще не известен общий член, несмотря на то, что многие математики упорно искали его на протяжении многих веков.

Предел последовательности. Число a называется пределом последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ (записывают $\lim x_n = a$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует число N, зависящее от ε, такое, что $|x_n - a| < \varepsilon$ при всех $n > N$.

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*, а не имеющая предела — *расходящейся*. Последовательность не может иметь более одного предела. Предел последовательности не изменится, если в начале ее приписать или исключить несколько членов.

Если последовательность имеет предел, это значит, что она изображается такими точками на числовой оси, которые, начиная с некоторой, лежат в произвольно малом отрезке, окружающем точку a: $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$. Так, например, если построить последовательность

$$x_1=\frac{1}{2},\quad x_2=1-\frac{1}{3},\quad x_3=1-\frac{1}{4},\ \ldots,\ x_n=1-\frac{1}{n+1},\ \ldots$$

и окружить точку $x=1$ отрезком длины 2ε так, чтобы эта точка находилась в середине отрезка, то все точки $x_n=1-\frac{1}{n+1}$ войдут

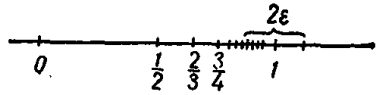


Рис. 94.

в этот отрезок (рис. 94), если только $n+1>\frac{1}{\varepsilon}$, т. е. если $n>\frac{1}{\varepsilon}-1$.

Если последовательность, имеющую пределом число a, изобразить графически в прямоугольной системе координат, получим совокупность точек, все время приближающихся к прямой $y=a$. Так,

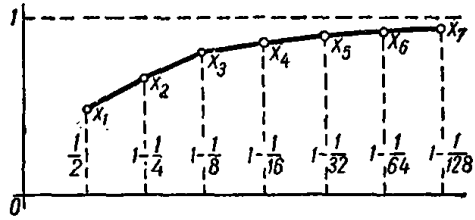


Рис. 95.

последовательность $x_n=1-\frac{1}{2^n}$, изображенная на рис. 95, стремится слиться с прямой $y=1$, т. е. она имеет пределом 1. В этом легко убедиться, оценив разность

$$x_n-1=\left(1-\frac{1}{2^n}\right)-1=-\frac{1}{2^n}$$

по абсолютной величине. Имеем

$$|x_n-1|=\frac{1}{2^n}.$$

Тогда $|x_n-1|<\varepsilon$, если $\frac{1}{2^n}<\varepsilon$, т. е. при n, удовлетворяющем неравенству $2^n>\frac{1}{\varepsilon}$.

Относительно последовательностей верны следующие утверждения.

1. Если последовательность $\{x_n\}$ сходится к пределу a и $a>b$ $(a<b)$, то существует такой номер N, что для всех $n>N$ верно неравенство $x_n>b$ $(x_n<b)$.

2. Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходящиеся и всегда $x_n \geqslant y_n$, то $\lim x_n \geqslant \lim y_n$.

3. Если для последовательностей $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$ всегда верны неравенства $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ и $\lim x_n = \lim z_n = a$, то и $\lim y_n = a$.

Пример 1. Показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{n+1} = 2$.

Составим разность $\dfrac{2n+1}{n+1} - 2 = -\dfrac{1}{n+1}$.

Оценив эту разность по абсолютной величине, получим

$$\left|\frac{2n+1}{n+1} - 2\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon, \quad \text{если } n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 = N.$$

Таким образом, для каждого положительного числа ε найдется число $N = \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$ такое, что при $n>N$ будет справедливо требуемое неравенство. Следовательно, число 2 является пределом последовательности

$$\left\{\frac{2n+1}{n+1}\right\}.$$

Пример 2. Показать, что последовательность $\{x_n\} = \{(-1)^n\}$ не имеет предела.

Предположим противное, что $\{x_n\}$ имеет пределом a. Возьмем, например, $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, тогда по определению должно существовать такое натуральное число N, что при $n>N$ будет $|x_n - a| < \dfrac{1}{2}$. Но среди значений $n>N$ всегда будут как четные, так и нечетные; если $n = 2k$, то $x_n = 1$, а если $n = 2 \cdot k + 1$, то $x_n = -1$. Тогда имеют место неравенства

$$|1 - a| < \frac{1}{2}, \quad |a(-1)| < \frac{1}{2},$$

но в таком случае

$$2 = |(1-a) + (1+a)| \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

что невозможно, и предположение неверно; значит, последовательность $\{x_n\} = \{(-1)^n\}$ не имеет предела.

Ограниченные и неограниченные последовательности. Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной сверху (снизу), если все члены ее меньше (больше) некоторого числа.

Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной, если она ограничена и сверху и снизу, т. е. если существуют такие числа m и M, что для всех n

$$m < x_n < M.$$

Все члены ограниченной последовательности $\{x_n\}$ по своей абсолютной величине меньше некоторого числа: $|x_n| < A$.

Последовательность, имеющая предел, ограничена.

Последовательность $x_1 = 0;\ x_2 = 0{,}3;\ x_3 = 0{,}33, \ldots$ ограничена, так как $|x_n| < 1$.

Последовательность $x_n = (-1)^n$ также ограничена, так как $|x_n| = 1$.

Примеры. Последовательность $\{x_n = n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ не ограничена сверху, так как не существует такого числа M, чтобы все члены последовательности оставались меньше этого числа.

Последовательность с общим членом $x_n = -n$ не ограничена снизу.

Бесконечная последовательность $\{x_n\}$ называется неограниченной, если для всякого наперед заданного числа A существует такое n, что $|x_n| > A$.

Если для любого положительного числа A можно указать такое число N, что при $n > N$, $x_n > A$, то говорят, что x_n стремится к плюс бесконечности, и это записывают так:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = +\infty, \quad \text{или } x_n \to +\infty.$$

Если для любого отрицательного числа A можно указать такое натуральное число N, что при $n > N$ выполняется неравенство $x_n < A$, то считают, что x_n стремится к минус бесконечности и записывают

$$\lim_{n \to \infty} x_n = -\infty, \quad \text{или } x_n \to -\infty.$$

Монотонные последовательности. Последовательность $\{x_n\}$ называется *возрастающей* (убывающей), если каждый последующий член ее больше (меньше) предыдущего, т. е. если

$$x_{n+1} > x_n \ (x_{n+1} < x_n).$$

Последовательность $\{x_n\}$ называется *неубывающей* (невозрастающей), если каждый последующий член ее не меньше (не больше) предыдущего, т. е. если

$$x_{n+1} \geqslant x_n \ (x_{n+1} \leqslant x_n).$$

Последовательности возрастающие, убывающие, невозрастающие и неубывающие называются *монотонными*.

Пример 1. Показать, что последовательность $x_n = \dfrac{n}{n+1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ возрастающая.

Надо показать, что для каждого n

$$x_{n+1} > x_n, \text{ или } x_{n+1} - x_n > 0.$$

Действительно,

$$x_{n+1} - x_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0.$$

Для монотонных последовательностей справедлива теорема:

если монотонно возрастающая последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху, то она имеет предел, в противном случае она стремится

к $+\infty$. *Монотонно убывающая последовательность* $\{x_n\}$, *ограниченная снизу, имеет конечный предел, в противном случае она стремится к* $-\infty$.

Действия с последовательностями. Теоремы о пределах. Суммой, разностью, произведением и частным двух последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ называются соответственно последовательности $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$, $\{x_n y_n\}$ и $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$, причем в последнем случае предполагается, что последовательность $\{y_n\}$ не содержит нулей.

Для сходящихся последовательностей справедливы теоремы: *если последовательности* $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходящиеся, то сходящимися будут также последовательности $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$, $\{x_n \cdot y_n\}$ и $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$. В последнем случае предполагается, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$.

Верны следующие формулы:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n;$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} y_n;$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} \quad (\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0).$$

Эти равенства читаются так:

предел суммы, разности, произведения и частного двух последовательностей, имеющих пределы, равен соответственно сумме, разности произведению и частному пределов этих последовательностей. При этом в последнем случае (для частного) предполагается, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$.

Пример. Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{2}{3}$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \frac{1}{2}$ (n — натуральное число). Найти пределы последовательностей

$$\left\{3x_n + \frac{y_n}{2}\right\}, \quad \left\{\frac{2x_n - 4y_n}{y_n} + x_n\right\}.$$

Применяя теоремы о пределах сходящихся последовательностей, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\left(3x_n + \frac{y_n}{2}\right) = \lim_{n\to\infty}(3x_n) + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{y_n}{2}\right) = \lim_{n\to\infty} 3^* \cdot \lim_{n\to\infty} x_n +$$

$$+ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2} \cdot \lim_{n\to\infty} y_n = 3 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 2\frac{1}{4};$$

---

* $\lim\limits_{n\to\infty} 3$ следует рассматривать как предел последовательности 3, 3, ..., ..., 3, ..., а $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}$ как предел последовательности $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}, \ldots$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2x_n-4y_n}{y_n}+x_n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2x_n-4y_n}{y_n}+\lim_{n\to\infty}x_n=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}2\cdot\lim\limits_{n\to\infty}x_n-\lim\limits_{n\to\infty}4\cdot\lim\limits_{n\to\infty}y_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}+\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{2\cdot\frac{2}{3}-4\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}+$$

$$+\frac{2}{3}=-\frac{2}{3}.$$

§ 75. Арифметическая прогрессия

Определения. *Арифметической прогрессией* называется числовая последовательность, в которой каждое число, начиная со второго, равно предыдущему, сложенному с одним и тем же постоянным для этой последовательности числом (положительным или отрицательным).

Числа, составляющие прогрессию, называются ее членами. Арифметическую прогрессию записывают так:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$$

Общий член ее обозначают через a_n.

Число, которое надо прибавить к какому-нибудь члену, чтобы получить последующий, называется *разностью арифметической прогрессии;* ее обычно обозначают буквой d.

Пример 1. Последовательность чисел 10, 14, 18, 22, ..., $6+4n$, ... есть арифметическая прогрессия с разностью 4.

Пример 2. Последовательность чисел 1, —1, —3, ..., $3-2n$ есть арифметическая прогрессия с разностью —2.

Арифметическая прогрессия называется *возрастающей*, если всякий последующий член больше предыдущего (т. е. если $d>0$); и *убывающей*, если всякий последующий член меньше предыдущего ($d<0$).

Любой член арифметической прогрессии равен первому ее члену, сложенному с произведением разности прогрессии на число членов, предшествующих определяемому, т. е. он выражается формулой:

$$a_k=a_1+(k-1)d.$$

Всякий член арифметической прогрессии, начиная со второго, есть среднее арифметическое предыдущего и последующего членов, т. е.

$$a_k=\frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}.$$

Всякий член арифметической прогрессии, начиная со второго, есть среднее арифметическое членов, равноудаленных от него, т. е.

$$a_n=\frac{a_{n-k}+a_{n+k}}{2}.$$

Во всякой арифметической прогрессии $a_m+a_n=a_p+a_q$, если $m+n=p+q$. В частности, если прогрессия имеет конечное число

членов, то сумма двух членов, равноотстоящих от ее концов, равна сумме крайних членов, т.е.

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n.$$

Сумма n первых членов арифметической прогрессии выражается формулами

$$s_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}, \quad s_n = \frac{[2a_1 + d(n-1)]\,n}{2}.$$

Используя формулу суммы n первых членов прогрессии, можно вычислить суммы одинаковых степеней натуральных чисел:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2};$$

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Задачи на арифметическую прогрессию. Задача 1. Определить первый член и сумму членов арифметической прогрессии, в которой $n = 45$, $d = 10$, $a_n = 459$.

$$a_n = a_1 + d(n-1), \quad a_1 = a_n - d(n-1);$$
$$a_1 = 459 - 10 \cdot 44 = 459 - 440 = 19, \quad a_1 = 19;$$
$$s_n = \frac{(459 + 19)\,45}{2} = \frac{478 \cdot 45}{2} = 239 \cdot 45 = 10755.$$

Ответ. 19; 10755.

Задача 2. Определить число членов и сумму членов арифметической прогрессии, в которой

$$a_1 = 0, \quad d = \frac{1}{2}, \quad a_n = 5.$$

$$a_n = a_1 + d(n-1), \quad n - 1 = \frac{a_n - a_1}{d},$$

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1; \quad n = \frac{5-0}{\frac{1}{2}} + 1 = 10 + 1 = 11; \quad n = 11.$$

$$s_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(0+5) \cdot 11}{2} = \frac{55}{2} = 27\frac{1}{2}.$$

Ответ. 11; $27\frac{1}{2}$.

Задача 3. Между членами 7 и 35 поместить 6 чисел, которые с даными числами составили бы арифметическую прогрессию.

Из условия задачи следует, что $a_1 = 7$, $a_n = 35$, $n = 8$. Тогда из формулы $a_n = a_1 + d(n-1)$ имеем

$$d = \frac{a_n - a_1}{n-1} = \frac{35-7}{8-1} = 4.$$

Следовательно, находим прогрессию 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, где числа 11, 15, 19, 23, 27, 31 искомые.

Ответ. 11, 15, 19, 23, 27, 31.

Задача 4. Определить первый член, разность и число членов арифметической прогрессии, в которой $a_n = 55$, $a_2 + a_5 = 32{,}5$;

$$s_{15} = 412{,}5.$$

$$a_2 + a_5 = 32{,}5; \quad (a_1 + d) + (a_1 + 4d) = 32{,}5;$$

$$s_{15} = 412{,}5; \quad \frac{(a_1 + a_{15})\,15}{2} = 412{,}5.$$

После преобразований получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 2a_1 + 5d = 32{,}5, \\ 15a_1 + 105d = 412{,}5, \end{cases} \quad \text{откуда } d = 2{,}5; \quad a_1 = 10.$$

Тогда

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 = \frac{55 - 10}{2{,}5} + 1 = 19.$$

Ответ. 10; 2,5; 19.

§ 76. Геометрическая прогрессия

Общие сведения. *Геометрической прогрессией* называется такая числовая последовательность, в которой каждое число, начиная со второго, равняется предшествующему, умноженному на одно и то же число, постоянное для этой последовательности.

Числа, составляющие прогрессию, называются ее членами. Геометрическую прогрессию записывают так:

$$\therefore u_1, u_2, u_3, \ldots u_n, \ldots$$

Общий член прогрессии обозначают через u_n.

Число, на которое надо умножить любой член геометрической прогрессии, чтобы получить последующий, называется *знаменателем* геометрической прогрессии; он обозначается буквой q.

Отсюда следует, что частное от деления каждого члена геометрической прогрессии на предыдущий равно знаменателю прогрессии. Знаменатель прогрессии может быть и положительным, и отрицательным числом.

Пример 1. Последовательность 8, —16, 32, —64, 128, —256, 512, ... есть геометрическая прогрессия со знаменателем —2.

Пример 2. Последовательность $20, 10, 5, \frac{5}{2}, \ldots, 40 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n, \ldots$ есть геометрическая прогрессия со знаменателем $\frac{1}{2}$.

Всякий член геометрической прогрессии, начиная со второго, равен первому члену, умноженному на знаменатель прогрессии в степени, показатель которой равен числу членов, предшествующих определяемому, т. е. выражается формулой

$$u_n = u_1 q^{n-1}.$$

Отсюда следует, что геометрическую прогрессию, у которой первый член a, знаменатель q и число всех членов n, можно записать так:

$$u, uq, uq^2, \ldots, uq^{n-1}.$$

Всякий член геометрической прогрессии связан с предыдущим и последующим ему членами зависимостью

$$u_n = u_{n-1}u_{n+1}.$$

Во всякой геометрической прогрессии $u_m u_n = u_n u_q$, если $m + n = p + q$. В частности, если прогрессия имеет конечное число членов, то произведение двух членов, равноотстоящих от ее концов, равно произведению крайних членов.

Сумма членов геометрической прогрессии выражается формулой

$$S = \frac{u_n q - u_1}{q - 1} (q \neq 1), \quad \text{или} \quad S = \frac{u_1 - u_n q}{1 - q} (q \neq 1).$$

Бесконечная геометрическая прогрессия, знаменатель которой по абсолютной величине меньше 1, называется *бесконечно убывающей геометрической прогрессией*. Например:

$$16, 8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$$

$$-0{,}5, \quad -0{,}05, \quad -0{,}005, \quad -0{,}0005, \ldots$$

$$1, \quad -\frac{1}{3}, \quad \frac{1}{9}, \quad -\frac{1}{27}, \quad \frac{1}{81}, \quad -\frac{1}{243}, \ldots$$

Суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии называют предел суммы n ее первых членов при бесконечном возрастании n $(n \to \infty)$.

$$S = \frac{u_1}{1 - q} = \lim_{n \to \infty} (u_1 + u_2 + \cdots + u_n).$$

Следовательно, сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна частному от деления первого члена этой прогрессии на разность единицы и знаменателя прогрессии.

Задачи на геометрическую прогрессию. З а д а ч а 1. Определить первый член и сумму членов геометрической прогрессии, в которой

$$q = \frac{1}{2}, \quad n = 10, \quad u_{10} = 7.$$

Согласно формуле $u_n = u_1 q^{n-1}$, $u_{10} = u_1 q^9$. Отсюда

$$u_1 = \frac{u_{10}}{q^9} = \frac{7}{\left(\frac{1}{2}\right)^9} = 7 \cdot 2^9 = 7 \cdot 512 = 3584;$$

$$S = \frac{3584 - 7 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{3584 - 3{,}5}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 3580{,}5 = 7161.$$

О т в е т. 3584, 7161.

Задача 2. Найти геометрическую прогрессию, состоящую из 6 членов, зная, что сумма трех первых ее членов равна 168, а сумма трех последних 21,

$$a_1 + a_2 + a_3 = 168;$$
$$a_4 + a_5 + a_6 = 21,$$

или

$$a + aq + aq^2 = 168;$$
$$aq^3 + aq^4 + aq^5 = 21.$$

Отсюда

$$a(1 + q + q^2) = 168;$$
$$aq^3(1 + q + q^2) = 21.$$

Значит, $\frac{1}{q^3} = 8$, $q = \frac{1}{2}$. Тогда $a = 96$.

Ответ. $\pm$96, 48, 24, 12, 6, 3.

Задача 3. Найти три числа, образующие возрастающую геометрическую прогрессию, зная, что их сумма равна 26, сумма квадратов этих чисел 364.

Так как a_1, a_2, a_3 образуют геометрическую прогрессию, то $a_1 = a$, $a_2 = aq$, $a_3 = aq^2$. Тогда по условию имеем

$$a + aq + aq^2 = 26,$$
$$a^2 + a^2q^2 + a^2q^4 = 364.$$

Решив систему, получим $q_1 = 3$, $q_2 = \frac{1}{3}$ и $a = 2$. Так как прогрессия возрастающая, то ее знаменатель равен 3.

Ответ. 2, 6, 18.

Задача 4. Три положительных числа, дающие в сумме 21, составляют арифметическую прогрессию. Если к ним соответственно прибавить 2, 3 и 9, то полученные числа составят геометрическую прогрессию. Найти эти числа.

$$\pm a,\ a + d,\ a + 2d.$$
$$\pm a + 2,\ a + d + 3,\quad a + 2d + 9.$$

Согласно условию, имеем $a + a + d + a + 2d = 21$, или $3a + 3d = 21$, или $a + d = 7$;

$$\frac{a + 2d + 9}{a + d + 3} = \frac{a + d + 3}{a + 2}.$$

После преобразований получим $d^2 + 2d - 5a - 9 = 0$. Так как $a = 7 - d$, то $d^2 + 7d - 44 = 0$; $d_1 = 4$, $d_2 = -11$. Тогда $a_1 = 3$; $a_2 = 18$.

Второе значение не удовлетворяет условию задачи, так как оно приводит к числам 18, 7 и -4, а последнее из них отрицательное. Следовательно, $d = 4$ и $a = 3$. Тогда имеем такие числа: 3, 7, 11.

Ответ. 3, 7, 11.

Задача 5. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 12,5, а сумма первого и второго членов ее 12. Найти эту прогрессию.

По условию, $S = 12{,}5$; $u_1 + u_2 = 12$. Имеем:

$$u_1 + u_1q = 12;\ \ 12{,}5 = \frac{u_1}{1 - q}.$$

Исключив из этой системы u_1, получим квадратное уравнение.

Тогда $q = \pm\frac{1}{5}$; $u_1 = 12 : (1 + q) = 10$ или $u_1 = 15$.

Ответ. ∓ 10; 2; $\frac{2}{5}$; ... и

∓ 15; -3; $\frac{3}{5}$; ...

Исторические сведения о прогрессиях. Прогрессии встречаются уже у математиков глубокой древности — в папирусе Ахмеса, у Архимеда, у некоторых китайских математиков. Древние индийские математики также знали арифметическую и геометрическую прогрессии, а Брахмагупта (628 г. н. э.) рассматривал, кроме того, последовательности, построенные из квадратов и кубов чисел натурального ряда.

Само слово «прогрессия» было введено римскими математиками, его употреблял, в частности, Боециус (510 г. н. э.). При этом математики древности связывали между собой понятия «пропорции» и «прогрессии». Прилагая к пропорциям наименования арифметической, геометрической и гармонической, они считали, что пропорция является ничем иным, как четырехчленной прогрессией. Большинство из них давало лишь формулу суммы прогрессии, причем без доказательства; некоторые приводили также формулу для определения последнего члена арифметической прогрессии, также без доказательства. Правило для нахождения любого члена арифметической прогрессии было дано Кардаиом в 1539 г.

Формула для суммы членов геометрической прогрессии впервые в западноевропейской литературе встречается в книге Фибоначчи (1202 г.), затем ее приводит Пойербах (1460 г.). Формула эта для суммирования бесконечной прогрессии была обобщена французским математиком Виетой в 1590 г.

§ 77. Метод математической индукции

Во многих разделах современной математики используется метод доказательства, который называется *методом математической индукции*. В его основе лежит следующая аксиома индукции: *если некоторое утверждение справедливо для $n = 1$ и если из допущения справедливости его для какого-нибудь произвольного натурального $n = k$ следует справедливость его и для $n = k + 1$, то это утверждение справедливо для всякого натурального n.*

Пример 1. Доказать формулу общего члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + (n - 1)d$.

Доказательство. Она верна для $n = 1$, так как тогда будет $a_1 = a_1$. Предположим, что формула верна для $n = k$, т. е. $a_k = a_1 + (k - 1)d$. Тогда $a_{k+1} = a_k + d = a_1 + (k - 1)d + d = a_1 + kd$. Как видим, если формула верна для $n = k$, то она верна и для $n = k + 1$. Для $n = 1$ она верна. Следовательно, доказываемая формула верна при каждом натуральном значении n.

Пример 2. Доказать, что при любом n

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2.$$

Доказательство. При $n = 1$ это равенство верно: $1 = 1$.

Предположим, что оно верно при некотором произвольном $n = k$, т. е. что

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2.$$

Тогда, прибавив к обеим его частям одно и то же число $2R + 1$, получим

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2R + 1) = R^2 + 2k + 1,$$

или

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + [2(k + 1) - 1] = (k + 1)^2.$$

Итак, рассматриваемое равенство справедливо при $n = 1$, и из допущения справедливости его при $n = k$ вытекает, что оно справедливо и при $n = k + 1$. Следовательно, оно верно при каждом натуральном n.

Методом математической индукции можно доказывать и такие утверждения, которые при $n = 1$ не верны, но которые верны, начиная с некоторого натурального p, большего 1. При этом используют такое следствие из аксиомы индукции: если некоторое утверждение справедливо для $n = p$ и если из допущения справедливости его для какого-нибудь $n = k \geqslant p$ вытекает справедливость его и для $n = k + 1$, то это утверждение справедливо для всех натуральных чисел, начиная с p.

Пример 3. Доказать, что при всех $n \geqslant 5$ имеет место неравенство

$$2^n > n^2.$$

Доказательство. При $n = 5$ это неравенство верно, так как $32 > 25$.

Предположим, что при некотором произвольном $k \geqslant 5$ $2^k > k^2$, тогда должно быть верным также неравенство $2^k + 2^k > k^2 + k^2$. Но так как $2^k + 2^k = 2^{k+1}$ и при $k \geqslant 5$ $k^2 > 2k + 1$, то из предположения следует

$$2^{k+1} > k^2 + 2k + 1, \quad \text{или} \quad 2^{k+1} > (k + 1)^2.$$

Как видим, если данное неравенство верно при $n = k \geqslant 5$, то оно верно и при $n = k + 1$. При $n = 5$ оно верно. Следовательно, это неравенство справедливо при всех натуральных $n \geqslant 5$.

Пример 4. Доказать, что при натуральных a и $n \geqslant 2$ число $a^n + (a + 1)^{2n-3}$ делится на $a^2 + a + 1$.

Доказательство. Если $n = 2$, то $a^n + (a + 1)^{2n-3} = a^2 + a + 1$ делится на $a^2 + a + 1$.

Предположим, что $a^k + (a + 1)^{2k-3}$ делится на $a^2 + a + 1$, и докажем, что тогда $a^{k+1} + (a + 1)^{2(k+1)-3}$ делится на $a^2 + a + 1$.

Действительно, $a^{k+1} + (a + 1)^{2(k+1)-3} = a^k \cdot a + (a + 1)^{2k-3}(a + 1)^2 = a^k \cdot a + a \cdot (a + 1)^{2k-3} + (a + 1)^{2k-3}(a^2 + a + 1) = a[a^k + (a + 1)^{2k-3}] + (a + 1)^{2k-3}(a^2 + a + 1)$.

Первое слагаемое полученной суммы делится на $a^2 + a + 1$ по предположению, а второе потому, что имеет множитель $a^2 + a + 1$. Поэтому и $a^{k+1} + (a + 1)^{2(k+1)-3}$ делится на $a^2 + a + 1$.

Этим доказано, что если данное утверждение верно при $n = k \geqslant 2$, то оно также верно и при $n = k + 1$. Кроме того, как показано выше, оно верно и при $n = 2$. Следовательно, это утверждение справедливо при всех натуральных a и $n \geqslant 2$.

Иногда используют и такое следствие аксиомы математической индукции: *если некоторое утверждение справедливо для* $n = p$ *и если из допущения справедливости его для* $n = k \geqslant p$ *и* $n = k + 1$ *вытекает справедливость его и для* $n = k + 2$, *то это утверждение справедливо для всех натуральных* $n \geqslant p$.

Пример 5. Доказать, что при всех натуральных n число

$$u_n = \frac{(1 + \sqrt{5})^n + (1 - \sqrt{5})^n}{2^n}$$

целое.

Доказательство. Проверим сначала справедливость этого утверждения для n, равных 1 и 2.

Если $n = 1$, то $u_n = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5} + 1 - \sqrt{5}) = 1$ число целое.

Если $n = 2$, то $u_n = \frac{1}{4}(6 + 2\sqrt{5} + 6 - 2\sqrt{5}) = 3$ — тоже целое.

Покажем теперь, что если это число целое при $n = k$ и $n = k + 1$, то оно также целое и при $n = k + 2$. Очевидно, достаточно доказать, что $u_k + u_{k+1} = u_{k+2}$, так как сумма двух целых чисел — число целое.

$$u_k + u_{k+1} = \frac{1}{2^k}[(1 + \sqrt{5})^k + (1 - \sqrt{5})^k] \frac{1}{2^{k+1}}[(1 + \sqrt{5})^{k+1} +$$

$$+ (1 - \sqrt{5})^{k+1}] = \frac{1}{2^{k+1}}[(1 + \sqrt{5})^k (2 + 1 + \sqrt{5}) + (1 - \sqrt{5})^k (2 +$$

$$+ 1 - \sqrt{5})] = \frac{1}{2^{k+1}}\left[(1 + \sqrt{5})^k \frac{(1 + \sqrt{5})^2}{2} + (1 - \sqrt{5})^k \times\right.$$

$$\left. \times \frac{(1 - \sqrt{5})^2}{2}\right] = \frac{1}{2^{k+2}}[(1 + \sqrt{5})^{k+2} + (1 - \sqrt{5})^{k+2}] = u_{k+2}.$$

Итак, число u_n целое при $n = 1$ и $n = 2$ и, кроме того, из допущения, что оно целое при $n = k$ и $n = k + 1$ следует, что оно целое и при $n = k + 2$. Значит, число u_n целое при всех натуральных n.

III. ГЕОМЕТРИЯ

ПЛАНИМЕТРИЯ

§ 1. Предмет геометрии. Краткие сведения о ее развитии

В развитии геометрии (греческое γῆ — Земля и μετρέω — измеряю) как математической науки о пространственных формах, размерах и соотношениях геометрических образов (фигур, тел) можно выделить четыре основные периода, характеризующиеся существенными качественными изменениями.

Геометрия, как и всякая другая наука, возникла из практических потребностей человечества. Уже в древнем Египте, Вавилоне, Китае, Индии, Греции были известны многие геометрические факты и разработаны правила геометрических измерений.

Начало первого периода в развитии геометрии установить очень трудно — оно теряется в глубине веков и только известно, что самые древние, дошедшие до нас работы по геометрии относятся к XVII веку до н.э. Этот период характеризуется накоплением фактов и установлением первых простейших зависимостей между геометрическими образами.

В конце первого периода (примерно VI в. до н.э.) начальные сведения из Египта и Вавилона были перенесены в Грецию, где постепенно они начали оформляться в стройную систему строго доказываемых фактов.

Во втором периоде (VI в. до н.э.— XVII в. н.э.) краеугольным камнем геометрии как математической науки явились «Начала» Эвклида*, которые выдержали уже сотни изданий и переведены на все основные языки мира.

В этой фундаментальной научной работе, составляющей пятнадцать книг и написаиной Эвклидом около 300 лет до н.э., геометрия была систематизирована и изложена так, как ее в основном представляют и теперь, ограничиваясь, конечно, лишь элементарной геометрией. В «Началах» Эвклида геометрия развита в логической последовательности на основании четко сформулированных основных положений — аксиом и основных пространственных представлений: точка, прямая линия, плоскость, геометрическое тело.

* «Начала». Перевод с греч. и комментарии Д. Д. Мордухай-Болтовского, т. I—3, М.-Л., 1948—1950.

На протяжении двадцати столетий второго периода геометрия Эвклида обогащалась новыми фактами и методами, сохранив свои основные принципы до наших дней.

Началом третьего периода в развитии геометрии можно считать XVII век. С этого времени, после введения в геометрию в 1637 г. французским ученым и философом Рене Декартом (1596—1650) метода координат и переменной величины, геометрия развивается особенно бурно. Появляются такие разделы, как геометрия аналитическая (свойства линий, поверхностей и соотношения между ними изучаются с помощью исследования соответствующих уравнений в некоторой, чаще всего прямоугольной декартовой системе координат), геометрия дифференциальная (геометрические образы исследуются с помощью методов высшей математики), геометрия начертательная, геометрия проективная и др. На этом этапе развития геометрия использует уже существенно новые методы исследования, позволяющие глубоко изучать гораздо более общие геометрические образы.

Известно, что пятый постулат Эвклида не может быть логически выведен из остальных его аксиом. Тщетные попытки доказать его продолжались многие сотни лет. Выдающийся русский ученый Николай Иванович Лобачевский (1792—1856), избрав принципиально новый подход к этой сложной проблеме, открыл и строго изложил основные идеи совершенно новой неэвклидовой геометрии, развитой в дальнейшем другими математиками и играющей большую роль как для самой геометрии, так и для других наук.

Четвертый период развития геометрии начинается со времени открытия Н. И. Лобачевским в 1826 году новой геометрии, содержащей в себе как частный случай геометрию Эвклида.

Геометрия Лобачевского основывается на замене известного из школьного курса геометрии пятого постулата (аксиомы) Эвклида (через точку вне прямой на плоскости можно провести лишь одну прямую, параллельную данной) более общей аксиомой: через точку вне прямой на плоскости можно провести хотя бы две прямые, параллельные данной прямой.

По установившейся традиции начнем изложение с планиметрии (от лат. *planum* — плоскость и греч. μετρέω — измеряю), т. е. с раздела геометрии, в котором изучаются свойства фигур, расположенных в одной плоскости, а затем перейдем к геометрии в пространстве — стереометрии (от греч. στερεός — пространственный).

§ 2. Основные понятия

Элементарная геометрия изучает простейшие геометрические свойства объектов трехмерного пространства, т. е. пространства, в котором мы живем.

Первичные понятия — это такие простейшие понятия в математике, которые нельзя определить с помощью еще более простых.

Геометрическое тело, поверхность, линия, точка являются простейшими геометрическими образами — это понятия первичные.

Представление о геометрическом теле дает любой предмет, если рассматривать лишь его форму и размеры. Геометрическое тело имеет три измерения.

Поверхность можно представить как общую часть двух смежных областей пространства или как бесконечно тонкий слой, который разделяет две смежные части пространства. Поверхность не имеет толщины.

Линия представляется как общая часть (граница) двух смежных участков поверхности. В результате пересечения двух поверхностей мы получаем линию. Линия имеет лишь одно измерение — длину.

Точка отделяет смежные части линии.

Ясное представление о точках дают пересечения линий между собой и линий с поверхностью. Точка не имеет измерения.

Плоскость — частный вид поверхности, любая часть которой может быть совмещена с исходной плоскостью в любом ее месте как в прямом, так и в перевернутом виде (свойство прямого и перевернутого скольжения).

Никакая другая поверхность таким свойством не обладает. Например, часть сферической поверхности может скользить по этой же сфере, но без перевертывания. Часть эллипсоида вращения может скользить по этому эллипсоиду без перевертывания, но только в определенном направлении. В общем случае эллипсоидальная поверхность свойством скольжения не обладает.

Если через две точки плоскости провести прямую линию, то и все точки этой прямой будут находиться на плоскости. Прямая — частный вид линий. Представление о ней дает пересечение двух плоскостей.

Свойства прямой:

1. Через всякие две точки пространства можно провести прямую и притом только одну.

2. Если две прямые наложены одна на другую так, что какие-нибудь две точки одной прямой совпадают с двумя точками другой прямой, то эти прямые совпадают и во всех остальных точках.

3. Две прямые могут пересекаться лишь в одной точке.

4. Прямая обладает свойством скольжения — любой ее участок может скользить в обе стороны прямой бесконечно. Этим же свойством обладает еще только одна линия — окружность. Однако свойства 1—3 для окружности (полностью или частично не выполняются: через любые две точки пространства можно провести бесконечное число окружностей; две окружности могут иметь две общие точки, но не совпадать во всех остальных точках, две окружности могут соприкасаться в одной точке или пересекаться в двух точках.

Бесконечная прямая — прямая, продолжающаяся в обе стороны бесконечно. Обычно бесконечную прямую называют просто прямой.

Отрезок прямой — часть прямой, ограниченная с двух сторон точками.

Луч или *полупрямая* — часть прямой, ограниченная лишь с одной стороны, т. е. часть прямой, выходящей из заданной точки и уходящей в бесконечность в данном направлении.

Ломаная линия — линия, образуемая отрезками прямых, не лежащих на одной прямой и расположенных так, что конец первого отрезка служит началом второго, конец второго — началом третьего и т. д. Отрезки прямых, образующих ломаную, называются *сторонами (звеньями)* ломаной. Точки стыка отрезков называются *вершинами* ломаной. Ломаная линия называется *выпуклой*, если все ее звенья расположены по одну сторону от каждого входящего в ее состав отрезка, продолженного неограниченно в оба конца. Ломаная называется *замкнутой*, если концы ее сходятся в одну точку.

Точками самопересечения ломаной линии называются такие точки, в которых пересекаются ее звенья. Концы звеньев при этом не учитываются.

§ 3. Действия с отрезками

Равенство и неравенство отрезков. Два отрезка считаются *равными*, если при наложении они совмещаются всеми точками.

Если на данном отрезке взять две точки, из которых хотя бы одна не совпадает с его концом, то отрезок, ограниченный этими точками, называется частью отрезка. Если один отрезок равен части второго, то говорят, что первый меньше второго, а второй больше первого.

Отрезок считается *ориентированным*, если обусловлены его начало и конец.

Сложение и вычитание отрезков. *Сложением (вычитанием) отрезков* называется графическая операция, с помощью которой на некоторой прямой может быть построен отрезок, являющийся суммой слагаемых отрезков (или отрезок — разность отрезков уменьшаемого и вычитаемого). Сложение отрезков следует отличать от сложения длин отрезков. В результате сложения отрезков находим длину отрезка-суммы.

Суммой двух или нескольких отрезков называется отрезок, построенный на некоторой прямой по слагаемым без их взаимного наложения и без промежутков между ними (стыковка отрезков).

Сумма отрезков обладает переместительным и сочетательным свойствами.

Разностью двух стрезков называется отрезок, построенный путем наложения меньшего отрезка на больший так, чтобы начала или концы их совместились.

Пример 1. Найти (построить) отрезок $AB + NM + PQ$, где AB, NM и PQ — данные отрезки.

На произвольной прямой от некоторой точки R откладываем в любую сторону один из данных отрезков AB, NM и PQ. Далее на этой же прямой откладываем любой из оставшихся отрезков так, чтобы один из его концов совместился с каким-либо из концов отложенного отрезка, но без наложения этих отрезков. Таким же образом поступаем со следующим отрезком.

Пример 2. По данной сумме двух отрезков и одному из отрезков-слагаемых построить другой.

На отрезке-сумме от любого из концов отложим данный отрезок-слагаемое. Оставшийся отрезок будет искомым.

Умножение и деление отрезков на число. *Умножить* отрезок на целое положительное число n значит найти сумму n таких отрезков. Отрезок, полученный в результате, является отрезком-произведением.

Разделить отрезок на целое положительное число n значит найти такой отрезок, после умножения которого на число n получим данный отрезок.

Умножить отрезок на положительную рациональную дробь $\frac{m}{n}$ значит умножить этот отрезок на число m и полученный отрезок разделить на n частей.

Можно выполнить также сначала деление на n, а затем умножение на m.

Пример 3. Построить отрезок $\sqrt{n}$, где $n = 2; 3; 4; \ldots$

Выбрав произвольную единицу измерения, построим отрезок $AA_1 = 1$ и проведем $A_1A_2 \perp AA_1$, $A_1A_2 = 1$. Соединив точки A и A_2, проводим $A_2A_3 \perp AA_2$, $A_2A_3 = 1$. Далее аналогично $A_3A_4 \perp AA_3$, $A_3A_4 = 1$ и т. д.

Очевидно, что $AA_2 = \sqrt{2}$, $AA_3 = \sqrt{3}$, $AA_4 = \sqrt{4}$, ..., $AA_n = \sqrt{n}$.

При построении отрезков вида $a\sqrt{n}$ в качестве начального отрезка строим отрезок $AA_1 = a$ и т. д. (рис. 96).

Пример 4. Построить отрезок $\frac{a}{\sqrt{2}} + b\sqrt{5}$, если даны отрезки a и b.

Построим отрезки $MN = a\sqrt{2}$ и $PQ = b\sqrt{5}$. Далее к половине отрезка NM прибавляем отрезок PQ.

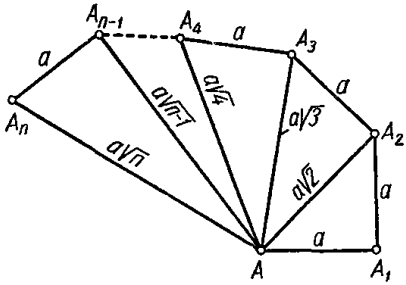


Рис. 96.

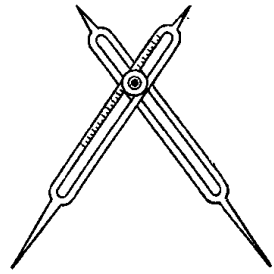


Рис. 97.

Для быстрого построения отрезков вида $a \cdot \frac{m}{n}$ по заданному отрезку a, т. е. для изменения длины заданного отрезка в данном отношении, существует специальный прибор — *пропорциональный циркуль*. Этот прибор состоит из двух равных по длине ножек с прорезями, дающими возможность изменять длину ножек, когда ослаблен скрепляющий винт (рис. 97).

Отношение расстояния между остриями верхних ножек к расстоянию между остриями нижних ножек равно отношению длины верхних ножек к длине нижних. Поэтому, установив по шкале винт так, чтобы длины верхних и нижних ножек находились в данном отношении и измерив нижними ножками данный отрезок, получаем искомый, равный расстоянию между концами верхних ножек.

Особенно удобно пользоваться пропорциональным циркулем, когда необходимо измерять в одном и том же отношении большое количество отрезков.

Пример 5. Доказать, что если данный отрезок AB произвольно разделить точкой O на две части AO и OB, то расстояние между серединами M и N отрезков AO и OB равно половине отрезка AB.

$$MN = MO + ON, \quad MO = AM, \quad ON = NB$$

(по условию). Тогда

$$AB = AM + MO + ON + NB = 2(MO + ON) = 2MN; \quad MN = \frac{1}{2}AB.$$

Соизмеримые и несоизмеримые отрезки. Измерение отрезков основано на утверждении, называемом *аксиомой Архимеда*:

Если даны два любых отрезка AB и $CD (AB > CD)$, то на прямой AB можно от точки A отложить отрезок CD последовательно столько

раз, что получится отрезок AN, больший или равный отрезку AB, т. е. можно найти такое целое число n, при котором будут выполнены неравенства $n \cdot CD \geqslant AB$, $(n-1)CD < AB$.

Это очевидное утверждение доказано быть не может и приято в качестве аксиомы.

Общей мерой двух отрезков называется отрезок, который содержится в каждом из данных целое число раз (без остатка).

Не всякие два отрезка имеют общую меру, например сторона и диагональ квадрата ее не имеют. Два отрезка, имеющие общую меру, называются *соизмеримыми*, а не имеющие ее — *несоизмеримыми*.

Длина отрезка. Измерить отрезок, соизмеримый с некоторым отрезком, принятым за единицу длины, значит узнать, сколько раз в нем содержится эта единица или какая-нибудь часть (доля) ее. Число, получаемое в результате измерения, определяет *длину отрезка*. Таким образом, длиной отрезка, соизмеримого с единицей длины, называется число, на которое надо умножить единицу длины, чтобы получить данный отрезок. Это число *рациональное*.

Если отрезок несоизмерим с единицей длины, то поступают так: от начальной точки данного отрезка откладывают на нем последовательно отрезок, равный единице длины, такое целое число a_1 раз, чтобы разность (остаток) между данным отрезком и произведением единицы длины на a_1 была меньше единицы длины. Затем на остатке откладывают 1/10 единицы длины такое целое число a_2 раз, чтобы разность между данным отрезком и произведением единицы длины на десятичную дробь a_1, a была меньше 1/10 единицы длины. Теоретически этот процесс никогда не закончится, так как отрезок несоизмерим с единицей. Следовательно, получится бесконечная десятичная дробь, для вычисления любого десятичного знака которой указано правило. Она не может быть периодической, потому что в противном случае ее можно было бы привести к простой дроби и данный отрезок оказался бы соизмеримым с единицей. Построенная бесконечная дробь и называется длиной данного отрезка, несоизмеримого с единицей. Это число *иррациональное*. Числа a_1; a_1, a_2; a_1, a_2, a_3 и т. д. называются приближенными значениями длины отрезка с точностью до 1; 0,1; 0,01 и т. д. Например, длина диагонали квадрата со стороной единица выражается иррациональным числом $\sqrt{2} = 1{,}41421356237309...$

Отношение отрезков. *Отношением двух отрезков* называется отношение их длин, измеренных с помощью одной и той же единицы длины. Если отрезки AB и CD имеют длины m и n, это записывают так: $\frac{AB}{CD} = \frac{m}{n}$. В частности, отношение отрезка к единице длины численно равно длине отрезка. Отношение двух отрезков не зависит от единицы измерения.

Равенство двух отношений называется *пропорцией*. Две пары отрезков называются *пропорциональными*, если отношение отрезков одной пары равно отношению отрезков другой пары.

Отрезок a называется *средним пропорциональным* отрезком b и c, если

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{a}.$$

Пример 6. Отрезок длиной 24 *см* разделен на три равные части. Найти расстояние между серединами первой и третьей частей.

Расстояние между серединами первой и третьей частей будет равно длине отрезка без суммы длин двух половин третьей части всего отрезка, т. е. равно длине всего отрезка без его третьей части. Следовательно, расстояние между указанными серединами равно $24\ см - \frac{24}{3}\ см = 16\ см$.

§ 4. Деление отрезка в заданном отношении

Делением отрезка AB некоторой точкой N в данном отношении $\frac{m}{n}$ называется такое деление, при котором отношение образующихся в результате отрезков AN и BN равно данному отношению, т. е. имеет место пропорция

$$\frac{AN}{BN} = \frac{m}{n}.$$

Деление в заданном отношении называется *внутренним*, если точка N лежит внутри отрезка AB, и *внешним* — если точка N лежит на продолжении отрезка AB (рис. 98, *а*).

Пример. Данный отрезок AB разделить внешним образом в отношении $\frac{3}{2}$.

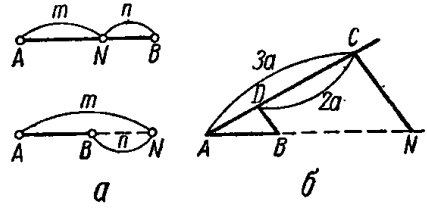


Рис. 98.

Проводим через точку A произвольную прямую и на ней от точки A откладываем отрезок $AC = 3a$, где a — произвольный отрезок. Далее от точки C в сторону точки A откладываем отрезок $CD = 2a$ (рис. 98,*б*).

Проводим отрезки DB и $CN \parallel DB$. Точка N и будет искомой, т. е. она делит по определению данный отрезок AB внешним образом в заданном отношении, так как

$$\frac{AN}{BN} = \frac{AC}{DC} = \frac{3a}{2a} = \frac{3}{2}.$$

§ 5. Деление отрезка в среднем и крайнем отношении. Золотое сечение

Делением отрезка AB точкой N в среднем и крайнем отношении называется такое деление, при котором полученные после деления отрезки удовлетворяют равенству

$$AN : BN = AB : AN,$$

т. е. отрезок AN является средним пропорциональным между отрезком BN и всем отрезком AB.

Отрезок AN, удовлетворяющий этому условию, определяется по данному отрезку AB с помощью формулы

$$AN = \frac{\sqrt{5}-1}{2} AB,$$

полученной из квадратного относительно AN уравнения

$$AN^2 = AB(AB - AN).$$

Отношение

$$\frac{AN}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618$$

имеет замечательное свойство, подмеченное еще в древности: предмет, картина, скульптурная композиция, здание или его отдельные части, вписывающиеся в прямоугольник с таким отношением сторон, способствуют наиболее четкому и легкому, приятному для глаз, восприятию форм даже на большом расстоянии, что и использовалось в архитектуре, живописи и т. д. В теории музыки отношение длин струн, равное $\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$, создает гармонический аккорд.

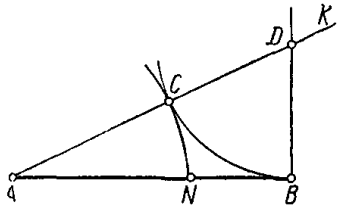


Рис. 99.

В связи с этим деление отрезка в среднем и крайнем отношении часто называют *золотым сечением*.

Пример. Построить точку N, которая разделяет данный отрезок AB в среднем и крайнем отношении.

Восстановим перпендикуляр BD, равный $\frac{1}{2} AB$ (рис. 99). Из конца A отрезка AB проведем луч AK через точку D. Радиусом BD из точки D как центра опишем дугу до пересечения с лучем AK в точке C. Затем из точки A как центра радиусом AC проведем окружность до пересечения с отрезком AB в точке N. Точка N будет искомой.

§ 6. Гармоническая группа точек. Гармоническое разделение

Группа из четырех точек A, M, B, N, лежащих на одной прямой, называется *гармонической*, если отрезки AM, AN, BM и BN составляют пропорцию (рис. 100)

$$\frac{AM}{BM} = \frac{AN}{BN}.$$

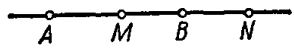


Рис. 100.

Из определения гармонической группы точек следует, что точка M делит отрезок AB внутренним образом, а точка N делит AB в том же

отношении внешним образом. Такое разделение точек A и B точками M и N называется *гармоническим разделением*. При этом, если точки M и N гармонически разделяют точки A и B, то точки A и B гармонически разделяют точки M и N. Точки M и N называются гармонически сопряженными относительно точек A и B (и наоборот).

Пример. Даны три точки A, B и M, лежащие на одной прямой. Построить четвертую, гармоническую к ним точку N, т. е. такую точку N, которая вместе с данными образовала бы гармоническую группу.

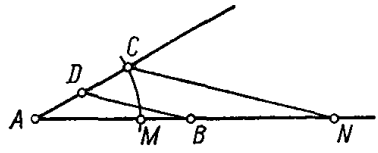


Рис. 101.

Через точку A проведем произвольный луч и на нем от точки A отложим отрезок $AC = AM$ (рис. 101). Далее от точки C в сторону точки A отложим отрезок $CD = BM$. Соединим точки B и D и проведем $CN \parallel BD$. Точка N будет искомой. Действительно, $\triangle ACN \sim \triangle ABD$; следовательно, $\frac{AN}{AB} = \frac{AC}{AD}$ (см. § 15).

Образуем производную пропорцию

$$\frac{AN}{AN - AB} = \frac{AC}{AC - AD}.$$

Поскольку $AN - AB = BN$, $AC - AD = AC - (AC - DC) = DC = BM$, то можно производную пропорцию записать так: $AN : BN = AM : BM$. Следовательно, точка N является гармонически сопряженной с данной точкой M относительно точек A и B.

§ 7. Аксиоматика. Определения. Теоремы. Доказательства

Аксиома (от греческого ἀξιώμα — уважение, авторитет) — математическое предложение, принимаемое без доказательства.

К системе аксиом, рассматриваемых как исходные предложения при построении той или иной математической теории, предъявляются требования непротиворечивости, независимости и полноты.

Система аксиом называется непротиворечивой, если из нее нельзя логически вывести два взаимно исключающих друг друга предложения.

Система аксиом называется независимой, если никакая из аксиом этой системы не является следствием других аксиом этой системы.

Непротиворечивая и независимая система аксиом является полной, если она достаточна для построения той или иной математической теории. Строгое определение полноты системы аксиом выходит за рамки элементариой математики.

В настоящее время в геометрии принята система аксиом, состоящая из пяти групп. Классификация аксиом геометрии была предложена немецким математиком Давидом Гильбертом (1862—1943) в 1899 г.

Первая группа аксиом состоит из шести *аксиом соединения:*

1. Две точки определяют только одну прямую.

2. На каждой прямой лежит не менее двух точек. Существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.

3. Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость и притом только одиу.

В каждой плоскости лежит по крайней мере одна точка.

4. Если две точки прямой лежат а некоторой плоскости, то и все точки ее лежат в той же плоскости.

5. Если две плоскости имеют одну общую точку, то оии имеют еще хотя бы одну общую точку.

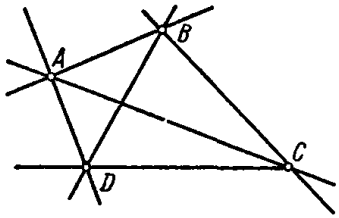


Рис. 102.

6. Существуют по крайней мере четыре точки, ие лежащие на одной плоскости.

Пример 1. Сколько различиых прямых можно провести через 4 произвольно расположенные на плоскости точки? Через 10 точек? Через n точек?

Каждая пара точек определяет одну прямую. Две пары точек являются разиыми, если они отличаются хотя бы одной точкой. Разные две пары точек определяют две различные прямые. Следовательно, количество прямых, определяемых 4-мя точками, равно числу сочетаний из 4-х элементов по 2 (рис. 102):

$$C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6,$$

Число прямых, определяемых 10-ю произвольными точками,

$$C_{10}^2 = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45.$$

Для n произвольных точек получаем

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} \text{ (прямых)}.$$

Вторая группа аксиом состоит из четырех *аксиом порядка:*

1. Если точка B лежит на прямой между точками A и C, то A, B и C — различные точки прямой и B лежит также между C и A.

2. При данных двух точках A и B на примой линии существует по крайней мере одна такая точка C, что B лежит между A и C.

3. Из трех даниых точек на прямой не более чем одиа лежит между двумя другими.

4. Если в данной плоскости даны треугольник ABC и какая-нибудь прямая l, не проходящая через одну из его вершин и пересекающая сторону AB, то эта прямая непремеино пересечет одну из двух других сторон AC или BC.

Аксиомы третьей группы называются *аксиомами конгруэнтности* (от латинского *congruens* — совпадающий, согласованный; в геометрии — равный). К третьей группе относятся пять аксиом:

1. На любой прямой от любой ее точки можно отложить отрезок, равный данному.

2. Два отрезка, равные третьему, равиы между собой.

3. Пусть A, B, C — точки одной прямой и K, L, M — также точки одной прямой. Пусть, кроме того, $AB = KL$, $BC = LM$. Если отрезки AB и BC, а также KL и LM не имеют общих точек, то $AC = KM$.

4. От любой точки данной прямой по данную сторону можно построить один и только один угол, равный данному. Каждый угол равен самому себе.

5. Если в двух треугольниках ABC и KLM стороны $AB = KL$, $AC = KM$ и $\angle BAC = \angle LKM$, то $\angle ABC = \angle KLM$.

К четвертой группе аксиом относится лишь одна *аксиома о параллельности прямых:* через данную точку в данной плоскости можно провести не более одной прямой, параллельной данной.

Пятая группа аксиом состоит из двух *аксиом непрерывности прямой*. Одна из них, называемая *аксиомой Архимеда*, была сформулирована в § 3.

Вторая аксиома непрерывности называется *аксиомой линейной полноты* (точки прямой линии образуют такую систему точек, которую нельзя дополнить новыми точками без нарушения ранее установленных аксиом) и лежит в основе взаимнооднозначного соответствия между множеством точек на числовой прямой и множеством вещественных чисел.

Определение — четкая формулировка того или иного математического понятия.

Доказательство — рассуждение, в ходе которого строго устанавливается истинность или ложность утверждения.

Теорема — математическое предложение, истинность которого устанавливается путем доказательства.

Формулировка всякой теоремы содержит две части: заключение теоремы и условие, при котором это заключение имеет место.

Простой теоремой называется теорема, содержащая лишь одно условие и одно заключение.

Сложная теорема — это теорема, содержащая несколько условий или заключений.

Лемма — вспомогательная теорема.

Обратная теорема — это теорема, в которой условием является заключение, а заключением — условие данной теоремы. Например:

Прямая теорема. Если треугольник прямоугольный, то сумма квадратов его катетов равна квадрату гипотенузы.

Обратная теорема. Если в некотором треугольнике сумма квадратов двух сторон равна квадрату третьей стороны, то такой треугольник прямоугольный.

Противоположная теорема — это теорема, условие и заключение которой являются отрицаниями условия и заключения данной теоремы.

Например, теорема, противоположная теореме Пифагора, может быть сформулирована так: если треугольник не прямоугольный, то квадрат любой его стороны не равен сумме квадратов двух других сторон.

Необходимости в доказательстве этой теоремы нет, так как для треугольника, не являющегося прямоугольным, доказаны теоремы о сторонах, лежащих против тупого и острого углов.

Прямая и обратная, а также прямая и противоположная теоремы являются соответственно *взаимнообратными* и *взаимнопротивоположными*.

Отметим, что не для всякой теоремы верна обратная, но для всякой прямой теоремы всегда верна обратная противоположной. В такой же зависимости находятся обратная и противоположная теоремы. Например:

1. Прямая теорема. Если центральные углы равны, то и соответствующие им дуги равны (теорема верна).

Обратная теорема. Если две дуги окружности равны, то и соответствующие им центральные углы равны (теорема верна).

Противоположная теорема. Если центральные углы не равны, то и соответствующие им дуги не равны (теорема верна).

Обратная противоположной теорема. Если две дуги окружности не равны, то и соответствующие им центральные углы не равны (теорема верна).

2. Прямая теорема. Если стороны двух острых углов перпендикулярны, то эти углы равны (теорема верна).

Обратная теорема. Если два острых угла равны, то их стороны перпендикулярны (теорема неверна).

Противоположная теорема. Если стороны двух острых углов не перпендикулярны, то эти углы не равны (теорема неверна).

Обратная противоположной теорема. Если два острых угла не равны, то их стороны не перпендикулярны (теорема верна).

§ 8. Необходимые и достаточные условия

Если прямая и обратная теоремы верны, то их можно сформулировать в виде одной теоремы, используя понятие необходимости и достаточности. Понятие о необходимом и достаточном условии для выполнения какого-либо верного утверждения (теоремы, суждения) является одним из важнейших в математике.

Необходимое условие — всякое условие, без выполнения которого данное утверждение неверно. Например:

1. Чтобы четырехугольник был квадратом, необходимо, чтобы его диагонали были взаимно перпендикулярны.

Очевидно, что приведенное условие необходимо, но далеко не достаточно, так как при этом условии существует бесконечно много форм четырехугольников, не являющихся квадратами.

2. Чтобы четырехугольник был квадратом, необходимо, чтобы его диагонали были равны.

Данное условие необходимо, но не достаточно, так как этому условию удовлетворяют не только квадраты, но и прямоугольники.

Для выполнения какого-либо утверждения можно указать несколько необходимых условий. Например, для того чтобы четырехугольник был квадратом, выполнение обоих приведенных выше условий необходимо, но не достаточно.

Достаточное условие — всякое условие, из которого следует, что утверждение справедливо. Например, если стороны четырехугольника равны, то такой четырехугольник — параллелограмм. Это условие достаточное, но не является необходимым, так как и без его выполнения четырехугольник может быть параллелограммом.

Для выполнения какого-либо предложения может существовать не одно, а несколько достаточных условий. Например, если диагонали

четырехугольника взаимно перпендикулярны и в точке пересечения делятся пополам, то такой четырехугольник — ромб.

Приведенное условие является необходимым и достаточным, так как, если четырехугольник есть ромб, то легко доказать, что его диагонали взаимно перпендикулярны и делятся в точке пересечения пополам (доказательство необходимости условия); если же дано, что диагонали перпендикулярны и делятся в точке пересечения пополам, то и в этом случае легко доказать равенство сторон четырехугольника, т. е. то, что четырехугольник есть ромб. Поэтому приведенное утверждение можно также сформулировать следующим образом: чтобы четырехугольник был ромбом, необходимо и достаточно, чтобы его диагонали были перпендикулярны и в точке пересечения делились пополам.

Отметим, что утверждение может быть справедливо при выполнении нескольких необходимых и достаточных условий. Например, для того чтобы четырехугольник был прямоугольником, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих требований:

диагонали должны быть равны и в точке пересечения делиться пополам;

все углы должны быть прямые.

Необходимое и достаточное условие называют также необходимым и достаточным *признаком*.

В формулировках теорем выражение «необходимо и достаточно» часто заменяется одним из выражений «тогда и только тогда», «те и только те», «в том и только в том случае, если» и др.

§ 9. Углы

Основные определения. *Плоский угол* — фигура, образованная двумя лучами или отрезками, выходящими из одной точки. Лучи или отрезки, образующие угол, называются *сторонами* угла, а точка, из которой они выходят, *вершиной* угла. Угол обозначается специальным значком и буквой, поставленной у его вершины или внутри угла, а также тремя большими буквами, из которых средняя та, которая стоит у вершины угла. Например, $\angle A$, $\angle \alpha$, $\angle POQ$ и т. д.

Плоскость разделяется сторонами угла на внутреннюю область угла и внешнюю.

Два угла называются равными, если при наложении они совпадают. Если стороны углов образованы отрезками, то при равенстве углов равенство сторон может не соблюдаться.

Развернутым углом называется угол, одна сторона которого является продолжением другой.

Два угла, имеющие общую вершину и общую сторону, называются *прилежащими*, если их внутренние области не покрывают одна другую.

Смежными углами называются два прилежащих угла, не совпадающие стороны которых образуют прямую.

Чтобы построить угол, смежный данному, нужно одну из сторон данного угла продолжить за его вершину.

Если два смежных угла равны между собой, то каждый из них называется *прямым*.

З а д а ч а 1. Доказать, что если угол, равный полуразности смежных углов, вычесть из прямого угла, то получится меньший из смежных углов.

Обозначим меньший из смежных углов через α. Другой смежный угол при этом равен $180° - \alpha$. Полуразность смежных углов равна

$$\frac{1}{2}[(180° - \alpha) - \alpha] = 90° - \alpha.$$

Вычитая эту полуразность из прямого угла, получим в результате угол α, что и требовалось доказать.

Вертикальные углы — такие два угла, у которых стороны одного являются продолжением сторон другого. Вертикальные углы образуются при пересечении двух прямых.

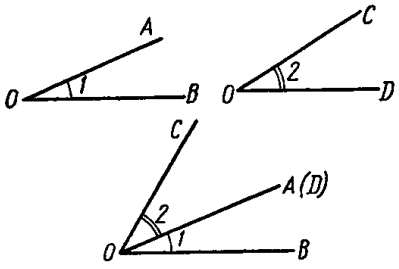


Рис. 103.

Перпендикулярные прямые — такие две прямые линии, которые при пересечении образуют равные вертикальные либо смежные углы (либо прямые вертикальные углы).

Действия с углами. Если вершину и сторону одного угла совместить с вершиной и стороной второго угла, а другие стороны этих углов разместить по одну сторону от совмещенной, то:

а) первый угол меньше второго, если несовмещенная сторона его находится внутри (во внутренней области) второго угла;

б) первый угол больше второго, если несовмещенная сторона его находится во внешней области второго угла.

Если вершину и сторону одного угла совместить с вершиной и стороной второго угла так, чтобы их внутренние области не накладывались, то образованный несовмещенными сторонами угол называется *суммой данных углов* (рис. 103). Сумма нескольких углов определяется аналогично.

Сумма углов обладает перемести тельным и сочетательным свойствами.

Разность углов, умножение и деление угла на число определяется аналогично соответствующим понятиям для отрезков.

Биссектриса угла — луч, исходящий из вершины угла и делящий угол на две равные части (пополам).

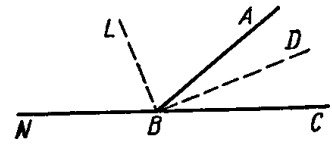


Рис. 104.

З а д а ч а 2. Доказать, что прямая, проведенная через вершину угла перпендикулярно к его биссектрисе, есть биссектриса угла, смежного с данным.

Обозначим через BD биссектрису угла ABC. Проведем прямую $BL \perp BD$ (рис. 104). Если $\angle DBC = \angle DBA$, то $\angle ABL = 90° - \angle DBC$, а $\angle NBL = 180° - (90° + \angle DBC) = 90° - \angle DBC$. Следовательно, $\angle NBL = \angle ABL$, т. е. прямая BL — биссектриса угла ABN, смежного с углом ABC, что и требовалось доказать.

Таким образом, биссектрисы смежных углов взаимно перпендикулярны.

Биссектрисы вертикальных углов являются продолжением друг. друга.

Измерение углов. *Мерой угла* служит величина поворота луча OA вокруг точки O как центра вращения.

Полным углом называется угол, полученный при одном полном обороте луча OA. Точка A при этом опишет окружность радиуса OA.

Половина полного угла составляет *развернутый* угол. Четвертая часть полного угла составляет *прямой* угол. Один радиан — это такой центральный угол, дуга которого равна радиусу окружности. Обозначается радиан сокращенно — *рад*.

Поворот луча OA на 1 *рад* — это такой поворот, при котором точка A описывает дугу, равную по длине отрезку OA. Следовательно, в полном обороте 2π радианов.

Развернутый угол содержит $\pi = 3{,}141592653589...$ *рад*, а прямой угол содержит $\frac{\pi}{2}$ *рад*.

Широко распространена также градусная система измерения углов.

Один градус (1° — единица измерения углов в градусной системе) — это угол, составляющий $\frac{1}{360}$ часть полного угла. Дуга центрального угла в 1° составляет $\frac{1}{360}$ часть дуги окружности.

Одна минута (1′) составляет $\frac{1}{60}$ часть градуса.

Одна секунда (1″) составляет $\frac{1}{60}$ часть минуты, или $\frac{1}{3600}$ часть градуса.

Слово «минута» происходит от латинского *minutus* — уменьшенный, малый, что в данном случае означает более мелкую часть градуса, а слово «секунда» происходит от латинского *secunda* — второй, т. е. второе (еще меньшее) деление градуса.

В полном обороте 360°, что эквивалентно 2π *рад*.

Следовательно,

$$1 \text{ рад} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ\, 17'\, 45'',$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ рад} \approx 0{,}017453 \text{ рад},$$

$$1' = \frac{\pi}{180 \cdot 60} \text{ рад} \approx 0{,}0002909 \text{ рад},$$

$$1'' = \frac{\pi}{180 \cdot 60 \cdot 60} \text{ рад} \approx 0{,}00000485 \text{ рад}.$$

Переход от градусного измерения к радианному и обратно осуществляется соответственно по формулам:

$$\varphi_{\text{радиан}} = \frac{\varphi^\circ}{180^\circ} \pi_{\text{радиан}}, \quad \varphi^\circ = \frac{180^\circ \cdot \varphi_{\text{радиан}}}{\pi_{\text{радиан}}}.$$

Развернутый угол содержит 180°. Прямой угол содержит 90°.

Острым углом называется угол, содержащий меньше 90°; *тупым* углом называется угол, содержащий больше 90°, но меньше 180°.

Для измерения углов и дуг в простейших случаях применяется прибор, называемый *транспортиром*.

З а д а ч а 3. Доказать, что если два угла не равны, то и смежные их углы не равны, причем большему углу соответствует меньший смежный угол.

Пусть $\sphericalangle \alpha > \sphericalangle \beta$. Обозначим через $\sphericalangle \alpha_1$ и $\sphericalangle \beta_1$ соответственно смежные углы углов α и β, тогда

$$\sphericalangle \alpha_1 = 180^\circ - \sphericalangle \alpha; \quad \sphericalangle \beta_1 = 180^\circ - \sphericalangle \beta.$$

При равенстве уменьшаемого та разность меньше, где вычитаемое больше; следовательно,

$$\sphericalangle \alpha_1 < \sphericalangle \beta_1.$$

Отметим, что при радианном измерении углов слово радиан обычно опускают и, например, говорят, что прямой угол равен $\frac{\pi}{2}$.

§ 10. Параллельные прямые

Параллельными называются прямые, которые лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Параллельность прямых обозначается знаком $\parallel$. Например, если прямые AB и CD параллельны, то пишут $AB \parallel CD$. Параллельность трех прямых AB, CD и MN можно записать так: $AB \parallel CD \parallel MN$.

Совокупность всех прямых линий, проходящих через заданную точку, называется *пучком прямых*.

Совокупность всех параллельных между собой линий называется *пучком параллельных прямых*.

Параллельные прямые обладают следующими свойствами:

1. Все точки одной из двух параллельных прямых равноудалены от другой.

2. Все прямые, параллельные некоторой прямой l, параллельны между собой.

3. Принято считать, что две параллельные прямые составляют угол, равный нулю.

4. Все прямые, лежащие в одной плоскости, и перпендикулярные к одной и той же прямой, параллельны между собой.

5. Если прямая перпендикулярна к одной из пучка параллельных прямых, то она перпендикулярна и ко всем остальным прямым этого пучка.

6. Если прямые перпендикулярны к двум параллельным прямым, то их отрезки, заключенные между параллельными прямыми, равны.

7. Если ряд параллельных прямых пересекает стороны угла, то на сторонах этого угла отсекаются пропорциональные отрезки

$$\frac{OA}{OA_1} = \frac{OB}{OB_1} = \frac{OC}{OC_1} = \ldots = \frac{ON}{ON_1}.$$

8. Если две параллельные прямые MN и M_1N_1 пересекаются рядом прямых, проходящих через точку O, то эти прямые рассекаются на пропорциональные части (рис. 105)

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} \text{ и т. д.}$$

Если две параллельные прямые пересечь третьей, то образуются восемь углов (рис. 106).

1. *Соответственные углы* ($\angle$ 1 и $\angle$ 5, а также $\angle$ 4 и $\angle$ 8). Соответственные углы попарно равны.

2. *Внутренние накрестлежащие углы* ($\angle$ 3 и $\angle$ 5, а также $\angle$ 4 и $\angle$ 6). Эти углы попарно равны.

3. *Внешние накрестлежащие углы* ($\angle$ 1 и $\angle$ 7, $\angle$ 2 и $\angle$ 8). Эти углы также попарно равны.

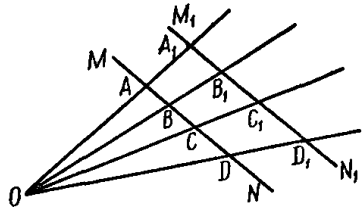


Рис. 105.

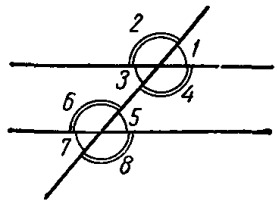


Рис. 106.

4. *Внутренние односторонние углы* ($\angle$ 4 и $\angle$ 5, а также $\angle$ 3 и $\angle$ 6). Односторонние углы попарно в сумме составляют 180°.

5. *Внешние односторонние углы* ($\angle$ 1 и $\angle$ 8, а также $\angle$ 2 и $\angle$ 7). Эти углы попарно в сумме также составляют 180°.

Имеют место и обратные утверждения, а именно:

Две прямые параллельны, если при пересечении этих прямых третьей прямой окажется, что:

1) какие-нибудь соответственные углы равны, или

2) какие-нибудь накрестлежащие углы равны, или

3) сумма каких-нибудь двух внутренних или двух внешних односторонних углов равна 180°.

Углы с соответственно параллельными сторонами между собой равны, если оба они острые или оба тупые.

Углы с соответственно параллельными сторонами составляют в сумме 180°, если один из них острый, а другой тупой.

Углы с соответственно перпендикулярными сторонами равны между собой, если они оба острые или оба тупые и составляют в сумме 180°, и при этом один из них острый, а другой тупой.

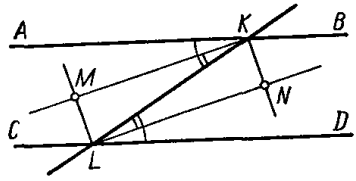


Рис. 107.

З а д а ч а 1. Доказать, что биссектрисы внешних или внутренних односторонних углов при параллельных прямых взаимно перпендикулярны, а соответственных или накрестлежащих углов параллельны.

Пусть биссектрисы внутренних односторонних углов BKL и DLK пересекаются в точке N (рис. 107). Через точку L проведем $LM \parallel KN$, тогда $\angle MLN = 90°$, как угол между биссектрисами смежных углов (см. § 9, задача 2). Поскольку $\angle KNL$ и $\angle MLN$ являются односторонними углами при параллельных ML и KN и секущей LN, то их сумма равна 180°, т.е.

$$\angle KNL + \angle MLN = \angle KNL + 90° = 180°.$$

Следовательно, $\angle KNL = 90°$ и первая часть сформулированного в условии задачи утверждения доказана.

Переходим к доказательству второй части. Биссектрисы внутренних (или внешних) накрестлежащих углов AKL и DLK делят каждый из них пополам. Так как внутренние накрестлежащие углы равны, то равны будут и их половины, т. е.

$$\angle MKL = \angle KLN.$$

Но углы MKL и KLN в свою очередь являются внутренними накрестлежащими углами для прямых MK и LN и секущей LK; следовательно, $MK \parallel LN$, что и требовалось доказать.

Задача 2. Доказать, что перпендикуляр, восставленный из произвольной точки, взятой на стороне острого угла, обязательно пересекает другую сторону этого угла.

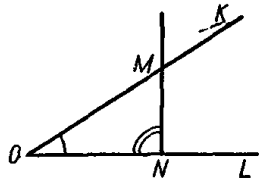


Рис. 108.

Возьмем на одной из сторон острого угла KOL произвольную точку N и восстаиовим $NM \perp OL$ (рис. 108).

При пересечении прямой OL прямых OK и NM образовались внутренние односторонние углы KOL и MNO, причем $\angle KOL + \angle MNO < 180°$, так как $\angle KOL < 90°$ (по условию), а $\angle MNO = 90°$ (по построению). Следовательно, прямые OK и NM не являются параллельиыми по аксиоме о параллельных прямых. Точка их пересечения расположена по ту же сторону секущей OL, по которую расположены внутренние односторонние углы $\angle KOL$ и $\angle MNO$.

Используя приведенное доказательство, можно также доказать, что перпеидикуляр к некоторой прямой пересекается со всякой прямой, не перпендикулярной данной. Можно ли доказать это утверждение, если угол KOL будет прямым или тупым?

Упражиения. 1. Доказать, что два перпендикуляра, восстановлеиные к каждой из сторон произвольного угла, пересекаются.

2. Доказать, что неограниченно продолженная прямая линия не может не пересекать хотя бы одной стороны произвольно взятого угла, лежащего в той же плоскости, если она проходит через точку, находящуюся внутри него.

§ 11. Многоугольники

Многоугольник — фигура, образованная на плоскости замкнутой ломаной линией. Говорят также, что многоугольник — часть плоскости, ограниченная замкнутой ломаной линией. Звенья ломаной называются сторонами многоугольника. Точки, в которых сходятся два соседних звена, называются *вершинами* многоугольника. Углы, внутренняя область которых принадлежит многоугольнику и которые составлеиы двумя соседними сторонами, называются *внутренними* углами многоугольиика. Углы, смежные с внутреиними углами многоугольиика, называются его *внешними* углами, т. е. внешний угол — это угол, образованный стороиой многоугольника и продолжением соседней стороны.

Каждому внутреннему углу ставится в соответствие только один внешний угол многоугольника.

Сумма длин всех сторон многоугольника называется его *периметром* и обозначается буквой P или $2p$, где p — полусумма всех его сторон (*полупериметр*).

Многоугольник называется *выпуклым*, если он расположен по одну сторону от любой своей стороны, неограниченно продолженной.

Простым многоугольником называется такой многоугольник, контур которого не имеет самопересечений.

Если стороны многоугольника имеют самопересечения (рис. 109), он называется *непростым* (звездчатым).

Сумма внутренних углов всякого простого многоугольника равна $\pi(n-2)$ радианов, т. е. $2d(n-2)$.

Сумма внешних углов выпуклого многоугольника равна 2π радианов, т. е. $4d$.

Два многоугольника называются равными, если их можно совместить наложением.

В зависимости от числа углов (сторон) многоугольник называется треугольником, четырехугольником, пятиугольником и т. д.

Многоугольник называется *правильным*, если все его стороны и все углы равны между собой.

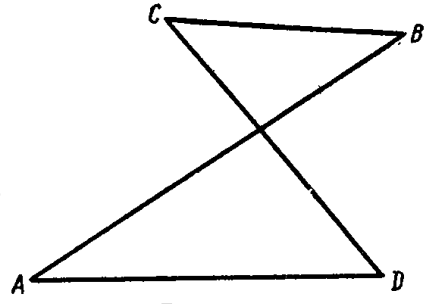


Рис. 109.

Многоугольник также часто называют n-угольником, где n — число сторон (вершин, углов). Очевидно, что $n \geqslant 3$.

Каждый угол правильного многоугольника равен $\frac{n-2}{n}\pi$ радианов, например угол правильного треугольника $\frac{3-2}{3}\pi = \frac{\pi}{3} = 60°$, правильного четырехугольника (квадрата) $\frac{4-2}{4}\pi = \frac{\pi}{2} = 90°$, правильного пятиугольника $\frac{5-2}{5}\pi = \frac{3\pi}{5} = 108°$, правильного шестиугольника $\frac{6-2}{6}\pi = \frac{2\pi}{3} = 120°$ и т. д.

Диагоналями многоугольника называются отрезки, соединяющие две вершины многоугольника, не принадлежащие одной его стороне.

В вогнутом многоугольнике отрезок, соединяющий две несоседние вершины, может оказаться вне его (рис. 110).

Для всякого n-угольника число N его диагоналей определяется по формуле

$$N = \frac{n(n-3)}{2}.$$

Если биссектрисы всех углов многоугольника пересекаются в одной точке O, то в него можно вписать окружность. Центром вписанной в данный многоугольник окружности будет точка O.

Если перпендикуляры, восставленные к серединам всех сторон многоугольника, пересекаются в одной точке O_1, то вокруг него можно описать окружность и ее центром будет точка O_1.

Для правильных многоугольников точка пересечения биссектрис всех углов и точка пересечения перпендикуляров, восставленных к серединам всех сторон, совпадают.

Задача 1. Доказать, что в выпуклом четырехугольнике угол между биссектрисами двух прилежащих углов равен полусумме двух других углов.

Пусть биссектрисы углов A и B, прилежащих к стороне AB, пересекаются в точке N (рис. 111). Тогда, поскольку для любого четырехугольника $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$, то из $\triangle ANB$ находим

$$ANB = 180° - \frac{\angle A + \angle B}{2} = 180° - \frac{360° - (\angle C + \angle D)}{2} = \frac{\angle C + \angle D}{2},$$

что и требовалось доказать.

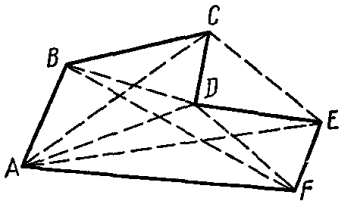


Рис. 110.

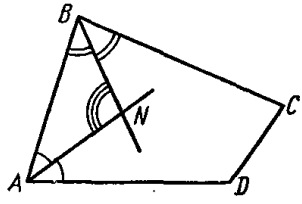


Рис. 111.

Задача 2. Доказать, что выпуклый четырехугольник с разными углами имеет хотя бы один тупой угол.

Обозначим внутренние углы рассматриваемого четырехугольника через α, β, γ, δ, а внешние — через α_1, β_1, γ_1, δ_1.

Предположим, что внутренние углы рассматриваемого четырехугольника не все равны между собой и что среди них нет тупых, т. е. $\alpha + \beta + \gamma + \delta < 2\pi$.

Определим при этом предположении сумму внешних углов $\alpha_1 = \pi - \alpha$, $\beta_1 = \pi - \beta$, $\gamma_1 = \pi - \gamma$, $\delta_1 = \pi - \delta$:

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 = 4\pi - (\alpha + \beta + \gamma + \delta) > 2\pi.$$

Но сумма внешних углов всякого выпуклого многоугольника равна 2π. Следовательно, сделанное предположение неверно, т. е. рассматриваемый четырехугольник имеет хотя бы один тупой угол.

Останется ли верным это доказательство, если все углы четырехугольника будут равны между собой?

Задача 3. Могут ли стороны четырехугольника относиться как 2 : 7 : 11 : 21?

Четырехугольника с данным отношением сторон не существует, так как при любой единице измерения m получаем, что сумма его трех сторон $2m$, $7m$, $11m$ меньше четвертой стороны $21m$, и поэтому рассматриваемая ломаная линия, которой является четырехугольник, не может быть замкнутой.

Задача 4. Определить стороны четырехугольника, если они относятся между собой как 2 : 4 : 5 : 7, а периметр четырехугольника равен 108 *см*.

Обозначим единицу измерения через x, тогда стороны четырехугольника соответственно равны $2x$, $4x$, $5x$, $7x$, а периметр $P = 2x + 4x + 5x + 7x$. По условию задачи $P = 18x = 108$ *см*, откуда

$x = 6$ *см*. Таким образом, стороны данного четырехугольника соответственно равны 12, 24, 30, 42 *см*.

§ 12. Треугольники

Треугольником называется фигура, образованная замкнутой ломаной, состоящей из трех звеньев, т. е. треугольник — это n-угольник при $n = 3$.

Для краткости слово треугольник обозначается символом $\triangle$. Вершины треугольника обычно обозначают большими буквами латинского алфавита, а противоположные им стороны теми же самыми малыми буквами; например, вершины A, B, C и противоположные им стороны a, b, c.

Если все три угла треугольника острые, то он называется *остроугольным*, а если один из его углов тупой, то — *тупоугольным*.

Треугольник, имеющий прямой угол, называется *прямоугольным;* две его стороны, образующие прямой угол, называются *катетами*, а третья сторона (лежащая против прямого угла) — *гипотенузой*.

Треугольник называется *равнобедренным*, если две его стороны имеют одинаковую длину, и *равносторонним*, если все его стороны по длине равны.

Равные стороны равнобедренного треугольника обычно называют *боковыми* сторонами, а третью его сторону — *основанием*. Равносторонний треугольник является *равноугольным* (и наоборот).

Во всяком треугольнике сумма углов равна 180° или π *радианов.*

Всякий внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних, не смежных с ним.

Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то и третьи углы равны.

Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90° или $\frac{\pi}{2}$.

В равнобедренном прямоугольном треугольнике каждый острый угол равен 45°, или $\frac{\pi}{4}$.

Если в прямоугольном треугольнике один из острых углов равен 30°, то лежащий против этого угла катет составляет половину гипотенузы (эту теорему и обратную ей предлагается доказать).

Для сторон всякого треугольника имеют место соотношения

$$a < b + c,\ a > b - c \text{ или } a > c - b,$$
$$b < a + c,\ b > a - c \text{ или } b > c - a,$$
$$c < a + b,\ c > a - b \text{ или } c > b - a,$$

т. е. всякая сторона треугольника меньше суммы, но больше разности двух других сторон.

Два треугольника называются равными, если они могут быть совмещены так, чтобы все их части совпадали.

Признаки равенства двух треугольников*.

Первый признак. Два треугольника равны, если они имеют по равной стороне и прилежащие к этим сторонам углы соответственно равны между собой.

* См. также § 14.

Второй признак. Два треугольника равны, если они имеют по равному углу, и стороны, образующие эти углы, соответственно равны между собой.

Третий признак. Два треугольника равны, если они имеют по три соответственно равные стороны.

Покажите, что условия признаков равенства треугольников являются необходимыми и достаточными для их равенства.

Задача 1. Доказать, что сумма попарных произведений сторон произвольного треугольника больше половины суммы их квадратов*.

Доказательство. Возведем в квадрат левые и правые части неравенств $a > b - c$, $b > a - c$, $c > a - b$:

$$a^2 > b^2 - 2bc + c^2,$$
$$b^2 > a^2 - 2ac + c^2,$$
$$c^2 > a^2 - 2ab + b^2.$$

Сложим полученные неравенства и приведем подобные члены; получим

$$ab + ac + bc > \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2},$$

что и требовалось доказать.

Задача 2. В равнобедренном треугольнике сумма внутренних углов с одним из внешних составляет $\frac{4}{3}\pi$. Определить углы треугольника.

А. Пусть в $\triangle ABC$, где AB — основание, $AC = BC$, углы при основании равны x, угол при вершине y, а внешний угол при вершине равен z. Тогда $2x + y + z = \frac{4}{3}\pi$, $y + z = \pi$; следовательно, $2x + \pi = \frac{4}{3}\pi$, $x = \frac{\pi}{6}$, $y = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$.

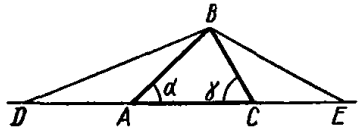


Рис. 112.

Б. Пусть z — внешний угол при основании. Тогда $2x + y + z = \frac{4}{3}\pi$, $2x + y = \pi$; следовательно, $z = \frac{4}{3}\pi - \pi = \frac{\pi}{3}$, что невозможно, так как внешний угол при основании равнобедренного треугольника всегда тупой. Таким образом, искомые углы равны $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{2\pi}{3}$.

Задача 3. В треугольнике ABC сторона AC продолжена за точку A на длину $AD = AB$ и за точку C на длину $CE = BC$. Точки E и D соединены с точкой B. Определить углы $\triangle DBE$, если известны углы $\triangle ABC$ (рис. 112).

---

* Под возведением в степень некоторого отрезка (стороны, высоты, медианы и т. д.) понимается возведение в эту же степень числа, выражающего его длину.

Обозначим $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = \gamma$, тогда $\angle BAD = \pi - \alpha$, $\angle BCE = \pi - \gamma$. Поскольку треугольники ABD и BCE равнобедренные, то

$$\angle BDA = \angle ABD = \frac{\pi - \angle BAD}{2} = \frac{\alpha}{2},$$

$$\angle BEC = \angle CBE = \frac{\pi - \angle BCE}{2} = \frac{\gamma}{2}.$$

§ 13. Соотношения между элементами треугольника

В произвольном треугольнике:

1. *Квадрат стороны, лежащей против острого угла, равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения одной из этих сторон и проекции на нее другой стороны* (рис. 113):

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab_a = a^2 + b^2 - 2ba_b.$$

2. *Квадрат стороны, лежащей против тупого угла, равен сумме квадратов двух других сторон, сложенной с удвоенным произведением одной из этих сторон и проекции на ее продолжение другой стороны* (рис. 114).

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab_a = a^2 + b^2 + 2ba_b.$$

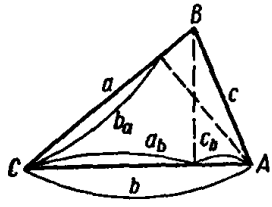


Рис. 113.

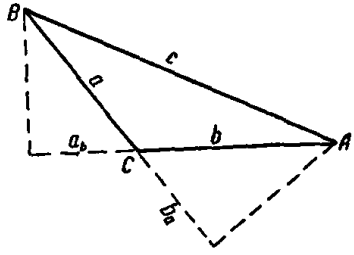


Рис. 114.

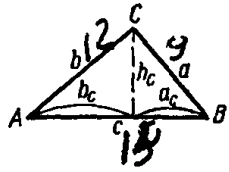


Рис. 115.

Теорема Пифагора. *В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов* (рис. 115):

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Замечание. Если угол C прямой, то проекция одного из катетов на второй равна нулю: $a_b = b_a = 0$; внося эти значения в одну из предыдущих формул, получим теорему Пифагора.

Перпендикуляр h_c, опущенный из вершины прямого угла треугольника на его гипотенузу, есть средняя пропорциональная величина между отрезками, на которые основание перпендикуляра делит гипотенузу, а каждый катет есть средняя пропорциональная величина между всей гипотенузой и прилежащим к этому катету отрезком гипотенузы:

$$\frac{h_c}{a_c} = \frac{b_c}{h_c}; \quad \frac{a}{c} = \frac{a_c}{a}; \quad \frac{b}{c} = \frac{b_c}{b}.$$

Квадраты катетов относятся между собой как прилежащие к ним отрезки гипотенузы:

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{a_c}{b_c}.$$

Задача 1. Определить вид треугольника, если между его сторонами a, b, c имеет место зависимость $a^n + b^n = c^n$ (n — целое положительное число).

При различных значениях n могут иметь место следующие три случая:

а) $n = 1$. Зависимость $a + b = c$ не имеет места ни для какого треугольника;

б) $n = 2$. Зависимость $a^2 + b^2 = c^2$ имеет место лишь для прямоугольного треугольника с катетами a, b и гипотенузой c;

в) $n > 2$. Предположим, что $a < c$, $b < c$. Тогда $a^{n-2} < c^{n-2}$, $b^{n-2} < c^{n-2}$, следовательно, $a^n c^2 < c^n a^2$, $b^n c^2 < c^n b^2$.

Складывая полученные неравенства, находим

$$(a^n + b^n)\, c^2 < (a^2 + b^2)\, c^n.$$

Но по условию задачи $a^n + b^n = c^n$. Поэтому, разделив обе части последнего неравенства на $c^n > 0$, получаем $a^2 + b^2 > c^2$; значит, исследуемый треугольник остроугольный.

Можно также применить следующий способ. При $a < c$, $b < c$, $n > 2$ имеем

$$\frac{a^n}{c^n} < 1, \quad \frac{b^n}{c^n} < 1, \quad \frac{2}{n} < 1.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{a^n}{c^n}\right)^{\frac{2}{n}} > \frac{a^n}{c^n}, \quad \left(\frac{b^n}{c^n}\right)^{\frac{2}{n}} > \frac{b^n}{c^n}.$$

Складывая полученные неравенства, находим

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} > \frac{a^n + b^n}{c^n} = 1,$$

т. е. $a^2 + b^2 > c^2$. Исследуемый треугольник остроугольный.

В каждом треугольнике против бóльшей стороны лежит бóльший угол, а против бóльшего угла лежит бóльшая сторона. Против равных сторон лежат равные углы и наоборот.

Если два угла треугольника равны, то стороны, лежащие против этих углов, также равны (т. е. треугольник является равнобедренным). Угол, лежащий против меньшей стороны треугольника, всегда острый.

В тупоугольном треугольнике наибольшая сторона его лежит всегда против тупого угла.

В прямоугольном треугольнике гипотенуза всегда больше любого из катетов.

Если две стороны одного треугольника равны двум сторонам другого, а углы между этими сторонами не равны, то против бóльшего угла лежит и бóльшая сторона.

Задача 2. В треугольнике ABC бо́льшая сторона BA продолжена на отрезок AD, равный стороне AC, и точка D соединена отрезком прямой с вершиной C. Доказать, что угол BCD — тупой.

Проведем прямую $AL \parallel DC$ и рассмотрим угол ALB, равный углу BCD (рис. 116).

Тогда $\angle ALB = \angle LAC + \angle LCA$ как внешний угол треугольника ALC; $\angle LAC = \frac{1}{2}\angle BAC$, так как $\angle LAC = \angle ACD$ и $\angle BAC = \angle ACD + \angle ADC = 2\angle ACD = 2\angle LAC$, а $\angle LCA$ больше $\angle B$, так как лежит против большей стороны; значит, сумма этих двух углов больше полусуммы углов треугольника, т. е. $\angle LAC + \angle LCA > 90°$; поэтому угол BLA тупой, а следовательно, и равный ему угол BCD тоже тупой.

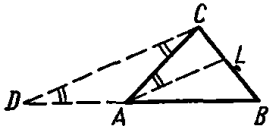


Рис. 116.

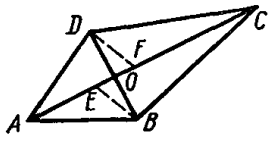


Рис. 117.

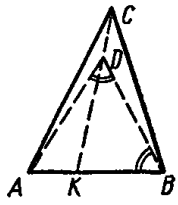


Рис. 118.

Задача 3. Доказать, что если в четырехугольнике суммы квадратов противоположных сторон равны, то диагонали его взаимно перпендикулярны.

Пусть диагонали AC и BD четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O (рис. 117). Предположим, что диагонали не перпендикулярны. Проведем $BE \perp AC$ и $DF \perp AC$. Из $\triangle ABO$ и $\triangle DOC$ соответственно получаем

$$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO \cdot EO,$$
$$CD^2 = CO^2 + DO^2 - 2CO \cdot OF.$$

Складывая, получим

$$AB^2 + CD^2 = AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2 - 2(AO \cdot EO + CO \cdot OF).$$

Аналогично из $\triangle AOD$ и $\triangle BOC$ получим

$$AD^2 + CB^2 = AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2 + 2(CO \cdot EO + AO \cdot OF).$$

Поскольку правые части полученных равенств не равны, то $AB^2 + CD^2 < AD^2 + CB^2$, что противоречит условию. Следовательно, $AC \perp BD$.

Задача 4. Доказать, что если внутри треугольника ABC можно взять точку D так, что отрезок DA равен стороне AB, то сторона AB меньше стороны AC (рис. 118).

Проведем прямые BD и CDK, тогда $\sphericalangle BDK > \sphericalangle BCD$ и $\sphericalangle KDA > \sphericalangle DCA$ как внешние углы треугольников BCD и ADC. Значит, $\sphericalangle BDA > \sphericalangle BCA$; но $\sphericalangle BDA = \sphericalangle ABD$, так как лежат в $\triangle ABD$ против равных по условию сторон AB и AD, поэтому $\sphericalangle ABD > \sphericalangle BCA$, и тем более $\sphericalangle ABC > \sphericalangle BCA$. Следовательно, в $\triangle ABC$ сторона AB, как лежащая против меньшего угла, меньше стороны AC.

Высота треугольника. *Высотой* треугольника называется перпендикуляр, опущенный из любой вершины треугольника на противолежащую сторону или на ее *продолжение*.

В *тупоугольном* треугольнике две высоты падают на продолжения сторон, а третья находится внутри треугольника.

В *остроугольном* треугольнике все высоты лежат внутри него.

В *прямоугольном* треугольнике две высоты совпадают с катетами, а третья опущена на гипотенузу.

Три высоты треугольника всегда пересекаются в одной точке, которая называется *ортоцентром*.

Ортоцентр O тупоугольного треугольника лежит вне треугольника (рис. 119).

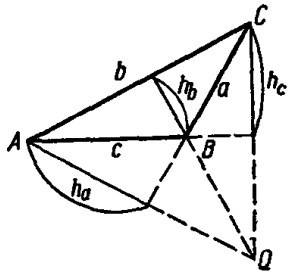


Рис. 119.

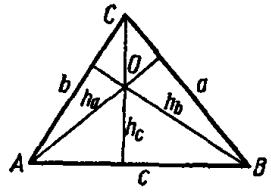


Рис. 120.

Ортоцентр O остроугольного треугольника лежит внутри него (рис. 120).

Ортоцентр прямоугольного треугольника совпадает с вершиной прямого угла.

Высоты треугольника, опущенные на стороны a, b, c, обозначаются соответственно через h_a, h_b, h_c и вычисляются по формулам

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ — полупериметр треугольника.

Между высотами h_a, h_b, h_c и радиусами вписанной и вневписанных окружностей r, r_a, r_b, r_c имеют место соотношения

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}; \quad \frac{1}{r_b} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_b};$$

$$\frac{1}{r_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}; \quad \frac{1}{r_c} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c};$$

$$h_a = \frac{2r_b r_c}{r_b + r_c}; \quad h_b = \frac{2r_a r_c}{r_a + r_c}; \quad h_c = \frac{2r_a r_b}{r_a + r_b};$$

$$h_a = \frac{r_a(b+c-a)}{a};\quad h_b = \frac{r_b(a+c-b)}{b};\quad h_c = \frac{r_c(a+b-c)}{c}.$$

Вневписанной в треугольник окружностью называется окружность, к которой одна из сторон треугольника и продолжения двух других сторон его являются касательными (рис. 121).

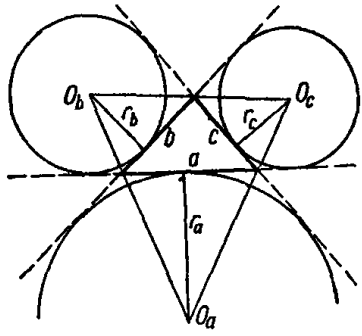


Рис. 121.

Медиана треугольника. *Медианой* треугольника называется отрезок, соединяющий произвольную его вершину с серединой противолежащей стороны. Три медианы треугольника пересекаются в одной точке (рис. 122). Эта точка всегда находится внутри треугольника, являясь его центром тяжести. Точка пересечения медиан треугольника делит каждую медиану в отношении 2 : 1 (считая от вершины).

Медианы сторон a, b, c обозначаются соответственно через m_a, m_b, m_c и вычисляются по формулам

$$m_a = \frac{\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}}{2};\quad m_b = \frac{\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}}{2};$$

$$m_c = \frac{\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}}{2}.$$

Сумма квадратов медиан равна трем четвертям суммы квадратов сторон треугольника

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2).$$

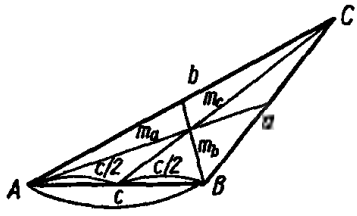


Рис. 122.

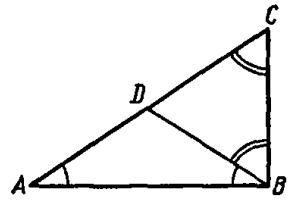


Рис. 123.

В прямоугольном треугольнике медиана, опущенная на гипотенузу, равна половине гипотенузы.

Задача 5. Доказать, что если медиана какой-либо стороны произвольного треугольника равна половине этой стороны, то данный треугольник прямоугольный.

Пусть в $\triangle ABC$ проведена медиана BD стороны AC и согласно условию $BD = AD = DC$ (рис. 123). Докажем, что $\angle ABC = 90°$.

Поскольку $\triangle ABD$ — равнобедренный, то $\angle ABD = \angle DAB$, аналогично $\angle DBC = \angle BCD$.

Тогда имеем

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = \frac{180° - \angle ADB}{2} + \frac{180° - \angle BDC}{2} =$$

$$= 180° - \frac{1}{2}(\angle ADB + \angle BDC) = 90°,$$

так как углы ADB и BDC — смежные и, следовательно,

$$\frac{1}{2}(\angle ADB + \angle BDC) = 90°.$$

Биссектриса треугольника. *Биссектрисой треугольника* называется отрезок биссектрисы любого угла этого треугольника от вершины до пересечения с противоположной стороной. Все три биссектрисы (по количеству углов) треугольника пересекаются в одной точке, лежащей всегда внутри треугольника и являющейся центром вписанной окружности (рис. 124).

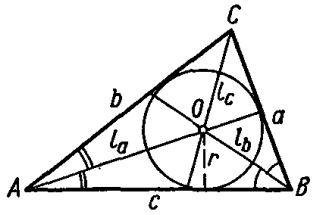


Рис. 124.

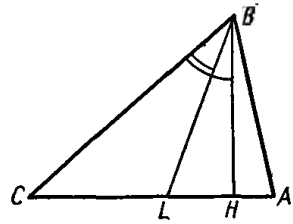


Рис. 125.

В $\triangle ABC$ биссектрисы углов A, B, C, лежащих против сторон a, b, c, обозначаются соответственно через l_a, l_b, l_c и вычисляются по формулам

$$l_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)},$$

$$l_b = \frac{2}{a+c}\sqrt{acp(p-b)},$$

$$l_c = \frac{2}{a+b}\sqrt{abp(p-c)},$$

где $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

Кроме того, биссектрисы могут быть вычислены по формулам

$$l_a = \frac{1}{b+c}\sqrt{bc[(b+c)^2 - a^2]},$$

$$l_b = \frac{1}{a+c}\sqrt{ac[(a+c)^2 - b^2]},$$

$$l_c = \frac{1}{a+b}\sqrt{ab[(a+b)^2 - c^2]}.$$

Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону треугольника на части, пропорциональные прилежащим сторонам. Биссектриса внешнего угла треугольника пересекает продолжение противоположной стороны в такой точке, расстояния которой до концов этой стороны пропорциональны прилежащим сторонам.

Во всяком треугольнике биссектриса лежит между соответствующими медианой и высотой, т. е.

$$h_a \leqslant l_a \leqslant m_a;\ h_b \leqslant l_b \leqslant m_b;\ h_c \leqslant l_c \leqslant m_c.$$

Продолжения биссектрис внутренних углов треугольника проходят через центры вневписанных окружностей, являющихся точками, в которых пересекаются биссектрисы внешних углов этого треугольника (рис. 121).

З а д а ч а 6. В треугольнике из вершины угла проведены биссектриса и высота. Доказать, что угол между ними равен полуразности двух других углов.

Пусть в $\triangle ABC$ $BC > AB$, BH — высота, BL — биссектриса (рис. 125). Тогда

$$\angle HBL = \angle HBC - \angle LBC = (90° - \angle C) - \frac{180° - (\angle A + \angle C)}{2} = \frac{1}{2}(\angle A - \angle C),$$

так как $\angle LBC = \frac{\angle B}{2} = \frac{1}{2}(180° - \angle A - \angle C)$.

З а д а ч а 7. В $\triangle ABC$ биссектрисы внутренних углов B и C пересекаются в точке O и через эту точку проведена прямая OD параллельно AC до пересечения с BC в точке D и прямая OE параллельно AB до пересечения с BC в точке E. Построить рисунок и доказать, что периметр $\triangle OED$ равен стороне BC.

$\angle OBE = \angle OBA$, так как BO — биссектриса $\angle ABC$; $\angle BOE = \angle OBA$, как накрестлежащие углы, а потому $\angle OBE = \angle BOE$ и, следовательно, в треугольнике OBE $OE = BE$. Аналогично доказываем, что $OD = DC$. Поэтому

$$P_{OED} = OE + ED + DO = BE + ED + DC = BC.$$

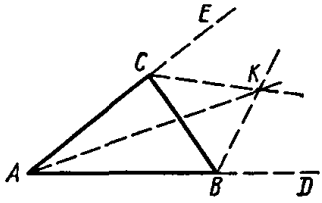


Рис. 126.

З а д а ч а 8. Доказать, что в треугольнике биссектрисы двух внешних углов и третьего внутреннего, не смежного с ними, пересекаются в одной точке.

Пусть в $\triangle ABC$ точка D находится на продолжении стороны AB, а точка E — на продолжении AC (рис. 126). Биссектриса внешнего угла DBC — геометрическое место точек, равноотстоящих от сторон BD и BC, биссектриса внешнего угла ECB — геометрическое место точек, равноотстоящих от сторон BC и CE; поэтому точка их пересечения K равно отстоит от сторон BD и CE, а следовательно, и от стороны AD и AE. Значит, точка K лежит на биссектрисе угла A.

Центр описанной окружности. Средняя линия треугольника. Три перпендикуляра к сторонам треугольника, проведенные через их середины, пересекаются в одной точке, являющейся центром описан-

ной окружности. В тупоугольном треугольнике эта точка лежит вне треугольника, в прямоугольном треугольнике — на середине гипотенузы, в остроугольном — внутри треугольника.

В равнобедренном треугольнике высота, медиана и биссектриса, опущенные на основание, а также перпендикуляр, проведенный через середину основания, совпадают друг с другом.

В равностороннем треугольнике отмеченное совпадение осуществляется для всех сторон.

Ортоцентр, центр тяжести, центр вписанной и описанной окружности в равностороннем треугольнике совпадают.

Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины его сторон. Средняя линия параллельна третьей стороне и равна ее половине.

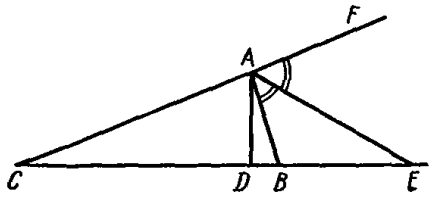


Рис. 127.

З а д а ч а 9. Построить треугольник, зная основания трех его высот.

Пусть основаниями трех высот некоторого треугольника являются точки L, M, N. Построим треугольник с вершинами в точках L, M и N. Проведя биссектрисы внутренних углов $\triangle LMN$, построим перпендикуляры к ним, проходящие через вершины $\triangle LMN$. Точки пересечения этих перпендикуляров будут вершинами искомого треугольника. Выполнить рисунок.

З а д а ч а 10. В треугольнике ABC высота (относительно стороны BC) составляет половину биссектрисы внешнего угла этого треугольника при вершине A. Найти разность углов B и C.

На рис. 127 AD — высота, а AE — биссектриса $\angle BAF$. По условию задачи $AD = \frac{1}{2} AE$, поэтому в прямоугольном $\triangle ADE$ угол AED равен 30°.

Далее находим

$$\angle BAE = \frac{1}{2} \angle BAF = \frac{180° - A}{2} = 90° - \frac{A}{2}.$$

Из $\triangle ABE$ имеем

$$\angle ABE = 180° - (\angle BAE + \angle AEB) = 180° - \left[\left(90° - \frac{A}{2}\right) + 30°\right]$$

или

$$\angle ABE = 60° + \frac{A}{2}.$$

С другой стороны, $\angle ABE$ смежный с углом B и

$$\angle ABE = 180° - B,$$

тогда

$$60° + \frac{A}{2} = 180° - B.$$

Теперь находим

$$B - C = (A + 2B) - (A + B + C) = 240° - 180° = 60°.$$

Ответ: $B - C = 60°$.

Задача 11. В $\triangle ABC$ на продолжении стороны BC отложен отрезок CD, равный CA, и точки A и D соединены прямой; прямая CE — биссектриса $\angle ACB$, прямая CF делит отрезок AD пополам. Построить рисунок и доказать, что CF и CE перпендикулярны.

CF — медиана равнобедренного $\triangle ACD$, а, следовательно, CF — биссектриса $\angle ACD$.

Углы BCA и ACD являются смежными, а биссектрисы смежных углов взаимно перпендикулярны (см. § 9, задача 2), что и требовалось доказать.

§ 14. Признаки равенства треугольников

Два треугольника равны, если у них соответственно равны:

I. Две стороны и угол, заключенный между ними.

II. Два угла и прилежащая к ним сторона.

III. Два угла и сторона, противолежащая одному из них.

IV. Три стороны.

V. Две стороны и угол, лежащий против большей из них.

Замечание. Если равные углы двух треугольников лежат против меньших сторон этих треугольников, то они могут быть не равны (например, треугольники DBC и $A_1B_1C_1$ на рис. 128).

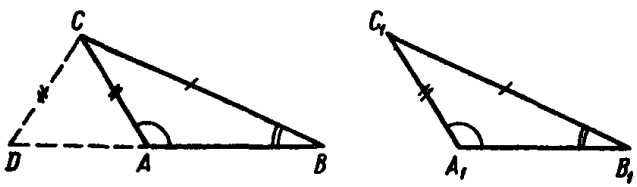


Рис. 128.

Два прямоугольных треугольника равны в следующих четырех случаях*:

I. Если катеты одного треугольника соответственно равны катетам другого треугольника.

II. Если катет и прилежащий к нему острый угол одного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему острому углу другого треугольника.

III. Если гипотенуза и острый угол одного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого треугольника.

IV. Если гипотенуза и катет одного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого треугольника.

Задача 1. Если основание a, высота h_a и медиана m_a одного треугольника соответственно равны основанию, высоте и медиане другого треугольника, то такие треугольники равны.

---

* Все эти признаки являются частным случаем признаков для произвольных треугольников, причем для прямоугольных треугольников одно условие выполняется автоматически — прямые углы всегда между собою равны.

$\triangle ADE = \triangle A_1D_1E_1$ (рис. 129) по катету и гипотенузе; следовательно, $DE = D_1E_1$, значит $DC = D_1C_1$ и $AC = A_1C_1$, поскольку $\triangle ADC = \triangle A_1D_1C_1$ по двум катетам. Так как $BD = BC - DC$, $B_1D_1 = B_1C_1 - D_1C_1$, то $BD = B_1D_1$, следовательно, $\triangle ABD = \triangle A_1B_1D_1$ (по двум катетам); значит $AB = A_1B_1$.

Таким образом, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ по трем сторонам.

З а д а ч а 2. В равнобедренном $\triangle ABC$ из концов основания AC проведены прямые, которые составляют с основанием равные углы и пересекаются в точке D. Построить рисунок и доказать, что треугольники ABD и BCD равны.

В $\triangle ADC$ (по условию) $\angle DAC = \angle DCA$, а потому противолежащие стороны DA и DC равны.

$\triangle ABC$ — равнобедренный, значит $BA = BC$ и треугольники ABD и CBD равны по трем соответственно равным сторонам.

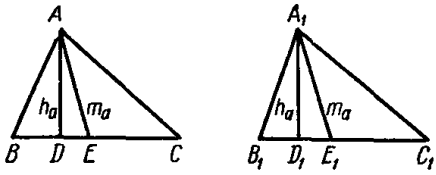


Рис. 129.

У п р а ж н е н и е. Если две стороны и биссектриса угла между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и биссектрисе угла между ними другого треугольника, то такие треугольники равны. Доказать.

§ 15. Подобие треугольников и многоугольников

Если углы одного из двух данных треугольников соответственно равны углам другого, то те их стороны, которые лежат против равных углов, называются *сходственными сторонами.*

Два треугольника называются подобными, если их соответственные углы равны и стороны одного пропорциональны сходственным сторонам другого.

Признаки подобия треугольников. Два треугольника подобны, если:

I. Два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника.

II. Две стороны одного треугольника соответственно пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны.

III. Три стороны одного треугольника соответственно пропорциональны трем сторонам другого треугольника.

Два треугольника являются *подобными,* если стороны одного соответственно параллельны или перпендикулярны сторонам другого.

Прямая, параллельная стороне треугольника и пересекающая две другие стороны, отсекает от него треугольник, подобный данному.

Высоты подобных треугольников, проведенные к сходственным сторонам, называются *сходственными высотами.*

Аналогично определяются сходственные медианы и сходственные биссектрисы.

Признаки подобия прямоугольных треугольников. Признаки подобия прямоугольных треугольников получаем как частный случай из признаков подобия произвольных треугольников, принимая во внимание, что одно условие уже выполнено: прямые углы всегда между собою равны.

Два прямоугольных треугольника подобны, если:

I. Острый угол одного треугольника равен острому углу другого треугольника.

II. Катеты одного треугольника пропорциональны катетам другого треугольника.

III. Гипотенуза и катет одного треугольника пропорциональны гипотенузе и катету другого треугольника.

Для обозначения подобия двух треугольников (а также многоугольников) служит специальный знак $\sim$. Например, если треугольники ABC и MNP подобны, то это кратко обозначают так:

$$\triangle ABC \sim \triangle MNP.$$

З а д а ч а 1. Доказать, что расстояние центра описанной вокруг треугольника окружности от стороны вдвое меньше расстояния ортоцентра от вершины противоположного угла.

$OM \perp BC$, $ON \perp AC$, O — центр описанной окружности, H — ортоцентр (рис. 130). Далее, $MN \parallel AB$, как средняя линия, так что $MN = \frac{1}{2} AB$.

По условию задачи ON есть перпендикуляр, проведенный через середину стороны AC, а BP—высота, опущенная на эту же сторону AC; следовательно, $ON \parallel BP$; так как $MN \parallel AB$, то углы MNO и PBA

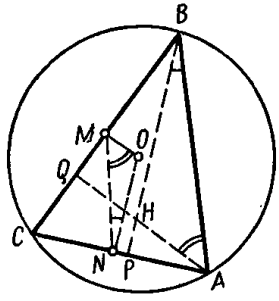


Рис. 130.

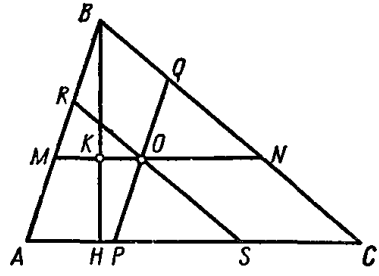


Рис. 131.

равны, как углы с параллельными сторонами. Аналогично доказываем, что $\angle NMO = \angle QAB$ и тогда (согласно первому признаку подобия треугольников)

$$\triangle MON \sim \triangle AHB.$$

Следовательно,

$$\frac{OM}{MN} = \frac{HA}{AB} = \frac{HA}{2MN},$$

откуда $2OM = HA$, что и требовалось доказать.

З а д а ч а 2. В треугольнике ABC стороны $AB = c$, $AC = b$ и $BC = a$. Через точку O пересечения биссектрис внутренних углов

треугольника проведены прямые, параллельные сторонам треугольника. Найти длины отрезков этих прямых, заключенных внутри треугольника.

В треугольнике ABC проведем высоту $BH = h_b$ (рис. 131). По условию задачи $MN \parallel AC$, $PQ \parallel AB$ и $RS \parallel BC$, тогда $\triangle ABC \sim \triangle BMN \sim \triangle CQP \sim \triangle ARS$. Из подобия треугольников ABC и BMN находим

$$\frac{MN}{AC} = \frac{BK}{BH}$$

или

$$\frac{MN}{b} = \frac{h_b - r}{h_b},$$

где $r = KH$ — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

Учитывая, что $r = \frac{s}{p}$, а $h_b = \frac{2s}{b}$, где s — площадь, а p — полупериметр $\triangle ABC$, получим

$$\frac{MN}{b} = 1 - \frac{\frac{s}{p}}{\frac{2s}{b}} = \frac{a+b+c-b}{a+b+c} = \frac{a+c}{a+b+c},$$

откуда

$$MN = \frac{b(a+c)}{a+b+c}.$$

Аналогично находим

$$PQ = \frac{c(a+b)}{a+b+c} \text{ и } RS = \frac{a(b+c)}{a+b+c}.$$

Ответ:

$$\frac{a(b+c)}{a+b+c};\quad \frac{b(a+c)}{a+b+c};\quad \frac{c(a+b)}{a+b+c}.$$

Задача 3. Определить периметр треугольника, вершины которого находятся в основаниях высот остроугольного треугольника со сторонами a, b, c (рис. 132).

Пусть $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$; $\triangle ABC \sim \triangle AFE$, тогда $\frac{FE}{BC} = \frac{AE}{AC}$ и, следовательно, $FE = \frac{aAE}{c}$, но $a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot AE$, т. е.

$$AE = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b},\quad FE = \frac{a(b^2 + c^2 + a^2)}{2bc}.$$

Аналогичио иаходим

$$FD = \frac{b(a^2 + c^2 - b^2)}{2ac},\quad DE = \frac{c(a^2 + b^2 - c^2)}{2ab}.$$

Таким образом, после преобразований получаем

$$FE + FD + DE = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}\ 8p,$$

где $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Подобие многоугольников. *Два многоугольника называются подобными, если они имеют соответственно равные углы и сходственные стороны их пропорциональны.*

Задача 4. Доказать, что два выпуклых четырехугольника подобны, если они имеют соответственно равные углы, кроме одной пары, и все пропорциональные стороны, кроме двух смежных.

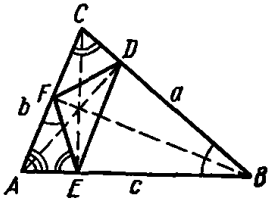


Рис. 132.

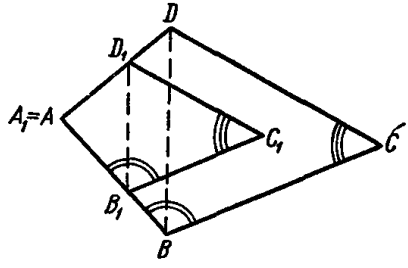


Рис. 133.

Пусть в четырехугольниках $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$

$$\angle A = \angle A_1,\ \angle B = \angle B_1,\ \angle C = \angle C_1,$$
$$BC : B_1C_1 = CD : C_1D_1.$$

Поскольку сумма внутреиних углов всякого четырехугольника равна 2π, то $\angle D = \angle D_1$. Четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ иаложим на четырехугольиик $ABCD$ так, чтобы углы A_1 и A совпали (рис. 133). На стороиах AB и AD отметим точки B_1 и D_1.

Соединяя точки B и D, а также точки B_1 и D_1, найдем, что

$$\triangle BDC \sim \triangle B_1D_1C_1$$

(по равному углу между пропорциональными сторонами).

Поэтому $\angle D_1B_1C_1 = \angle DBC$ и соответствеиио $\angle AB_1D_1 = \angle ABD$, так как по условию $\angle B_1 = \angle B$. Следовательно, $\triangle ABD \sim \triangle A_1B_1D_1$ (по двум углам).

Поскольку четырехугольники $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ состоят из подобных треугольников, то они подобны.

Таким же образом выполняется доказательство для двух n-угольников, удовлетворяющих условию задачи.

Два подобных многоугольника называются гомотетичными, если они расположены так, что сходственные стороны их параллельны. Подобиые многоугольники можно всегда сделать гомотетичными. Прямые, которые соединяют вершины равиых углов двух гомотетичных миогоугольников, пересекаются в одной точке, называемой *центром подобия* (центром гомотетии).

Отношение сторон двух подобных многоугольников $ABC \ldots MN$ и $A_1B_1C_1 \ldots M_1N_1$ называется *отношением подобия*. Число k в выражении

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \ldots = \frac{MN}{M_1N_1} = k$$

называется *коэффициентом подобия*. Для равных фигур коэффициент подобия равен единице. Центр гомотетии может лежать как внутри, так и вне гомотетических фигур.

Задача 5. Построить пятиугольник $A_1B_1C_1D_1E_1$, подобный данному пятиугольнику $ABCDE$ так, чтобы одна из сторон его равнялась данному отрезку m (рис. 134).

Пусть $A_1B_1 = m$. Проведем прямую, параллельную стороне AB данного многоугольника, и на ней отложим данный отрезок $A_1B_1 = m$. Через точки A и A_1, B и B_1 проведем прямые до их пересечения в точке O

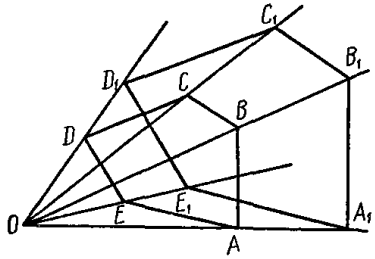


Рис. 134.

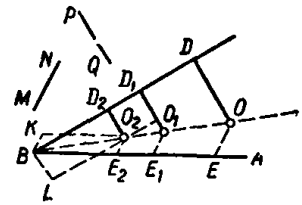


Рис. 135.

и из нее проведем прямые OC, OD, OE. Из точки A_1 проведем прямую, параллельную AE до ее пересечения с продолжением луча OE. Получим точку E_1. Из точки E_1 проведем $E_1D_1 \parallel ED$, далее аналогично $D_1C_1 \parallel DC$, $C_1B_1 \parallel CB$.

Задача 6. Внутри угла ABD найти все такие точки, для которых отрезки, проведенные из каждой искомой точки до сторон угла параллельно данным отрезкам MN и PQ, находились бы в данном отношении $m : n$.

Допустим, что уже найдены две точки O и O_1 такие, что $OE : OD = O_1E_1 : O_1D_1 = m : n$, причем $OE \parallel MN$, $O_1E_1 \parallel MN$, $OD \parallel PQ$, $O_1D_1 \parallel PQ$. Очевидно, что четырехугольники $BDOE$ и $BD_1O_1E_1$ подобны. Центром их подобия будет точка B. Следовательно, точки O, O_1, B лежат на одной прямой. Поэтому все искомые точки лежат на луче OB. Чтобы построить этот луч, надо найти какую-нибудь одну его точку. Для этого проводим из точки B лучи, параллельные к MN и PQ, и на них откладываем отрезки $BK = xm$ и $BL = xn$, где x — произвольная единица измерения (рис. 135).

Из точек K и L проведем $KO_2 \parallel AB$ и $LO_2 \parallel BD$. Точка их пересечения O_2 и есть одна из искомых точек, так как $E_2O_2 : D_2O_2 = BK : LB = xm : xn = m : n$. Все остальные искомые точки составляют луч OB.

Задача 7. Построить треугольник, если дан один из его углов, отношение сторон, заключающих этот угол, и высота, опущенная из вершины этого угла.

Пусть в искомом треугольнике ABC $AC : BC = m : n$, где m и n — данные числа или отрезки. Предполагаем, что дан угол C. По-

строив угол, равный данному, отложим на его сторонах отрезки m и n. Полученные точки M и N соединяем (рис. 136).

В $\triangle MCN$ из вершины C опустим высоту CK. На прямой CK от точки C отложим данную высоту $h = CD$. Через точку D проведем $AB \parallel MN$. Ясно, что $\triangle MCN \sim \triangle ACB$, так как по построению $MN \parallel AB$; следовательно,

$$\frac{AC}{BC} = \frac{MC}{CN} = \frac{m}{n}.$$

Задача 8. В данный треугольник ABC вписать прямоугольник имеющий данную диагональ d.

Через одну из вершин, например B, треугольника ABC проведем прямую, параллельную основанию AC до пересечения ее в точке D с перпендикуляром к AC, восставленным из точки A (рис. 137). Из вершины A прямоугольного треугольника ACD радиусом, равным d,

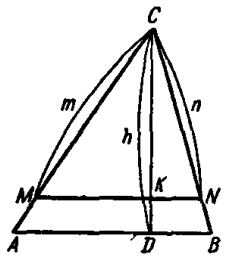


Рис. 136.

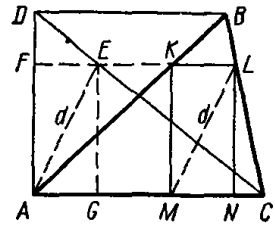


Рис. 137.

делаем засечку E на гипотенузе CD. Через точку E проведем прямые EG и FE, параллельные AD и основанию AC. Прямую FE продолжаем до ее пересечения со сторонами AB и BC в точках K и L. Из точек K и L опускаем $KM \perp AC$ и $LN \perp AC$.

Прямоугольник $KLMN$—искомый. Действительно, $\triangle ADC \sim \triangle FDE$, а $\triangle ABC \sim \triangle KBL$, следовательно,

$$\frac{FE}{AC} = \frac{DF}{AD}; \quad \frac{KL}{AC} = \frac{DF}{AD},$$

так как отрезки DF и DA соответственно равны высоте $\triangle KBL$ и $\triangle ABC$. Отсюда

$$\frac{FE}{AC} = \frac{KL}{AC}, \text{ т. е. } KL = FE,$$

а тогда $ML = AE = d$.

Задача будет иметь два решения, если окружность с центром в A и радиусом $r = d$ пересечет гипотенузу DC в двух точках, одно решение — если указанная окружность будет лишь касаться DC. Решения не будет, если данная диагональ d меньше высоты, опущенной из точки A на гипотенузу DC.

Аналогичные построения можно выполнить относительно остальных двух сторон треугольника.

Задача 9. Дан угол AOB и внутри него точка C. Найти на стороне OB точку N, равноудаленную от точки C и от прямой OA.

Из произвольной точки P, лежащей на стороне OB, опустим $PQ \perp OA$. Проведем прямую OC. Из точки P, как из центра, радиусом PQ сделаем на OC засечку R. Соединим точки P и R. Далее через точку C проведем $CN \perp PR$ (рис. 138). Точка N — искомая. Действительно, опустив $NK \perp OA$, получаем

$$\triangle NKC \sim \triangle PQR,$$

но $PQ = PR$ по построению, следовательно, $NK = NC$.

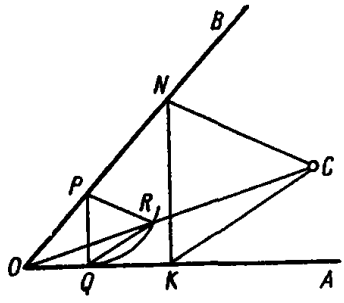


Рис. 138.

§ 16. Понятие о площади и ее измерении

Площадь — одна из основных математических величин. Она характеризует геометрические фигуры как на плоскости, так и на поверхностях.

Площадью плоской замкнутой фигуры называется величина части плоскости, находящейся внутри этой фигуры.

Единицей измерения площади плоской фигуры принято считать квадрат со стороной, равной единице длины (единичный квадрат). При измерении площади ей приводят в соответствие некоторое число, равное количеству единиц измерения площади. При этом равным фигурам соответствуют и равные числа, измеряющие их площади. Кроме того, считают, что число, соответствующее площади некоторой фигуры, которая состоит из нескольких частей, равно сумме чисел, соответствующих площадям этих частей.

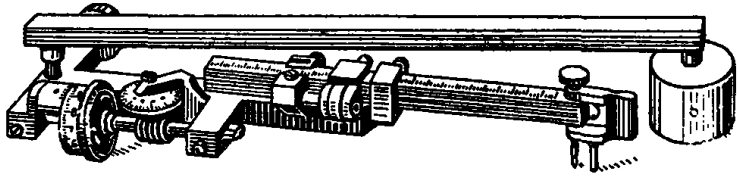


Рис. 139.

Измерение площадей треугольников и многоугольников основано на возможности построения равных им по площади (равновеликих) прямоугольников. В случае соизмеримости прямоугольника с единичным квадратом, площадь его выражается *рациональным* числом, а в случае несоизмеримости — *иррациональным*.

Площадь произвольной ограниченной плоской фигуры определяется как общий предел площадей описанных и вписанных в нее многоугольников, наибольшие стороны которых по длине стремятся к нулю.

Если указанные пределы существуют и равны между собой, то фигура называется *квадрируемой*, т. е. имеющей площадь.

Для приближенного вычисления площадей плоских фигур (например, при работах с топографической картой, планами, при раскройке материала и т. д.) сконструирован прибор, называемый *планиметром* (рис. 139).

Для этой же цели Архимед предложил вычертить заданную фигуру на однородном материале одинаковой толщины (например, на тонком плотном картоне), вырезать ее, взвесить на точных весах, а затем взвесить единичный квадрат, вырезанный из того же материала, и разделить первое число на второе.

§ 17. Площадь треугольника

Для вычисления площади треугольника можно воспользоваться одной из следующих формул:

1. $S = \frac{1}{2} b h_b$,

где b — основание треугольника, h_b — соответствующая высота.

2. $S = \frac{1}{2} ab \sin C$,

где a и b — стороны, C — угол между ними.

3. $S = pr$,

где $p = \frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр, r — радиус вписанной окружности.

4. $S = \frac{abc}{4R}$,

где a, b, c — стороны, R — радиус описанной окружности.

5. $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (формула Герона),

где a, b, c — стороны, p — полупернметр.

Площадь произвольного треугольника может быть вычислена также по его высотам h_a, h_b, h_c (см. § 13):

$$S = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}\right)}},$$

по высотам и полупериметру:

$$S = \frac{p}{\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}},$$

по высотам и радиусу описанной окружности:

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{2h_a h_b h_c R},$$

по радиусам вписанной и вневписанных окружностей:

$$S = \sqrt{r r_a r_b r_c},$$

а также по формулам

$$S = r_a(p-a) = r_b(p-b) = r_c(p-c),$$

$$S = \frac{ar_br_c}{r_b+r_c} = \frac{br_ar_c}{r_a+r_c} = \frac{cr_ar_b}{r_a+r_b}.$$

Площади подобных треугольников относятся как квадраты их сходственных линейных элементов: сторон, высот, медиан, биссектрис и т. д. Площади подобных многоугольников относятся как квадраты их сходственных сторон или диагоналей.

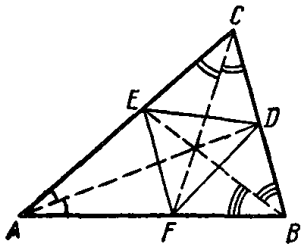


Рис. 140.

Площади двух треугольников, имеющих по равному углу, относятся как произведения сторон, заключающих эти углы, что непосредственно следует из формулы 2.

Задача 1. В треугольнике ABC основаниями биссектрис являются точки D, E, F. Найти отношения площадей $\triangle ABC$ и $\triangle DEF$ (рис. 140).

Поскольку в $\triangle ABC$ и $\triangle DBF$ общий $\angle B$, то

$$\frac{S_{DBF}}{S_{ABC}} = \frac{BF \cdot BD}{AB \cdot BC}.$$

Далее, по свойству биссектрисы $\angle C$ получаем $\frac{BF}{AF} = \frac{AC}{BC}$, откуда

$$\frac{BF}{AB} = \frac{BF}{AF+BF} = \frac{BC}{AC+BC}.$$

Аналогично

$$\frac{BD}{BC} = \frac{AB}{AB+AC}.$$

Таким образом,

$$\frac{S_{DBF}}{S_{ABC}} = \frac{BC \cdot AB}{(AC+BC)(AB+AC)} = \frac{ac}{(a+b)(b+c)},$$

где как обычно введены обозначения $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Аналогично

$$\frac{S_{DCE}}{S_{ABC}} = \frac{ab}{(a+c)(b+c)}; \quad \frac{S_{EAF}}{S_{ABC}} = \frac{bc}{(a+b)(a+c)}.$$

Но $S_{DEF} = S_{ABC} - S_{FBD} - S_{DCE} - S_{EAF}$, следовательно,

$$\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = 1 - \frac{ab}{(a+c)(b+c)} - \frac{ac}{(a+b)(b+c)} - \frac{bc}{(a+b)(a+c)} =$$

$$= \frac{2abc}{(a+b)(a+c)(b+c)}.$$

Задача 2. В равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой c вписан равносторонний треугольник так, что его сторона лежит на гипотенузе, а вершина совпадает с вершиной прямого угла C. Определить отношение площади вписанного треугольника к площади прямоугольного треугольника.

Пусть $\triangle ABC$ — равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой $AB = c$; $\triangle DCE$ — равносторонний вписанный треугольник; CN — их общая высота (рис. 141).

Из $\triangle ACN$, учитывая, что он также есть равнобедренный прямоугольник, находим

$$CN = AN = \frac{c}{2}.$$

Из прямоугольного $\triangle DCN$ получаем

$$CN = \frac{DC\sqrt{3}}{2},$$

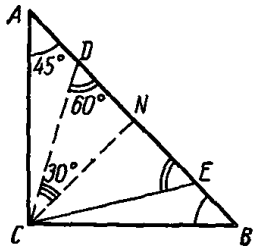


Рис. 141.

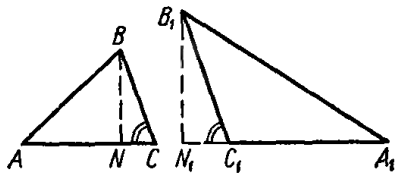


Рис. 142.

откуда

$$DC = \frac{2CN}{\sqrt{3}} = \frac{c}{\sqrt{3}}.$$

В таком случае

$$S_{DCE} = 2S_{DCN} = \frac{\sqrt{3}}{4} DC^2 = \frac{\sqrt{3}}{12} c^2,$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} CN \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{c^2}{2} = \frac{c^2}{4}$$

и, следовательно,

$$\frac{S_{DCE}}{S_{ABC}} = \frac{\sqrt{3}}{12} c^2 : \frac{c^2}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Задача 3. Доказать, что если в двух треугольниках сумма двух углов равна 180°, то площади их относятся как произведения сторон, прилегающих к этим углам.

Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$

$$\angle BCA + \angle B_1C_1A_1 = 180°.$$

Будем считать, что $\angle BCA < 90°$.

Проведем высоты BN и B_1N_1, тогда (рис. 142)

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AC \cdot BN}{A_1C_1 \cdot B_1N_1}.$$

Но $\angle BCA = \angle B_1C_1N_1$, так как

$$\angle B_1C_1N_1 + \angle B_1C_1A_1 = 180°$$

и по условию задачи

$$\angle BCA + \angle B_1C_1A_1 = 180°.$$

Значит,

$$\triangle BCN \sim \triangle B_1C_1N_1.$$

Таким образом,

$$\frac{BN}{B_1N_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$$

и, следовательно,

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AC \cdot BN}{A_1C_1 \cdot B_1N_1} = \frac{AC \cdot BC}{A_1C_1 \cdot B_1C_1},$$

что и требовалось доказать.

З а д а ч а 4. Площадь данного треугольника разделить пополам прямой, параллельной основанию.

Пусть $\triangle ABC$ — данный треугольник, $KL \parallel AC$, $S_{KBL} = \frac{1}{2} S_{ABC}$.

$\triangle KBL \sim \triangle ABC$, следовательно,

$$\frac{BK^2}{AB^2} = \frac{S_{KBL}}{S_{ABC}} = \frac{1}{2}, \text{ т. е. } BK = \frac{AB\sqrt{2}}{2}.$$

Таким образом, задача приводится к построению отрезка BK по данному отрезку AB с учетом полученной формулы. Построим квадрат со стороной AB. Отрезок BK будет равен половине диагонали этого квадрата. Отложив от вершины B треугольника ABC отрезок BK, проводим $KL \parallel AC$. Выполнить рисунок.

З а д а ч а 5. На стороне AB треугольника ABC взята произвольная точка D и из нее проведены $DE \parallel AC$ и $DF \parallel BC$. Определить площадь треугольника CEF, если площади треугольников ADF и BDE соответственно равны S_1 и S_2.

Обозначим площадь искомого $\triangle CEF$ через S_x (рис. 143).

Из подобия треугольников ADF и DBE (каждый из которых подобен данному треугольнику ABC) находим

$$\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{DE}{AF}\right)^2 = \left(\frac{FC}{AF}\right)^2. \quad (1)$$

Высоты треугольников ADF и FEC относительно сторон AF и FC равны между собой, так как $DE \parallel AC$. Тогда

$$\frac{S_x}{S_1} = \frac{FC}{AF}. \quad (2)$$

Сопоставляя равенства (1) и (2), получаем

$$\frac{S_2}{S_1}=\left(\frac{S_x}{S_1}\right)^2,$$

откуда и находим площадь искомого $\triangle CEF$

$$S_x=\sqrt{S_1S_2}.$$

Задача 6. На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты точки M и N, а на прямой MN точка P так, что

$$\frac{BM}{MA}=\frac{AN}{NC}=\frac{MP}{PN}.$$

Доказать, что площадь треугольника BPC в два раза больше площади треугольника AMN (рис. 144).

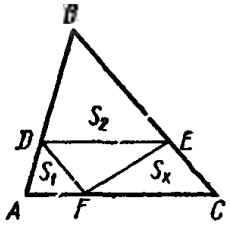


Рис. 143.

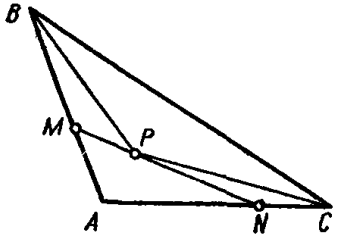


Рис. 144.

Пусть

$$\frac{BM}{MA}=\frac{AN}{NC}=\frac{MP}{PN}=k,$$

тогда

$$\frac{AB}{AM}=\frac{BM+MA}{AM}=k+1;\ \frac{AC}{AN}=\frac{AN+NC}{AN}=\frac{k+1}{k};$$

$$\frac{MN}{PM}=\frac{k+1}{k};\ \frac{MN}{PN}=k+1.$$

Принимая во внимание результаты, сформулированные в начале этого параграфа и полученные при решении задачи 3, найдем

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AMN}}=\frac{AB}{AM}\cdot\frac{AC}{AN}=\frac{(k+1)^2}{k},$$

$$\frac{S_{BMP}}{S_{AMN}}=\frac{BM}{AM}\cdot\frac{PM}{MN}=\frac{k^2}{k+1},$$

$$\frac{S_{CNP}}{S_{AMN}}=\frac{CN}{AN}\cdot\frac{PN}{MN}=\frac{1}{k(k+1)}.$$

Но

$$S_{AMN}+S_{BPC}=S_{ABC}-S_{BMP}-S_{CNP}.$$

Разделив обе части этого равенства на S_{AMN} и воспользовавшись найденными выше отношениями площадей, получим

$$\frac{S_{AMN}+S_{BPC}}{S_{AMN}}=\frac{(k+1)^2}{k}-\frac{k^2}{k+1}-\frac{1}{k(k+1)}=\frac{(k+1)^3-k^3-1}{k(k+1)}=3,$$

откуда $S_{AMN}+S_{BPC}=3S_{AMN}$, или, после приведения подобных членов,

$$S_{BPC}=2S_{AMN}.$$

Упражнение. В треугольнике ABC проведены высоты BD и CE. Выполнить рисунок и доказать, что

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACE}}=\left(\frac{AB}{AC}\right)^2.$$

§ 18. Сводная таблица частных случаев треугольников

Введенные обозначения: a, b, c — стороны треугольников; h_a, h_b, h_c — соответствующие высоты; m_a, m_b, m_c — медианы; α, β, γ — углы; l_a, l_b, l_c — биссектрисы; R — радиус описанной окружности; r — радиус вписанной окружности; r_a, r_b, r_c — радиусы вневписанных окружностей; a' — проекция a на c; b' — проекция b на c; S — площадь треугольника.

Таблица 6

Вид треугольника	Определения, формулы, свойства, соотношения между элементами
Равносторонний	$a=b=c$; $\alpha=\beta=\gamma=60°$; $h_a=h_b=h_c=m_a=m_b=m_c=l_a=l_b=l_c=\frac{a\sqrt{3}}{2}$; $S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$; $R=2r$; $r=\frac{a\sqrt{3}}{6}$; $R=\frac{a\sqrt{3}}{3}$; $r_a=r_b=r_c=3r=\frac{a\sqrt{3}}{2}$
Равнобедренный	$a=b$; a и b — боковые стороны, c — основание; $\alpha=\beta$ (углы при основании равны); $h_a=h_b=\frac{2S}{a}$; $h_c=m_c=l_c=\frac{1}{2}\sqrt{4a^2-c^2}$; $S=\frac{c}{4}\sqrt{4a^2-c^2}=\frac{h_a h_c^2}{\sqrt{4h_c^2-h_a^2}}$; $R=\frac{a^2}{2h_c}$; $r=\frac{ch_c}{2a+c}$; $r_a=r_b=h_c$; $r_c=\frac{ch_c}{2a-c}$

Вид треугольника	Определения, формулы, свойства, соотношения между элементами
Прямоугольный	$\gamma = \alpha + \beta = 90°$; a и b — катеты, c — гипотенуза, $c^2 = a^2 + b^2$ (теоремы Пифагора); $a^2 = ca'$, $b^2 = cb'$, $h^2 = a'b'$; $S = \frac{ch}{2} = \frac{ab}{2}$ Центр тяжести отстоит от сторон a, b и c на расстоянии $\frac{1}{3}b$, $\frac{1}{3}a$ и $\frac{1}{3}h$ соответственно; $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 + a^2}$, $m_b = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + b^2}$, $m_c = \frac{1}{2}c$; $h_a = b$, $h_b = a$, $h_c = h = \frac{ab}{c}$
Равнобедренный прямоугольный	$a = b = \frac{c\sqrt{2}}{2}$; $\alpha = \beta = 45°$, $\gamma = 90°$; $S = \frac{a^2}{2} = \frac{c^2}{4}$; $m_a = m_b = \frac{a\sqrt{5}}{2}$, $m_c = h_c = l_c = \frac{c}{2}$
Прямоугольный с углом в 30°	$a = \frac{c}{2}$, $b = \frac{c\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$; $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 90°$; $S = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{6}b^2 = \frac{\sqrt{3}}{8}c^2$

§ 19. Параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат

Параллелограммом называется четырехугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны.

В параллелограмме противоположные стороны равны. Любые две противоположные стороны параллелограмма можно считать *основаниями*. Расстояние между основаниями называется *высотой*. Во всяком параллелограмме сумма углов, прилежащих к любой стороне, равна 180°. Противоположные углы параллелограмма равны. Диагонали параллелограмма в точке их пересечения делятся пополам. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов четырех сторон. *Площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту* (рис. 145):

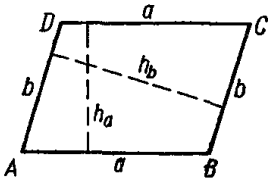


Рис. 145.

$$S = ah_a = bh_b.$$

Задача 1. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $AE \perp BD$, $CF \perp BD$ (рис. 146). Доказать, что если $AE = CF$ и $\angle BAC = \angle ACD$, то $ABCD$ — параллелограмм.

Поскольку $\angle BAC = \angle ACD$, то $AB \parallel DC$, $\triangle ABE = \triangle CDF$, так как $\angle ABD = \angle CDB$ и по условию $AE = CF$. Следовательно, $AB = CD$. Таким образом, в четырехугольнике $ABCD$ две противоположные стороны равны и параллельны, значит этот четырехугольник — параллелограмм.

Задача 2. В параллелограмме $ABCD$ на сторонах AB и CD отложены равные отрезки AE и CG, а на сторонах BC и AD — равные отрезки BF и DH. Доказать, что четырехугольник $EFGH$ есть также параллелограмм (рис. 147).

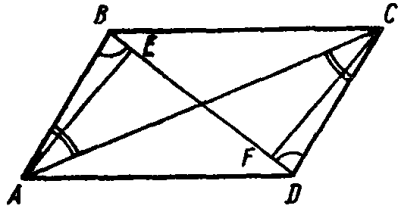


Рис. 146.

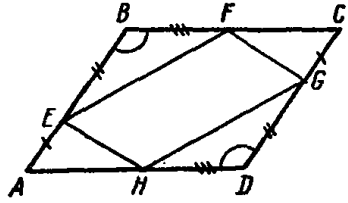


Рис. 147.

Рассмотрим треугольники BFE и GDH. В этих треугольниках по условию $BF = DH$, $BE = GD$, $\angle B = \angle D$. Следовательно, $\triangle BFE = \triangle GDH$; значит $EF = GH$. Аналогично доказываем, что $FG = EH$. Таким образом, в четырехугольнике $EFGH$ противоположные стороны попарно равны; следовательно, этот четырехугольник есть параллелограмм.

Задача 3. Дан параллелограмм $ABCD$, в котором $\angle A = \angle C = 60°$. Определить отношение длин сторон параллелограмма, если отношение квадратов его диагоналей равно $\frac{19}{7}$. Построить рисунок.

Имеем

$$AC^2 = AD^2 + AB^2 + AB \cdot AD,$$
$$BD^2 = AD^2 + AB^2 - AB \cdot AD.$$

Отсюда, разделив первое уравнение на второе и принимая во внимание, что по условию задачи $\left(\frac{AC}{BD}\right)^2 = \frac{19}{7}$, находим

$$\left(\frac{AC}{BD}\right)^2 = \frac{AD^2 + AB^2 + AB \cdot AD}{AD^2 + AB^2 - AB \cdot AD} = \frac{\left(\frac{AD}{AB}\right)^2 + 1 + \frac{AD}{AB}}{\left(\frac{AD}{AB}\right)^2 + 1 - \frac{AD}{AB}} = \frac{19}{7}.$$

После очевидных преобразований для определения искомого отношения сторон $\frac{AD}{AB}$ получаем квадратное уравнение

$$6\left(\frac{AD}{AB}\right)^2 - 13\left(\frac{AD}{AB}\right) + 6 = 0,$$

из которого находим два возможных решения:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{13 \pm 5}{12}, \text{ т. е. } \frac{AD}{AB} = \frac{3}{2} \text{ или } \frac{AD}{AB} = \frac{2}{3}.$$

Признаки параллелограмма. Четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом, если выполняется одно из следующих условий:

1. Противоположные стороны попарно равны:

$$AB = CD; \quad BC = AD.$$

2. Две противоположные стороны равны и параллельны:

$$AB = CD; \quad AB \parallel CD.$$

3. В точке пересечения диагонали делятся пополам.

4. Противоположные углы попарно равны:

$$\angle A = \angle C; \quad \angle B = \angle D.$$

Прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы прямые.

Прямоугольник обладает всеми свойствами параллелограмма и имеет свои особые свойства:

1) в прямоугольнике диагонали равны;

2) прямоугольник имеет две оси симметрии, которые проходят через точку пересечения диагоналей параллельно его сторонам.

В прямоугольнике квадрат диагонали равен сумме квадратов двух его смежных сторон. Площадь прямоугольника равна произведению его сторон:

$$S = ab.$$

З а д а ч а 4. В прямоугольнике $ABCD$ $AB = CD = a$, $\angle BAC = 60°$. Определить периметр P прямоугольника, его диагонали и площадь. Построить рисунок.

По условию $\angle BAC = 60°$, тогда $\angle ACB = 30°$ и, следовательно,

$$AC = 2AB = 2a; \quad BD = AC = 2a; \quad BC = AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Воспользовавшись теперь полученными результатами, находим

$$P = 2AB + 2BC = 2a + 2\frac{a\sqrt{3}}{2} = (2 + \sqrt{3})\,a;$$

$$S = AB \cdot BC = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2.$$

Ромбом называется параллелограмм, все стороны которого равны.

Ромб обладает всеми свойствами параллелограмма, а также имеет свои особые свойства:

1) диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят углы ромба пополам;

2) каждая диагональ ромба является его осью симметрии.

Диагонали ромба могут быть вычислены по формулам

$$d_1 = 2a \sin\frac{\alpha}{2}; \quad d_2 = 2a \cos\frac{\alpha}{2},$$

где a — сторона ромба, α — угол ромба.

Сумма квадратов диагоналей ромба равна учетверенному квадрату стороны ромба

$$d_1^2 + d_2^2 = 4a^2.$$

Площадь ромба может быть вычислена по одной из формул:

$$S = ah,\ S = a^2 \sin\alpha;\ S = \frac{1}{2} d_1 d_2.$$

З а д а ч а 5. Периметр ромба равен $2p$, сумма его диагоналей равна m. Определить площадь ромба.

Обозначим диагонали ромба через x и y. Тогда, принимая во внимание условие задачи и воспользовавшись теоремой Пифагора, получаем:

$$x + y = m;\ \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2,$$

так как сторона ромба равна одной четверти его периметра $a = \frac{2p}{4} = \frac{p}{2}$.

Умножив теперь второе уравнение на 4, перепишем найденный результат в виде

$$\begin{cases} x + y = m, \\ x^2 + y^2 = p^2. \end{cases}$$

Из полученной системы уравнений определим произведение xy. Для этого возведем первое из уравнений в квадрат и, вычтя из него второе, найдем $2xy = m^2 - p^2$, откуда

$$xy = \frac{m^2 - p^2}{2}.$$

Площадь ромба равна половине произведения диагоналей, следовательно,

$$S = \frac{1}{2} xy = \frac{m^2 - p^2}{4}.$$

Квадратом называется параллелограмм, у которого углы прямые, а стороны равны. Квадрат есть частный вид прямоугольника, а также частный вид ромба. Следовательно, квадрат обладает как свойствами прямоугольника, так и свойствами ромба.

Диагональ квадрата и его сторона связаны между собою одной из следующих формул:

$$d = a\sqrt{2} \text{ или } a = \frac{d\sqrt{2}}{2}.$$

Площадь квадрата определяется по формулам:

$$S = a^2;\ S = \frac{d^2}{2}.$$

Задача 6. В квадрат $ABCD$ вписан другой квадрат $KLMN$, так что вершины его лежат на сторонах первого квадрата, а стороны составляют со сторонами первого квадрата углы по 30°. Какую часть площади данного квадрата составляет площадь вписанного?

Из $\triangle AKL$ (рис. 148) следует

$$AL = \frac{1}{2}KL;\ AK = \frac{KL\sqrt{3}}{2}.$$

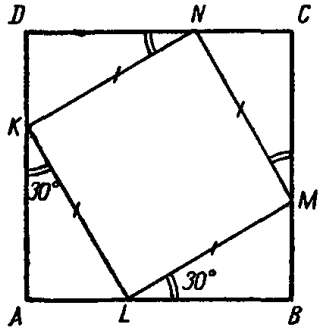


Рис. 148.

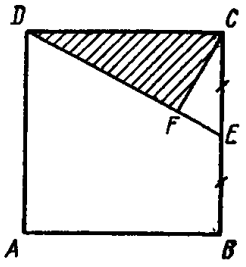


Рис. 149.

Но в данном случае

$$\triangle AKL = \triangle LMB = \triangle MNC = \triangle KDN$$

(по равным гипотенузам и острым углам), поэтому

$$AK = LB = MC = ND.$$

Таким образом,

$$AB = AL + LB = AL + AK = \frac{1+\sqrt{3}}{2}KL$$

и тогда

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{KLMN}} = \left(\frac{AB}{KL}\right)^2 = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{2}.$$

Задача 7. Дан квадрат $ABCD$, причем $BE = EC$, $CF \perp DE$ (рис. 149). Доказать, что площадь заштрихованного на рис. 149 треугольника DCF в пять раз меньше площади данного квадрата.

$S_{CEF} = \frac{1}{4}S_{DCF}$, так как $\triangle DCF \sim \triangle CEF$ и $CE = \frac{1}{2}DC$, а площади подобных фигур относятся, как квадраты сходственных сторон. Тогда

$$S_{DCE} = S_{DCF} + S_{CEF} = 5S_{CEF} \text{ и } S_{DCF} = \frac{4}{5}S_{DEC}.$$

Кроме того, $S_{DEC} = \frac{1}{4} S_{ABCD}$. Следовательно,

$$S_{DCF} = \frac{4}{5} S_{DEC} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5} S_{ABCD} = \frac{1}{5} S_{ABCD}.$$

Задача 8. В ромбе $ABCD$ на сторонах DA и DC отложены равные отрезки DM и DN. Доказать, что треугольник MBN — равнобедренный. Выполнить рисунок. $\triangle ABM = \triangle BCN$, так как $AB = BC$, $\angle BAD = \angle BCD$ по условию задачи, $AM = CN$ (как разности равных отрезков). Следовательно, $BM = BN$, т. е. $\triangle MBN$ — равнобедренный.

Задача 9. На двух сторонах треугольника построены вне его квадраты. Доказать, что отрезок прямой, соединяющий концы сторон квадратов, выходящих из одной вершины треугольника, в два раза больше медианы треугольника, выходящей из той же вершины.

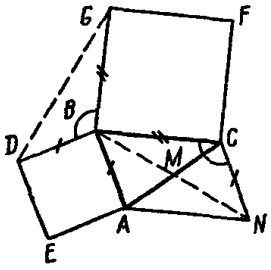


Рис. 150.

Пусть на сторонах AB и BC треугольника ABC построены квадраты $ABDE$ и $BCFG$ (рис. 150). Продолжим медиану BM на отрезок $MN = BM$. Проведем прямые NA и NC. Четырехугольник $ABCN$ — параллелограмм, так как $BM = MN$, $AM = MC$.

Далее, $\angle DBG = \angle BCN$ (как углы со взаимно перпендикулярными сторонами) и $DB = BA = CN$, $BG = BC$; следовательно, $\triangle BDG = \triangle BCN$.

Таким образом,

$$DG = BN = 2BM.$$

Упражнение. Доказать, что площадь параллелограмма, стороны которого равны и параллельны диагоналям произвольного четырехугольника, равна удвоенной площади этого четырехугольника.

§ 20. Трапеция

Трапецией называется четырехугольник, две противоположные стороны которого параллельны, а две другие не параллельны. Параллельные стороны трапеции называются *основаниями*, не параллельные стороны — *боковыми сторонами*.

Высотой трапеции называется расстояние между основаниями; отрезок, соединяющий середины боковых сторон, называется *средней линией трапеции*.

Средняя линия трапеции равна полусумме оснований и параллельна им. Трапеция, у которой боковые стороны равны, называется *равнобочной*. В равнобочной трапеции углы при основании равны. Трапеция, у которой хотя бы один угол прямой, называется *прямоугольной*.

Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту:

$$S = \frac{a+b}{2} h,$$

где a и b — основания, h — высота, *или произведению средней линии на высоту:*

$$S = mh,$$

где $m = \frac{a+b}{2}$ — средняя линия.

Площадь равнобочной трапеции может быть вычислена также по формулам

$$S = c(a - c\cos\gamma)\sin\gamma,$$
$$S = c(b + c\cos\gamma)\sin\gamma,$$

где a и b — основания трапеции, c — боковая сторона, γ — угол между боковой стороной и основанием.

Задача 1. Вычислить площадь трапеции, параллельные стороны которой содержат 16 *см* и 44 *см*, а непараллельные — 17 *см* и 25 *см*.

В трапеции $ABCD$ проведем $DE \parallel BC$ (рис. 151); $AE = AB - CD = 44\ см - 16\ см = 28\ см$; $DE = BC = 17\ см$. Пусть DF — высота трапеции. Из $\triangle ADE$ получаем

$$DF = \frac{2}{AE}\sqrt{p(p-AD)(p-DE)(p-AE)} = \frac{1}{14}\times$$
$$\times\sqrt{35\cdot 10\cdot 7\cdot 18} = 15\ см;$$
$$S = \frac{AB+DC}{2}\cdot DF = \frac{44+16}{2}\cdot 15 = 450\ см^2.$$

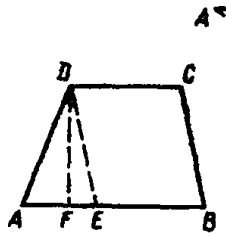


Рис. 151.

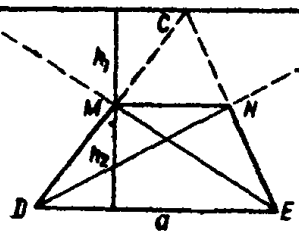


Рис. 152.

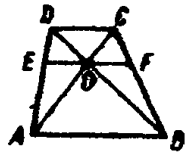


Рис. 153.

Задача 2. Непараллельные стороны трапеции продолжены до взаимного пересечения и через полученную точку проведена прямая, параллельная основаниям трапеции (рис. 152). Найти отрезок ее, ограниченный продолженными диагоналями, если основания трапеции равны $DE = a$, $MN = b$ $(a > b)$.

$\triangle DME \sim \triangle AMC$; $\triangle DNE \sim \triangle CNB$; $\triangle MNE \sim \triangle ACE$.

Отсюда

$$\frac{AC}{a} = \frac{h_1}{h_2};\quad \frac{CB}{a} = \frac{h_1}{h_2};\quad \frac{AC}{b} = \frac{h_1+h_2}{h_2},$$

поэтому

$$\frac{AC}{b} - \frac{AC}{a} = \frac{h_1+h_2}{h_2} - \frac{h_1}{h_2} = 1,$$

и тогда

$$AC = \frac{ab}{a-b}. \text{ Но } AC = CB = \frac{ah_1}{h_2}.$$

Итак,

$$AB = AC + CB = 2AC = \frac{2ab}{a-b}.$$

Задача 3. Доказать, что если прямая, параллельная основаниям трапеции, проходит через точку пересечения диагоналей, то отрезок, отсекаемый от этой прямой боковыми сторонами, делится точкой пересечения пополам.

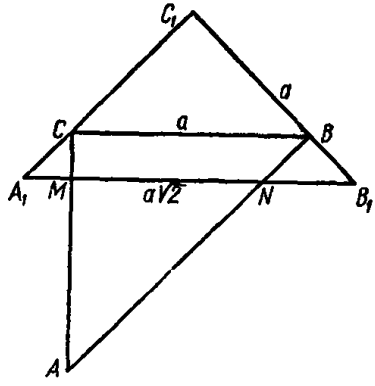


Рис. 154.

В трапеции $ABCD$ через точку O (рис. 153) пересечения диагоналей AC и BD проведем EF параллельно основаниям трапеции AB и CD до пересечения с боковыми сторонами AD и BC в точках E и F. Для доказательства достаточно рассмотреть две пары подобных треугольников: DOE и DBA; COF и CAB и учесть, что треугольники DOE и COF; DBA и CAB попарно имеют одинаковую высоту.

Задача 4. Доказать, что середины оснований трапеции и точка пересечения ее диагоналей лежат на одной прямой. Выполнить рисунок.

Соединим середину основания трапеции с точкой пересечения диагоналей и продолжим этот отрезок до пересечения со вторым основанием. Чтобы доказать, что второе основание при этом разделится пополам, достаточно рассмотреть две пары подобных треугольников прилежащих к основаниям.

Задача 5. Два равных равнобедренных прямоугольных треугольника с катетами a расположены так, что катет BC треугольника ABC параллелен гипотенузе A_1B_1 треугольника $A_1B_1C_1$. Вершины B и C соответственно лежат на катетах A_1C_1 и B_1C_1.

Определить площадь трапеции $BCMN$.

Из $\triangle AMN$ следует, что $MN = AM = a - MC$ (рис. 154). $\triangle A_1C_1B_1 \sim \triangle BCC_1$, поэтому

$$\frac{BC}{A_1B_1} = \frac{CC_1}{A_1C_1}, \text{ т. е. } \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{a - MC\sqrt{2}}{a},$$

откуда

$$MC = a(\sqrt{2} - 1); \; MN = a(2 - \sqrt{2}).$$

Следовательно,

$$S_{BCMN} = \frac{4\sqrt{2} - 5}{2} a^2.$$

Задача 6. Высота равнобедренной трапеции вдвое меньше боковой стороны. Определить углы трапеции. Выполнить рисунок.

В трапеции $ABCD$ проведем из точки B высоту $BF \perp AD$, $AB = 2BF$; $\triangle ABF$ — прямоугольный; значит, гипотенуза его в два раза больше катета. Дальнейшее решение задачи не содержит каких-либо трудностей, и читатель сможет легко выполнить его самостоятельно.

Ответ:

$$\angle A = \angle C = 30°; \quad \angle B = \angle D = 150°.$$

Задача 7. Доказать, что если биссектрисы углов трапеции, прилегающие к одному основанию, пересекаются на втором основании, то это второе основание равно сумме боковых сторон (рис. 155).

По условию задачи AE и DE — биссектрисы углов A и D, так что $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$. Точка E лежит на основании BC. Но $\angle 1 =$

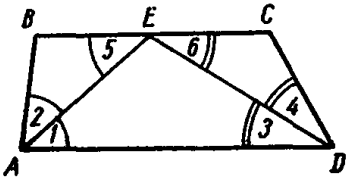


Рис. 155.

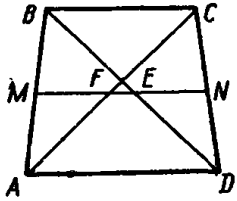


Рис. 156.

$= \angle 5$, а $\angle 3 = \angle 6$, как углы накрестлежащие при пересечении параллельных прямых AD и BC секущей AE или ED. Следовательно, оба треугольника ABE и CDE — равнобедренные; значит,

$$AB = BE, \quad CD = CE, \quad BC = BE + EC = AB + CD.$$

Задача 8. Доказать, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен ее основаниям и равен их полуразности (рис. 156).

Проведем среднюю линию MN трапеции $ABCD$. Средняя линия делит диагонали пополам, как средняя линия треугольников ABC и BCD. Следовательно, FE лежит на средней линии; значит, $FE \parallel AD$. Отсюда $ME = \frac{AD}{2}$, $MF = \frac{BC}{2}$, и тогда $FE = ME - MF = \frac{AD - BC}{2}$.

Задача 9. Какая получится фигура, если последовательно соединить середины сторон ромба?

Стороны полученного четырехугольника будут средними линиями соответствующих треугольников, которые образуют диагонали ромба с его сторонами, а поэтому они будут параллельны диагоналям. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны; следовательно, и смежные стороны полученного четырехугольника тоже; значит, построенный четырехугольник будет прямоугольником (рис. 157).

Задача 10. Доказать, что если биссектриса острого угла A трапеции $ABCD$ и ее диагональ совпадают, то боковая сторона AB равна меньшему основанию BC. Построить рисунок и выполнить доказательство самостоятельно.

Задача 11. Определить углы равнобедренной трапеции, у которой верхнее основание равно боковой стороне, а диагональ перпендикулярна боковой стороне (рис. 158).

По условию $AB = CD = BC$, $AC \perp CD$. В таком случае $\triangle ABC$ — равнобедренный; следовательно, $\angle BCA = \angle CAB$. Но $\angle A = \angle D$,

как углы при основании равнобедренной трапеции, а $\angle CAD = \angle BCA$, как внутренние накрестлежащие углы при $BC \parallel AD$ и секущей AC. Значит, $\angle A = 2\angle CAD$. Далее, по условию $\triangle ACD$ — прямоугольный, так что $\angle CAD + \angle D = 90°$; но так как $\angle D = \angle A$, то $90° = 3\angle CAD$; следовательно, $\angle CAD = 30°$ и тогда $\angle D = \angle A = 60°$, $\angle C = \angle B = 120°$.

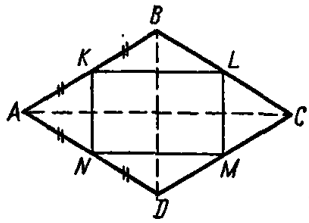


Рис. 157.

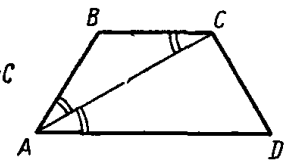


Рис. 158.

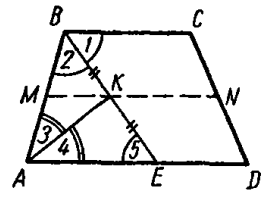


Рис. 159.

Задача 12. Доказать, что биссектрисы углов, прилегающих к одной из боковых сторон трапеции, пересекаются под прямым углом в точке, лежащей на средней линии трапеции (рис. 159).

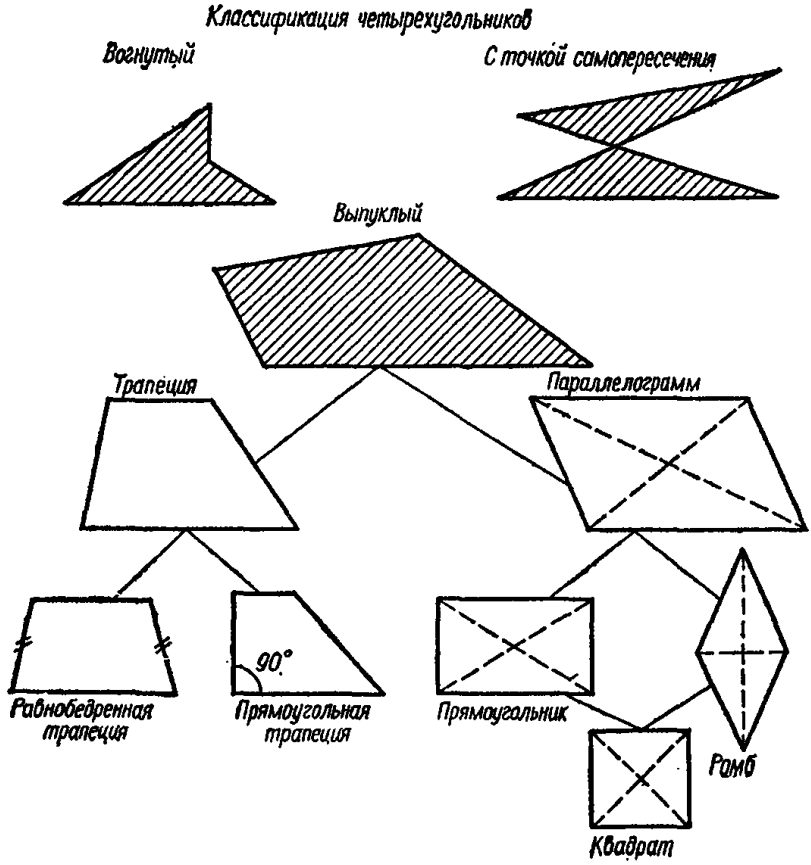


Рис. 160.

По условию прямые AK и BE есть биссектрисы углов A и B, так что $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$. Но $\angle 1 = \angle 5$, как внутренние накрест лежащие при пересечении $BC \parallel AD$ и секущей BE. Значит, $\triangle ABE$ — равнобедренный, а в таком случае его биссектриса AK будет одновременно и медианой и высотой. Следовательно, $AK \perp BE$ и $BK = KE$. Остается доказать, что точка K лежит на средней линии трапеции. Но средняя линия MN трапеции является и средней линией $\triangle ABE$; значит, она делит BE пополам именно в точке K.

Таким образом, мы полностью доказали, что точка K есть точка пересечения биссектрис $\angle A$ и $\angle B$ и что эти биссектрисы пересекаются под прямым углом.

В заключение § 19 и 20 на рис. 160 приведена классификация четырехугольников.

§ 21. Окружность и круг

Определение окружности удобно дать с помощью понятия о геометрическом месте точек (см. § 29).

Окружность есть геометрическое место точек, равноудаленных от одной заданной точки, называемой центром окружности. Окружность часто обозначают одной буквой, показывающей ее центр, например окружность O.

Радиусом окружности называется отрезок, соединяющий центр окружности с любой ее точкой. Каждая окружность имеет бесконечное число радиусов. Радиус обычно обозначают буквами r или R.

Все радиусы одной окружности равны между собой, что непосредственно вытекает из определения окружности. Поэтому обычно говорят: «окружность данного радиуса», хотя это не означает, что окружность имеет только один радиус, а значит, что все радиусы данной окружности имеют одинаковую длину.

Секущей называется прямая, проходящая через две произвольные точки окружности.

Хордой называется часть секущей, лежащая внутри окружности.

Диаметром окружности называется хорда, проходящая через ее центр, т. е. диаметр является наибольшей из хорд. Обычно диаметр обозначается буквами d или D.

Длина диаметра равна удвоенной длине радиуса той же окружности, т. е.

$$d = 2r.$$

Часть окружности называется *дугой*.

Дуги одной и той же окружности равны между собой, если при совмещении этих дуг их концы совпадут. Если при совмещении двух дуг одной окружности два конца их совпадают, а два других не совпадают, то дуги не равны, причем та дуга считается меньшей, которая составит часть другой.

Суммой нескольких данных дуг одинакового радиуса называется такая дуга того же радиуса, которая составлена из частей, соответственно равных данным дугам.

Сумма дуг обладает переместительным и сочетательным свойствами.

Из понятия о сумме дуг выводятся понятия о разности дуг, об умножении и делении дуги на число, как для отрезков прямой.

Через одну и ту же точку можно провести бесконечно много окружностей с произвольно выбранными центрами и радиусами.

Через две заданные точки A и B можно провести бесконечно много окружностей с произвольно выбранными радиусами r, r_1, r_2, r_3, r_4, ..., но не меньшими половины расстояния между точками A и B. Центры таких окружностей O, O_1, O_2, ... будут лежать на одной прямой, перпендикулярной отрезку, концами которого являются данные точки, и проходящей через середину этого отрезка (рис. 161).

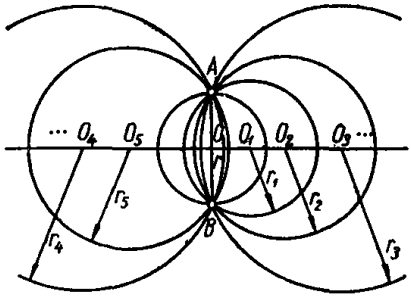


Рис. 161.

Через три заданные точки, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность и притом только одну.

Через три точки, лежащие на одной прямой, окружности провести нельзя. Другими словами, три точки, не лежащие на одной прямой, полностью определяют собою окружность.

Диаметр окружности, перпендикулярный к ее хорде, делит эту хорду и обе стягиваемые ею дуги пополам.

Дуги, заключенные между параллельными хордами, равны.

Кругом называется часть плоскости, заключенная внутри окружности.

Сектором называется часть круга, ограниченная некоторой дугой ABC и двумя радиусами, проведенными к концам этой дуги, например сектор $OABC$ на рис. 162.

Сегментом называется часть круга, ограниченная дугой и стягивающей ее хордой, например сегмент $A_1B_1C_1$ на рис. 162.

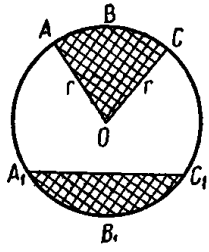


Рис. 162.

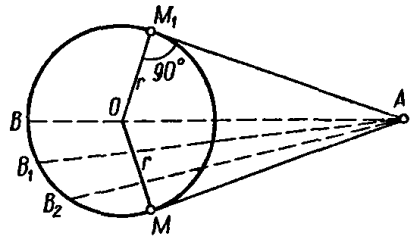


Рис. 163.

Касательной называется прямая, имеющая одну общую точку с окружностью и лежащая в ее плоскости. Общая точка прямой с окружностью называется *точкой касания.*

Длиной касательной, проведенной из точки A к заданной окружности с точкой касания M, называется отрезок AM (рис. 163). Обычно под термином *касательная* и понимают лишь этот отрезок. Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу (диаметру), проведенному в точку касания.

Из точки вне круга можно провести к окружности две касательные. Длины этих касательных равны между собой, так как два прямоугольных треугольника AOM и AOM_1 равны, поскольку имеют общую гипотенузу и по одному равному катету $OM = OM_1 = r$ (рис. 163).

Через точку, лежащую на окружности, можно провести лишь одну касательную к этой окружности. Через точку, лежащую внутри окружности, провести касательную к данной окружности нельзя. Однако через любую точку, лежащую вне, на или внутри окружности, можно провести бесконечное множество секущих.

Касательную к окружности можно рассматривать как предельное положение секущих AB, AB_1, AB_2, ... , проведенных из заданной точки A, расположенной вне или на самой окружности (рис. 163). В последнем случае точка A совпадает с точкой M (или M_1).

Если касательная параллельна хорде, то точка касания делит дугу, стягиваемую хордой, пополам.

Для обозначения дуги часто пользуются специальным знаком $\smile$, и, например, вместо «дуга AB» можно писать $\smile AB$.

Принято говорить, что прямая MN и дуга AB некоторой окружности O сопряжены, если они имеют общую точку (например точку B) и в этой точке прямая MN является касательной к данной дуге AB.

З а д а ч а 1. Построить сопряжение даиной дуги AB раднуса R с отрезком прямой MN. Выполнить чертеж.

Из точки N (или M) восставляем перпендикуляр $ON=R$. Из точки O как из центра радиусом R проводим дугу AB, так чтобы точки A и N совпали и чтобы дуга AB шла в направлении продолжения отрезка MN.

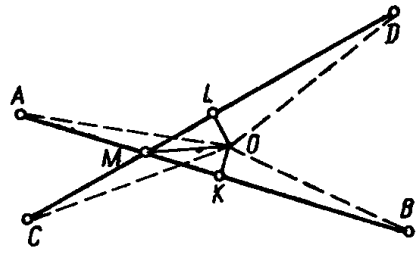


Рис. 164.

Две дуги, сходящиеся в некоторой точке B, называются *сопряженными*, если в этой точке они имеют общую касательную.

З а д а ч а 2. Построить сопряжение дуги AB радиуса R с другой дугой CD радиуса r. Выполнить чертеж.

Из произвольной точки O проведем радиусом R дугу AB. Соединим точку O с точкой B. На радиусе OB (или на его продолжении, если $r > R$) от точки B отложим отрезок $BO_1 = r$. Из точки O_1, как из центра, радиусом r проведем дугу CD так, чтобы точки C и B совпали и $\smile CD$ являлась бы продолжением дуги AB. Сопряжение выполнено, поскольку любая прямая l, проходящая через точку B перпендикулярно к OB, является касательной и к дуге CD, так как $l \perp O_1M$.

З а д а ч а 3. Равные отрезки $AB = CD$ пересекаются в точке M так, что $AM = MC$. Доказать, что точки A, B, C и D лежат на одной окружности.

Возьмем точку K — середину отрезка AB и точку L — середину отрезка CD (рис. 164). Проведем через точки K и L перпендикуляры соответственно к AB и CD до их пересечения в точке O. Перпендикуляр KO есть геометрическое место точек, равноудаленных от концов отрезка AB, а перпендикуляр LO — от концов CD, следовательно,

$$OA = OB \text{ и } OC = OD.$$

Далее, $\triangle AMO = \triangle CMO$ по двум равным сторонам и углу между ними ($AM = CM$ по условию; сторона OM общая и $\angle AMO = \angle CMO$, поскольку $\triangle OML = \triangle OMK$, как прямоугольные треугольники с общей гипотенузой и равными катетами

$$ML = CL - CM = AK - AM = MK;\ CL = \frac{1}{2} CD = \frac{1}{2} AB = AK$$

по условию, так что $\angle OML = \angle OMK$, а $\angle LMA = \angle CMK$ как вертикальные).

Поэтому $AO = OC$, а в таком случае

$$OA = OB = OC = OD,$$

т. е. точки A, B, C, D одинаково удалены от одной точки O и, значит, лежат на одной окружности.

З а д а ч а 4. Доказать, что перпендикуляры к хорде, восставленные в ее концах, пересекаются диаметром окружности в точках, которые равноудалены от центра (рис. 165).

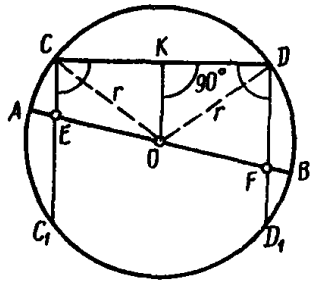


Рис. 165.

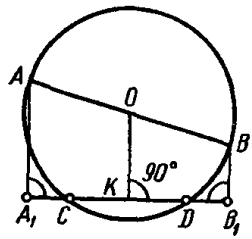


Рис. 166.

Пусть CC_1 и DD_1 — перпендикуляры к хорде CD, которые пересекают диаметр AB в точках E и F. Для доказательства проведем из центра O отрезок $OK \perp CD$, тогда $CK = KD$ (поскольку $\triangle CKO = \triangle DKO$, как прямоугольные треугольники с общим катетом OK и равными гипотенузами $OC = OD = r$; или же непосредственно на основании того, что диаметр, в данном случае его часть OK, перпендикулярный к хорде, делит ее пополам). Отсюда вытекает, что прямая KO проходит через середину K стороны CD прямоугольной трапеции $CEFD$ и параллельна ее сторонам CE и DF, а потому OK есть ее средняя линия; следовательно, точка O — середина стороны EF и $OE = OF$.

З а д а ч а 5. Доказать, что если опустить перпендикуляры из концов диаметра на хорду или ее продолжение, то основания этих перпендикуляров равно отстоят от соответствующих концов хорды.

Пусть O — центр круга, AB — диаметр, CD — хорда. Проведем $AA_1 \perp CD$, $BB_1 \perp CD$. Для доказательства проведем $OK \perp CD$, тогда K — середина хорды CD (рис. 166). Четырехугольник ABB_1A_1 — прямоугольная трапеция, прямая OK проходит через середину O стороны AB и параллельна основаниям трапеции AA_1 и BB_1, а поэтому будет ее средней линией, откуда следует, что точка K — середина стороны A_1B_1. Вычитая от равных отрезков A_1K и KB_1 равные отрезки CK и KD, получим, что $A_1C = DB_1$.

В одном круге или в равных кругах:

1) если дуги равны, то и стягивающие их хорды равны и одинаково удалены от центра;

2) если две дуги, меньшие полуокружности, не равны, то большая из них стягивается большей хордой и из обеих хорд большая расположена ближе к центру.

Касающимися окружностями называются такие две окружности, которые имеют лишь одну общую точку.

Две окружности, имеющие две общие точки, называются *пересекающимися.*

Трех общих точек две неравные окружности иметь не могут, так как, в противном случае, через три точки оказались бы проведенными две разные окружности, что невозможно.

Две или несколько окружностей называются концентрическими, если их центры совпадают (находятся в одной точке). Две равные окружности имеют бесконечно много общих точек, если они концентрические.

Линией центров называется прямая, проходящая через центры двух окружностей. Если две окружности имеют общую точку, расположенную вне линии центров, то они имеют еще и другую общую точку, симметричную с первой относительно линии центров. Такие окружности пересекаются.

Если две окружности имеют общую точку, лежащую на линии центров, то они в этой точке касаются.

Две окружности с центрами O_1, O_2 и радиусами R_1, R_2 могут иметь следующие случаи взаимного расположения:

1. Одна окружность лежит вне другой. Общих точек нет. В этом случае

$$O_1O_2 > R_1 + R_2.$$

2. Одна окружность лежит вне другой. Имеется лишь одна общая точка (внешнее касание). Тогда

$$O_1O_2 = R_1 + R_2.$$

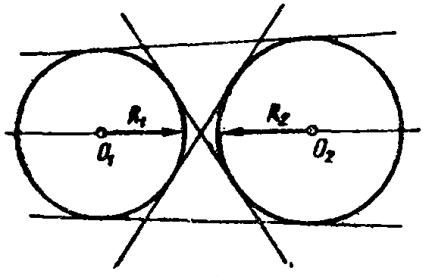


Рис. 167.

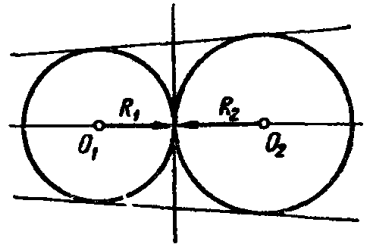


Рис. 168.

3. Окружности пересекаются. Следовательно,

$$|R_1 - R_2| < O_1O_2 < R_1 + R_2.$$

4. Окружности имеют внутреннее касание. В этом случае

$$O_1O_2 = |R_1 - R_2|.$$

5. Одна окружность лежит внутри другой. Общих точек нет. Тогда

$$O_1O_2 < |R_1 - R_2|.$$

В частности, для концентрических окружностей расстояние между центрами

$$O_1O_2 = 0.$$

К двум окружностям (случай 1) можно провести четыре общих касательных (две внутренние и две внешние) (рис. 167).

К двум внешне касающимся окружностям (случай 2) можно провести три общих касательных (рис. 168). Одна из них будет проходить через точку касания перпендикулярно линии центров O_1O_2. В частности, при $R_1 = R_2$ две других касательных параллельны линии центров.

К двум пересекающимся окружностям (случай 3) можно провести лишь две общие касательные (рис. 169).

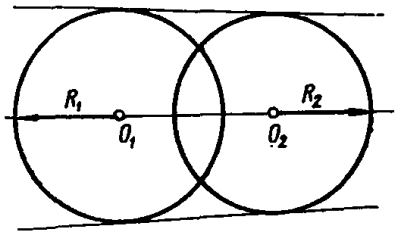


Рис. 169.

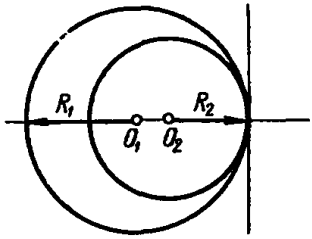


Рис. 170.

Две внутренне касающиеся окружности (случай 4) имеют одну общую касательную, она перпендикуляриа линии их центров (рис. 170).

В пятом из перечисленных случаев расположения двух окружностей общих касательных у них нет.

З а д а ч а 6. Доказать, что если две касательные к окружности пересекаются под углом в 60°, то расстояние от точки их пересечения до центра круга равно диаметру круга.

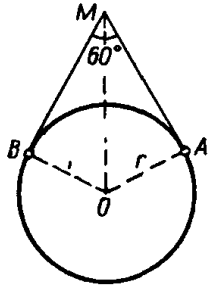


Рис. 171.

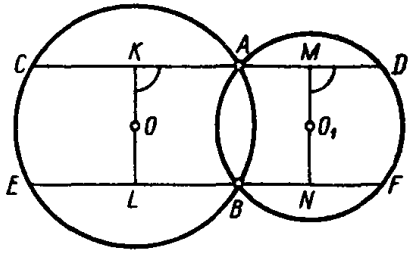


Рис. 172.

Пусть MA и MB — касательные, проведенные из внешней точки M к окружности O (рис. 171). Треугольники OAM и OBM — прямоугольные, так как OA и OB — радиусы, проведенные в точки касания A и B; кроме того, OA и OB равны, как радиусы, а MA и MB — как касательные, проведенные из одной внешней точки; следовательно, прямоугольные треугольники OAM и OBM равны по двум катетам, значит,

$$\angle AMO = \angle BMO = 30°,$$

а в таком случае

$$OM = 2AO = 2r.$$

З а д а ч а 7. Доказать, что если через точки пересечения двух окружностей провести две параллельные прямые, не пересекающие

дуг, лежащих внутри их, то отрезки этих прямых, ограниченные окружностями, равны.

Пусть CAD и EBF — параллельные секущие, проходящие через общие точки A и B окружностей O и O_1; CD и EF— отрезки, ограниченные окружностями (рис. 172). Через O и O_1 проведем две прямые KL и MN перпендикулярно CD и EF. Тогда

$$CK = KA,\ AM = MD \text{ и } EL = LB,\ BN = NF,$$

так как диаметр (или его часть), проведенный перпендикулярно к хорде, делит ее пополам. Но $KMNL$ — прямоугольник, а потому $KM = LN$. С другой стороны, KM и LN есть суммы половин хорд; следовательно,

$$CD = EF.$$

Задача 8. Две окружности внешне касаются и к ним проведена общая внешняя касательная. На отрезке касательной, заключенном между точками касания, как на диаметре, построена третья окружность. Доказать, что она касается линии центров.

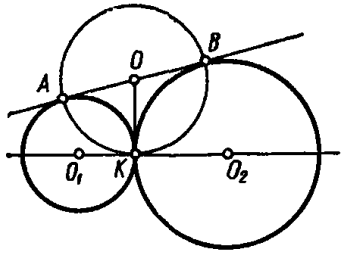


Рис. 173.

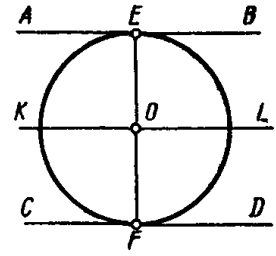


Рис. 174.

Пусть на отрезке касательной AB, ограниченной точками касания A и B, как на диаметре, построена окружность (рис. 173). Через точку касания K окружностей O_1 и O_2 проводим касательную до пересечения с касательной AB в точке O; тогда $AO = OK = OB$, как касательные, проведенные из одной точки; значит, окружность O пройдет через точку K и будет касательной к линии центров O_1O_2, так как прямая O_1O_2 перпендикулярна к радиусу OK в его конце.

Задача 9. К окружности проведены две параллельные касательные. Доказать, что точки касания и центр лежат на одной прямой (рис. 174).

Проведем через центр O прямую KL, параллельную касательной AB, тогда KL параллельна и касательной CD. Прямая $KL \parallel AB$, а потому сумма внутренних односторонних углов AEO и EOK равна 180°; но OE — радиус, проведенный в точку касания, а потому $\angle AEO = 90°$, и, следовательно, $\angle EOK = 90°$.

Аналогично $\angle KOF = 90°$, а потому $\angle EOF$ — развернутый, точки касания E, F и центр O лежат на одной прямой EOF.

Задача 10. Внешняя касательная AB двух окружностей радиусов R и r в m раз больше их внутренней касательной CD. Определить расстояние между центрами этих окружностей O_1 и O_2 (рис. 175).

Проведем прямые $EO_2 \parallel AB$ и $PO_2 \parallel CD$. Тогда прямоугольные треугольники O_1O_2E и O_1O_2P будут иметь общую гипотенузу O_1O_2. Следовательно, поскольку $CD = PO_2$, получим

$$CD^2 + O_1P^2 = O_1E^2 + O_2E^2.$$

Но $O_1P = R + r$, $O_1E = R - r$, а по условию задачи

$$EO_2 = AB = mCD.$$

Таким образом,

$$CD^2 + (R + r)^2 = (R - r)^2 + (mCD)^2,$$

откуда

$$CD = 2\sqrt{\frac{rR}{m^2 - 1}}.$$

Окончательно получаем

$$O_1O_2 = \sqrt{O_1E^2 + O_2E^2} = \sqrt{\frac{4m^2rR}{m^2 - 1} + (R - r)^2}.$$

Задача 11. Окружность O_1 пересекает две концентрические окружности, одну — в точках A и B, другую — в точках C и D (рис. 176). Доказать, что хорда AB параллельна хорде CD.

Пусть O — центр концентрических окружностей, O_1 — центр секущей окружности, и линия центров OO_1 пересекает хорду CD в точке M, AB — в точке K. Из равенства треугольников COO_1 и DOO_1 (у которых $O_1C = O_1D = R$, $OC = OD = r$ и OO_1 общая сторона) следует, что OO_1 — биссектриса угла CO_1D, а так как треугольник CO_1D равнобедренный, то хорда CD перпендикулярна прямой OO_1. Аналогично доказываем, исходя из равенства треугольников AOO_1 и BOO_1, что прямая AB перпендикулярна OO_1. Следовательно, прямые AB и CD параллельны.

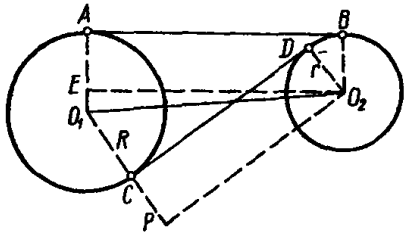


Рис. 175.

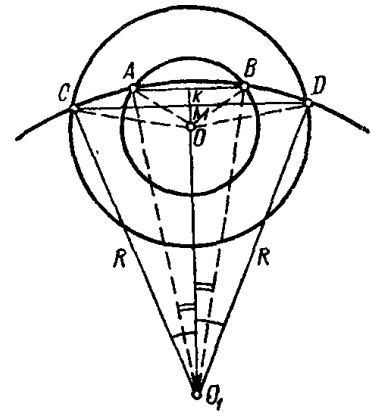


Рис. 176.

Если через точку M, взятую внутри круга, проведены какая-нибудь хорда AB и диаметр CD, то произведение отрезков хорды равно произведению отрезков диаметра (рис. 177):

$$AM \cdot MB = CM \cdot MD.$$

Действительно, $\triangle AMC \sim \triangle DMB$, поскольку $\angle C = \angle B$, как углы, опирающиеся на одну и ту же дугу окружности AD (см. § 22), а углы при вершине M равны как вертикальные. Тогда

$$\frac{AM}{CM} = \frac{MD}{MB} \text{ или } AM \cdot MB = CM \cdot MD,$$

что и требовалось доказать.

Задача 12. В окружности радиуса R хорда AB перпендикулярна к одному из радиусов OC и в точке пересечения E делит его пополам (рис. 178). Определить длину хорды.

Продолжим радиус OC до пересечения с окружностью в точке D. Тогда

$$CE \cdot ED = AE \cdot BE.$$

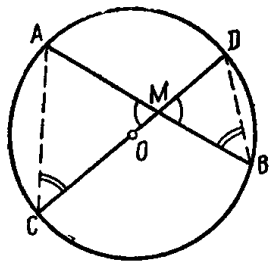


Рис. 177.

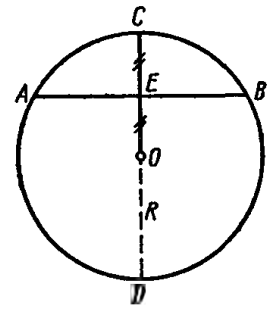


Рис. 178.

Поскольку по условию $CE = \frac{1}{2}R$, $ED = \frac{3}{2}R$, $AE = BE$, то $AE^2 = \frac{3}{4}R^2$; следовательно,

$$AB = 2AE = R\sqrt{3}.$$

Если через точку M, взятую внутри круга радиуса R, проведено несколько хорд, то произведение отрезков каждой хорды, на которые делит ее точка M, есть величина постоянная, равная $R^2 - OM^2$:

$$AM \cdot MB = CM \cdot MD = EM \cdot MF = \ldots = NM \cdot MP = R^2 - OM^2,$$

так как $MN = R - OM$, $MP = R + OM$ и, следовательно (рис. 179),

$$NM \cdot MP = (R - OM)(R + OM) = R^2 - OM^2.$$

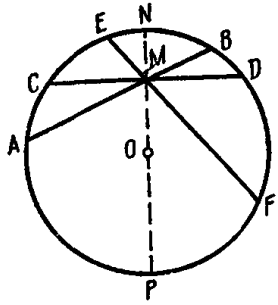


Рис. 179.

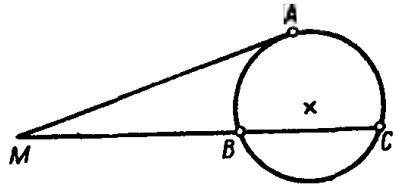


Рис. 180.

Если из точки M, взятой вне круга, проведены к окружности касательная MA (A — точка касания) и секущая MBC (MB — внешняя часть секущей, BC — внутренняя ее часть), то квадрат касательной равен произведению всей секущей на ее внешнюю часть (рис. 180):

$$MA^2 = MC \cdot MB.$$

Справедливо и обратное утверждение. Если из точки M проведены к окружности секущая MKL и отрезок MN, где N — точка, лежащая

на окружности, и если имеет место соотношение

$$MN^2 = ML \cdot MK$$

(ML — вся секущая, MK — внешняя часть секущей), то прямая MN является касательной к данной окружности.

З а д а ч а 13. Из точки M, взятой вне круга, проведены касательная a и секущая. Отношение внешней части секущей к внутренней ее части равно $m : n$. Определить длину секущей.

Обозначим внешнюю и внутреннюю части секущей соответственно через $BM = mx$, $BC = nx$ (рис. 180), тогда $MC = (m + n)x$. Следовательно,

$$a^2 = (m + n)x \cdot mx,$$

откуда

$$x = \frac{a\sqrt{m(m+n)}}{m(m+n)}.$$

Таким образом, длина секущей

$$MC = x(m + n) = a\sqrt{1 + \frac{n}{m}}.$$

З а д а ч а 14. Доказать, что расстояние произвольной точки окружности от хорды есть средняя пропорциональная между расстояниями от той же точки до касательных, проведенных к окружности в концах этой хорды.

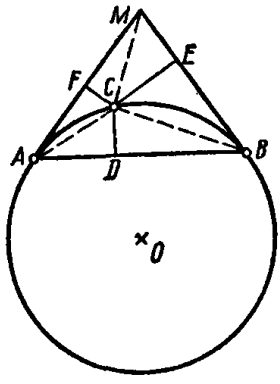


Рис. 181.

На рис. 181 из концов хорды AB проведены к окружности O касательные AM и BM. Из точки окружности C опущены перпендикуляры $CD \perp AB$, $CF \perp AM$ и $CE \perp BM$. Требуется доказать, что

$$CD^2 = CF \cdot CE.$$

Из подобия прямоугольных треугольников $\triangle ACD \sim \triangle BCE$ ($\angle CAD = \angle CBE$, как измеряющиеся одной и той же дугой CB, см. § 22), $\triangle BCD \sim \triangle ACF$ ($\angle FAC = \angle CBD$ — измеряются дугой AC), находим

$$\frac{CD}{FC} = \frac{AC}{CB} \text{ и } \frac{CE}{CD} = \frac{AC}{CB}, \text{ откуда } \frac{CD}{FC} = \frac{CE}{CD} \text{ или } CD^2 = CF \cdot CE,$$

что и требовалось доказать.

П р и м е ч а н и е. Если хорда AB будет диаметром, то из этой задачи получаем, как частный случай, что перпендикуляр, опущенный из любой точки окружности на диаметр, есть средняя пропорциональная между отрезками, на которые основание перпендикуляра делит диаметр.

§ 22. Углы в круге

Центральным углом называется угол, образованный двумя радиусами, например $\angle EOD$ (рис. 182).

Вписанным углом называется угол, образованный двумя хордами, исходящими из одной точки окружности, например $\angle ABC$ (рис. 182). О вписанном угле, как и о центральном, принято говорить, что он опирается на дугу, заключенную между его сторонами.

Описанным углом называется угол, образованный двумя касательными, исходящими из одной точки, например $\angle QNP$ (рис. 183).

Длина дуги, описываемой концом радиуса, прямо пропорциональна величине соответствующего центрального угла; поэтому дуги и углы измеряются одними и теми же единицами измерения (градусами, радианами).

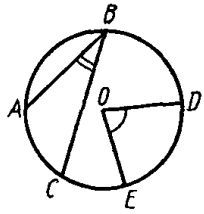


Рис. 182.

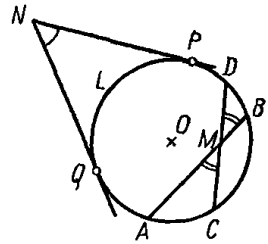


Рис. 183.

Центральный угол измеряется дугой, на которую он опирается (рис. 182):

$$\angle EOD = \cup ED.$$

Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается:

$$\angle ABC = \frac{\cup AC}{2}.$$

Все вписанные в данную окружность углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны между собой (так как они измеряются половиной одной и той же дуги).

Вписанный угол, опирающийся на диаметр,— *прямой*.

Описанный угол измеряется полуразностью большей и меньшей дуг, заключенных между точками касания (рис. 183):

$$\angle QNP = \frac{\cup QCP - \cup QLP}{2}.$$

Угол между двумя хордами, т. е. угол, вершина которого лежит внутри круга, измеряется полусуммой двух дуг, одна из которых заключена между его сторонами, а другая — между продолжением этих сторон (рис. 183):

$$\angle AMC = \angle DMB = \frac{\cup AC + \cup DB}{2}.$$

Если точка B будет стремиться к точке D и совпадет с нею (при этом одновременно и точка M совпадет с точкой B), то $\smile DB = 0$, и мы снова получим формулу для вписанного угла.

Угол между двумя секущими, т. е. угол, вершина которого лежит вне круга и стороны пересекаются с окружностью, измеряется полуразностью двух дуг, заключенных между его сторонами (рис. 184):

$$\angle ACE = \frac{\smile AE - \smile BD}{2}.$$

Эта формула остается справедливой, если секущая ABC перейдет в касательную A_1C; тогда

$$\angle A_1CE = \frac{\smile A_1E - \smile A_1D}{2}.$$

Если обе секущие перейдут в касательные, то снова получим формулу для описанного угла.

Угол между касательной и хордой измеряется половиной дуги, заключенной внутри его (рис. 184):

$$\angle KMN = \frac{\smile KLM}{2}.$$

Эту формулу можно рассматривать как частный случай формулы для вписанного угла, когда одна из хорд, образующих вписанный угол, переходит в касательную.

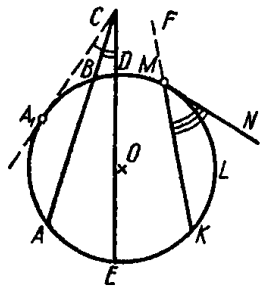


Рис. 184.

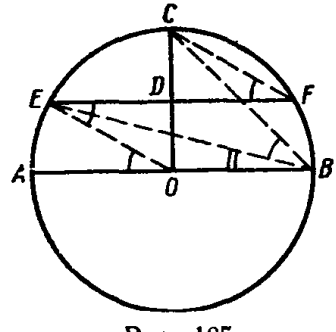


Рис. 185.

Задача 1. AB — диаметр окружности O, радиус $OC \perp AB$. Через середину D радиуса OC проведена хорда $EF \parallel AB$ (рис. 185). Доказать, что угол ABE в два раза меньше угла CBE (или, что является эквивалентным, в три раза меньше угла ABC).

Соединим прямыми точки E и O, C и F. Прямоугольные треугольники EOD и CDF равны по двум равным катетам, откуда $\angle CFD = \angle DEO$, при этом $\angle DEO = \angle EOA$, а потому $\angle CFD = \angle EOA$. Но угол EOA — центральный, измеряемый дугой AE, а угол CEF — вписанный, измеряемый половиной дуги EC, а потому из равенства углов EOA и CFE следует, что дуга AE в два раза меньше дуги EC и, значит, $\angle ABE = \frac{1}{2}\angle CBE$ или $\angle ABE = \frac{1}{3}\angle ABC$.

Задача 2. Через конец хорды, делящей окружность в отношении 3 : 5, проведена касательная. Определить острый угол между хордой и касательной.

Дуга, заключенная между хордой и касательной, составляет $\frac{3}{8}$ всей окружности, т. е. $360° \cdot \frac{3}{8} = 135°$. Следовательно, острый угол между хордой и касательной равен

$$\frac{135°}{2} = 67° 30'.$$

Задача 3. Внутри данной окружности помещается другая окружность. ABC и ADE — хорды большей окружности, касающиеся в точках B и D меньшей окружности (рис. 186). BmD — меньшая

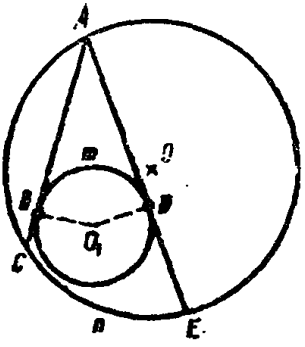


Рис. 186.

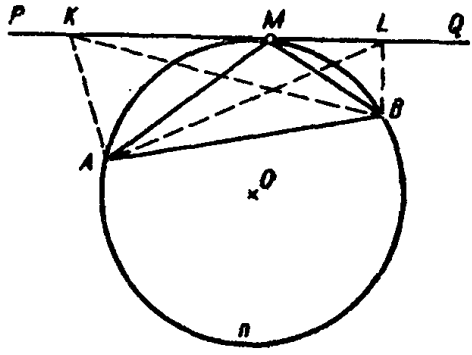


Рис. 187.

из дуг между точками B и D, CnE — дуга между концами хорд AC и AE. Дуга BmD содержит 130°. Определить дугу CnE.

Пусть O_1 — центр меньшей окружности. Построим центральный угол BO_1D. Поскольку $\cup BmD = 130°$, то $\angle BO_1D = 130°$; следовательно, $\angle CAD = 180° - 130° = 50°$, так как $\angle O_1BA = \angle O_1DA = 90°$.

Угол CAD является вписанным в окружность O, опирающимся на $\cup CnE$ и измеряется половиной этой дуги. Поскольку $\angle CAD = 50°$, то $\cup CnE$ содержит 100°.

Задача 4. В окружности O проведена хорда AB (рис. 187). На меньшей из двух дуг, стягиваемых хордой, дана точка M и через эту точку к окружности проведена касательная PQ. Найти на касательной точку, из которой хорда AB видна под наибольшим углом.

Угол AMB является вписанным и, следовательно, измеряется половиной дуги AnB. Любой другой угол с вершиной на касательной измеряется полуразностью двух дуг, из которых большей является та же дуга AnB. Следовательно, хорда AB видна под наибольшим углом из самой точки M.

Задача 5. Доказать, что отрезок произвольной касательной, заключенный между двумя параллельными касательными к той же окружности, виден из центра под прямым углом.

AM, AB, BN по условию — касательные к окружности с центром в точке O; $AM \parallel NB$ (рис. 188). Соединим точки A и B с центром O тогда OA и OB будут биссектрисами углов MOK и KON, так как

$$\triangle OMA = \triangle OAK \text{ и } \triangle OKB = \triangle OBN.$$

Но угол MON равен 180°, следовательно,

$$2(\angle AOK + \angle KOB) = 2\angle AOB = 180°, \angle AOB = 90°.$$

Задача 6. Если две окружности касаются, то любая общая секущая, проведенная через точку касания, отсекает от окружностей две равные противолежащие дуги. Доказать.

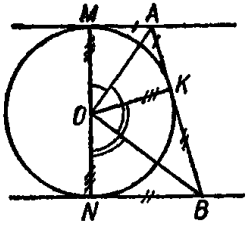


Рис. 188.

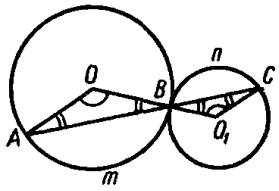


Рис. 189.

Две окружности касаются в точке B; AC — общая секущая, проходящая через эту точку (рис. 189). Соединив центры с концами хорд, получим два равнобедренных треугольника: $\triangle AOB$ и $\triangle BCO_1$, в которых $\angle OBA = \angle CBO_1$, как вертикальные, и $\angle OBA = \angle OAB = \angle BCO_1$, как углы при основании равнобедренных треугольников. Следовательно, центральные углы равны ($\angle AOB = \angle BO_1C$), а в таком случае равны и стягивающие их дуги:

$$\cup AmB = \cup BnC.$$

§ 23. Длина окружности. Площадь круга и его частей

Длиной окружности называется предел последовательности периметров правильных вписанных в эту окружность многоугольников (или правильных многоугольников, описанных вокруг нее) при неограниченном увеличении числа их сторон.

Увеличение числа сторон правильного вписанного в окружность многоугольника удобно выполнять путем удвоения его сторон.

Отношение длины окружности C к ее диаметру D есть величина постоянная для всех окружностей. Для обозначения этой величины Леонард Эйлер в 1748 г. предложил применять малую греческую букву π (пи):

$$\frac{C}{D} = \pi.$$

Таким образом, задача вычисления длины окружности C сводится к вычислению числа π, так как

$$C = \pi D = 2\pi R.$$

Поскольку длина окружности и ее диаметра несоизмеримы, число π точно вычислено быть не может и представляет собой бесконечную непериодическую десятичную дробь.

Это было строго доказано только в 1882 г. Ф. Линдеманом, показавшим, что число π трансцендентно, т. е. оно не может быть корнем какого-либо алгебраического уравнения.

Для определения приближенной величины числа π, следует вписать в окружность какой-либо правильный многоугольник, вычислить его периметр и разделить этот периметр на диаметр описанной окружности. Точность вычисления числа π возрастает при увеличении числа сторон такого многоугольника. Для наглядности приведем табл. 7.

Таблица 7

Число сторон правильного вписанного многоугольника	Отношение периметра многоугольника к диаметру окружности
6	3,0000000
12	3,1058285
24	3,1326286
48	3,1393502
96	3,1410320
192	3,1414525
384	3,1415576
768	3,1415839

Точное значение π (ограничиваясь сорок одним знаком) будет

$$\pi = 3{,}1415\,926\,535\,897\,932\,384\,626\,433\,832\,795\,028\,841\,971\ldots$$

Задача определения длины окружности и площади круга (так называемая «квадратура круга»), т. е. задача вычисления π, привлекала к себе внимание с древних времен. Так, у египтян (2-е тысячелетие до н. э.) $\pi = 3{,}1605$, у вавилонян и древних китайцев $\pi = 3$, во II в. н. э. Чжан-Хен брал $\pi = \sqrt{10} = 3{,}162\ldots$

Идея вычисления π как общего предела вписанных и описанных правильных многоугольников принадлежит Архимеду ($\sim$ 287—212 до н. э.), получившему оценки

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

Взяв их среднее арифметическое, найдем $\pi = 3{,}14185$, т. е. определим π с погрешностью, меньшей чем 0,0003.

Пользуясь методом Архимеда, французский математик Внета вычислил 9 знаков π, Романус — 17, а Ван Цейлен — 32. Дальнейшие вычисления требовали огромного труда и поэтому результат Ван Цейлена оставался рекордным, пока для вычисления π не были применены методы дифференциального и интегрального исчисления. Воспользовавшись этими методами, Ньютон (1642—1727) сравнительно легко вычислил 14 знаков, а Эйлер (1707—1783) — 20, затем при помощи новых формул Мэшин (1706) получил 100 знаков, Рихтер (1855) — 500 и Шенкс (1874) — 707 знаков.

Новые возможности возникли после создания электронных цифровых вычислительных машин. В 1945 г. с помощью ЭЦВМ были проверены вычисления Шенкса и оказалось, что у него верны только первые 528 знаков.

В 1949 г. число π было вычислено с 2000 знаков, а в 1957 г. с 10000 знаков. Интересно отметить, что все цифры в π (если рассматривать достаточно большое их число) встречаются одинаковое число раз, но никакой закономерности в чередовании цифр обнаружить не удалось; они следуют одна за другой совершенно беспорядочно.

Вычисление такого большого количества знаков у π велось главным образом из теоретических интересов; для самых сложных расчетов в настоящее время редко используют больше десяти — пятнадцати знаков.

Запомнить первые 12 знаков π легко при помощи двустишия:

«Это я знаю и помню прекрасно,
их многие знаки мне лишни, напрасно».

Записав каждое слово двустишия цифрой, равной числу букв в нем, мы и получим

$$\pi = 3{,}14159265358...$$

Для многих технических расчетов достаточно знать число π с четырьмя десятичными знаками, т. е.

$$\pi = 3{,}1416.$$

Отношение длин двух окружностей равно отношению их радиусов или диаметров

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{D_1}{D_2}.$$

Длина дуги окружности радиуса R может быть вычислена по формуле

$$l = \frac{\pi n^\circ R}{180^\circ}, \text{ или } l = \varphi R,$$

где n° — градусное измерение дуги, φ — радианное измерение дуги.

Площадь круга определяется как предел последовательности площадей правильных вписанных (или описанных) в этот круг многоугольников при неограниченном увеличении числа их сторон.

Площадь *круга* вычисляется по формуле

$$S = \pi R^2 = \frac{\pi D^2}{4}.$$

Отношение площадей двух окружностей равно отношению квадратов их радиусов или квадратов их диаметров:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{R_1^2}{R_2^2} = \frac{D_1^2}{D_2^2}.$$

Площадь *сектора* равна длине дуги сектора, умноженной на половину радиуса

$$S_{\text{сект}} = \frac{\pi n^\circ R}{180^\circ} \cdot \frac{R}{2} = \frac{\varphi R^2}{2},$$

где n° и φ соответственно градусное и радианное измерение дуги сектора.

Площадь *сегмента* находится как разность между площадью соответствующего сектора и треугольника, образованного его радиусами и хордой.

Можно также сказать, что площадь сегмента равна половине радиуса, умноженной на разность между дугой сегмента и половиной хорды двойной его дуги. Это утверждение следует из рис. 190, на котором $CD = DB$, $BC \perp AO$.

Если градусное измерение дуги сегмента невелико, то площадь сегмента можно вычислять по приближенной формуле

$$S_{\text{сегм}} \approx \frac{2}{3} bh,$$

где b — основание сегмента; h — высота сегмента, часто называемая «стрелкой» (рис. 191).

Более точная приближенная формула имеет вид

$$S_{\text{сегм}} \approx \frac{2}{3} bh + \frac{h^3}{2b}.$$

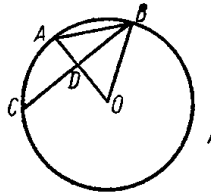


Рис. 190.

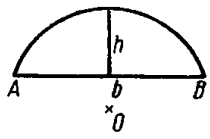


Рис. 191.

Площадь *кольца*, образованного двумя концентрическими окружностями радиусов R_1 и R_2, вычисляется как разность площадей этих кругов. Пусть $R_2 > R_1$, тогда

$$S_{\text{кольца}} = \pi (R_2^2 - R_1^2).$$

З а д а ч а 1. Радиус дуги равен 1200 *мм*, ее длина равна 450 *мм*. Сколько градусов содержит дуга?

Количество градусов, содержащихся в данной дуге, определим по формуле

$$n^\circ = \frac{180^\circ \cdot l}{\pi R},$$

где l — длина дуги; R — радиус дуги. Тогда (в данном случае), взяв $\pi = 3{,}14$, получаем

$$n^\circ = \frac{180^\circ \cdot 450\ мм}{3{,}14 \cdot 1200\ мм} = 21^\circ{,}5 = 21^\circ\, 30';$$

если же взять $\pi = 3{,}1416$, то

$$n^\circ = 21^\circ,\ 4859 = 21^\circ 29',\ 15 = 21^\circ 29' 9''.$$

З а д а ч а 2. Найти радиус такой окружности, для которой ее длина и площадь круга выражаются одним и тем же числом.

Обозначим радиус искомой окружности через R. Тогда по условию задачи должно иметь место равенство $2\pi R = \pi R^2$, откуда найдем $R = 2$.

З а д а ч а 3. Определить площадь круга, если площадь вписанного в него квадрата равна Q квадратным единицам.

Площадь квадрата через его диагональ выражается формулой

$$Q = \frac{1}{2} d^2,$$

откуда

$$d = \sqrt{2Q}.$$

Но диагональ квадрата равна диаметру описанной окружности, т. е.

$$2R = \sqrt{2Q},$$

следовательно, площадь круга

$$S = \pi R^2 = \frac{\pi Q}{2}.$$

Задача 4. Радиус сектора равен r, а его площадь равна Q. Определить величину центрального угла.

Учитывая формулы для площади сектора и длины его дуги, получаем

$$Q = \frac{1}{2} r \cdot \frac{\pi r n^\circ}{180^\circ},$$

откуда

$$n^\circ = \frac{2Q}{\pi r^2} 180^\circ.$$

Задача 5. Вокруг правильного треугольника с площадью Q описана окружность и в этот же треугольник вписана другая окружность. Определить площадь кольца между этими окружностями.

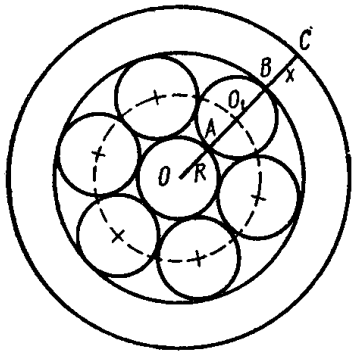


Рис. 192.

Площадь правильного треугольника через его высоту выражается по формуле

$$Q = \frac{h^2\sqrt{3}}{3},$$

откуда

$$h = \sqrt{Q\sqrt{3}}.$$

Радиусы описанного и вписанного кругов соответственно равны

$$R = \frac{2}{3}h; \quad r = \frac{1}{3}h.$$

Площадь кольца

$$S = \pi(R^2 - r^2) = \pi\left(\frac{4}{9}h^2 - \frac{1}{9}h^2\right) = \frac{\pi h^2}{3} = \frac{\pi Q\sqrt{3}}{3}.$$

Задача 6. Дан круг, которого касаются шесть равных ему кругов, касающихся также и между собой. Площадь всех семи кругов равновелика площади концентрического кольца, описанного около данной конфигурации кругов. Доказать, что ширина кольца равна радиусу кругов.

Обозначим радиус данного круга O через R, а ширину кольца BC через x (рис. 192).

Площадь кольца по условию задачи равна площади семи равных кругов радиуса R; следовательно,

$$\pi(OC^2 - OB^2) = \pi[(3R + x)^2 - (3R)^2] = 7\pi R^2,$$

откуда

$$x^2 + 6Rx - 7R^2 = 0.$$

Поскольку $x > 0$, то из двух корней полученного квадратного уравнения следует выбрать только положительный корень $x = R$, являющийся искомым ответом.

Задача 7. Построить окружность, касающуюся данной окружности O радиуса r и данной прямой l в данной на ней точке N.

Проведем через точку N прямую $m \perp l$ (рис. 193).

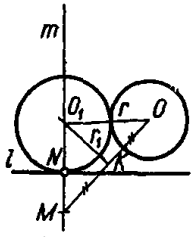


Рис. 193.

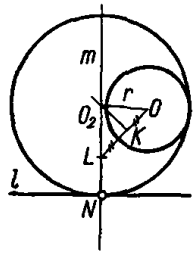


Рис. 194.

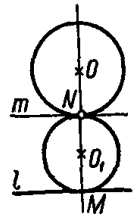


Рис. 195.

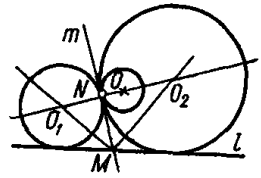


Рис. 196.

А. Отложив на прямой m от точки N по другую сторону от прямой l относительно данной окружности O отрезок $NM = r$, соединим точки O и M. Через середину отрезка OM проведем перпендикуляр до пересечения его в точке O_1 с прямой m. Точка O_1 есть центр искомой окружности, а $O_1N = r_1$ — ее радиус ($\triangle O_1MO$ — равнобедренный).

Б. Отложив от точки N вверх отрезок $NL = r$ (рис. 194) и выполнив построения, аналогичные изложенным в пункте A, получим окружность O_2, также удовлетворяющую условиям задачи. Таким образом, задача имеет два решения.

Ход построения не изменяется и в том случае, если прямая l пересекает окружность O. В частности, если прямая l проходит через центр данной окружности, построение выполняется особенно просто. Рекомендуем выполнить его самостоятельно.

Если данная прямая касается данной окружности, построение также выполняется очень просто (выполнить самостоятельно).

Задача 8. Построить окружность, касающуюся данной окружности O в данной точке N и данной прямой l.

Проведем прямую m, касающуюся окружности O в точке N. Для этого следует провести радиус ON и восставить в точке N прямую $m \perp ON$.

А. Если $m \parallel l$, то опускаем из точки O перпендикуляр OM на прямую l. На отрезке NM, как на диаметре, строим окружность (рис. 195). В этом случае построение единственное.

Б. Если прямая m не параллельна прямой l, то из точки M пересечения прямых m и l (рис. 196) проводим биссектрисы обоих смежных углов при прямой l до их пересечения с прямой ON в точках O_1 и O_2, которые и будут центрами искомых окружностей. Данная окружность O имеет с одной из искомых окружностей внутреннее касание.

В случае, когда прямая l пересекает данную окружность O, задача также имеет два решения, и снова одна из искомых окружностей с данной окружностью будет иметь внутреннее касание. Выполнить построение.

§ 24. Степень точки относительно данной окружности. Радикальная ось. Радикальный центр

Степенью точки A относительно данной окружности O радиуса R называется разность между квадратом расстояния точки A от центра O и квадратом радиуса, т. е., обозначив степень точки A через T, имеем

$$T = AO^2 - R^2.$$

Если точка A лежит вне окружности, то ее степень *положительна*, а если внутри окружности — *отрицательна*. Если точка A лежит на окружности ($AO = R$), то ее степень равна *нулю*.

Для внешней точки A величина ее степени равна квадрату касательной.

Для внутренней точки A абсолютная величина ее степени равна квадрату наименьшей полухорды, проходящей через эту точку.

Радикальной осью двух окружностей O_1 и O_2 называется прямая, все точки которой имеют равные степени относительно данных окружностей. Эта прямая перпендикулярна к линии центров данных окружностей. Касательные, проведенные из любой точки радикальной оси к окружностям O_1 и O_2, равны между собой.

Расстояние m_1 и m_2 радикальной оси от центров O_1 и O_2 данных окружностей вычисляются по формулам

$$m_1 = \frac{1}{2}\left(O_1O_2 + \frac{R_1^2 - R_2^2}{O_1O_2}\right),$$

$$m_2 = \frac{1}{2}\left(O_1O_2 - \frac{R_1^2 - R_2^2}{O_1O_2}\right).$$

Построение радикальной оси двух окружностей. 1. В случае, когда окружности O_1 и O_2 пересекаются в точках M и N, каждая из точек M и N принадлежит обеим окружностям и, следовательно, имеет относительно окружностей O_1 и O_2 нулевую степень. В этом случае радикальная ось проходит через точки M и N.

2. Аналогично для внутренне или внешне касающихся окружностей радикальная ось является их общей касательной, перпендикулярной линии центров.

3. Пусть даны две окружности O_1, O_2, одна из которых лежит внутри другой, но не касается ее (рис. 197). Проведем вспомогательную окружность O_3 так, чтобы она пересекла окружность O_1 в точках K и L, а окружность O_2 — в точках M и N. Прямые KL и MN продолжим до пересечения в точке P. Через точку P проведем $PQ \perp O_1O_2$. Прямая PQ и будет радикальной осью окружностей O_1 и O_2.

Проверить при помощи построений, что при различном выборе центра O_3 (соблюдая лишь условие пересечения окружностью O_3 двух заданных окружностей O_1 и O_2) результат будет одним и тем же.

4. Для двух окружностей O_1 и O_2, расположенных одна вне другой и не имеющих общих точек, радикальная ось строится аналогично (рис. 198).

Радикальные оси любых трех попарно взятых окружностей O_1, O_2 и O_3 пересекаются в одной точке, которая называется радикальным центром трех окружностей (рис. 199). Другими словами, *радикальный центр* трех окружностей O_1, O_2 и O_3 можно определить как точку, степени которой относительно окружностей O_1, O_2 и O_3 равны.

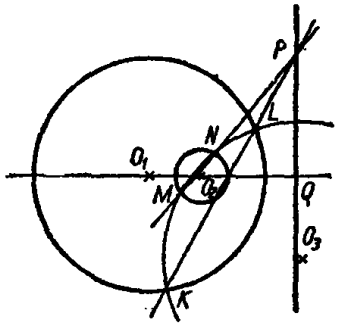


Рис. 197.

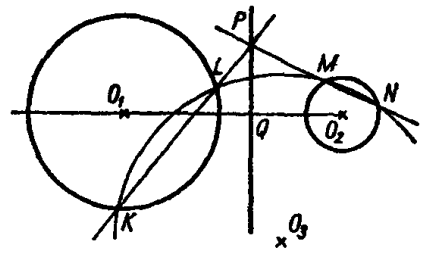


Рис. 198.

Если центры всех трех окружностей находятся на одной прямой, то все три радикальные оси между собой параллельны и, следовательно, радикального центра таких трех окружностей не существует.

Если центры трех данных окружностей не лежат на одной прямой, то радикальный центр находится как точка пересечения любых двух из трех радикальных осей, в частности, общих касательных, если хотя бы одна окружность касается двух других или если все три окружности касаются между собой (рис. 200).

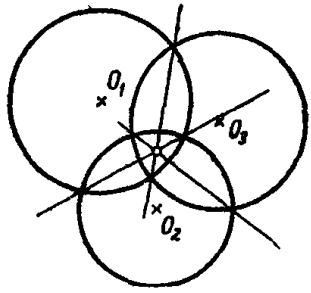


Рис. 199.

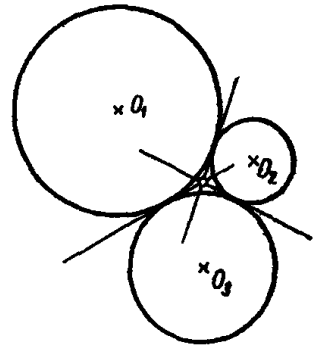


Рис. 200.

§ 25. Вписанные и описанные многоугольники

Многоугольник называется *вписанным в окружность*, если все его вершины лежат на этой окружности. Такая окружность называется *описанной* около многоугольника.

Многоугольник называется *описанным около окружности*, если все его стороны касаются этой окружности. Такая окружность называется *вписанной* в многоугольник.

В произвольный многоугольник нельзя вписать и вокруг него нельзя описать окружность.

Около всякого треугольника можно описать окружность и притом только одну.

Центр описанной около треугольника окружности является точкой пересечения перпендикуляров к сторонам треугольника, восставленных в их серединах.

Во всякий треугольник можно вписать окружность и притом только одну.

Центр вписанной в треугольник окружности является точкой пересечения биссектрис внутренних углов треугольника.

Радиус описанной около треугольника окружности по его сторонам и полупериметру вычисляется с помощью формулы

$$R=\frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}};\quad p=\frac{a+b+c}{2}.$$

Радиус вписанной в треугольник окружности вычисляется по формуле

$$r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

Во всяком описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны между собой.

Во всяком вписанном четырехугольнике сумма противоположных углов равна 180°.

Справедливы и обратные утверждения.

Теорема Птолемея. *В выпуклом четырехугольнике, вписанном в окружность, произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон.*

Теорема Паскаля. *Если шестиугольник вписан в окружность и противоположные его стороны не параллельны, то точки пересечения продолжений этих сторон лежат на одной прямой.*

Теорема Брианшона. *Если шестиугольник описан около окружности, то прямые, соединяющие его противоположные вершины, пересекаются в одной точке.*

З а д а ч а 1. Доказать, что произведение двух сторон треугольника равно произведению высоты, проведенной к третьей стороне, на диаметр окружности, описанной около этого треугольника.

Пусть $\triangle ABC$ вписан в окружность O; $BD \perp AC$ (рис. 201). Проведем диаметр BM и хорду AM.

$\triangle BDC \sim \triangle BAM$, так как $\angle AMB = \angle BCD$, как углы, опирающиеся соответственно на одну и ту же дугу, $\angle MAB = \angle BDC = 90°$ и, следовательно,

$$\frac{AB}{MB}=\frac{BD}{BC},$$

т. е.

$$AB \cdot BC = BD \cdot MB,$$

что и требовалось доказать.

Задача 2. Доказать, что если четырехугольник со взаимно перпендикулярными диагоналями вписан в окружность, то сумма квадратов противоположных сторон четырехугольника равна квадрату диаметра описанной окружности.

Применяя результат, полученный в предыдущей задаче к треугольникам ABC и ADB, получаем (рис. 202):

$$AB \cdot BC = 2R \cdot BM,$$
$$AB \cdot AD = 2R \cdot AM.$$

Возводя оба равенства в квадрат и складывая, находим

$$AB^2(BC^2 + AD^2) = 4R^2(BM^2 + AM^2).$$

Учитывая, что $AB^2 = BM^2 + AM^2$, и сокращая полученное равенство на эту величину, окончательно имеем

$$BC^2 + AD^2 = 4R^2 = D^2.$$

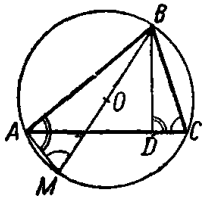


Рис. 201.

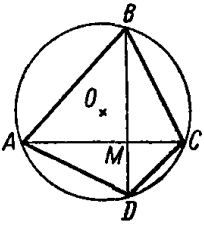


Рис. 202.

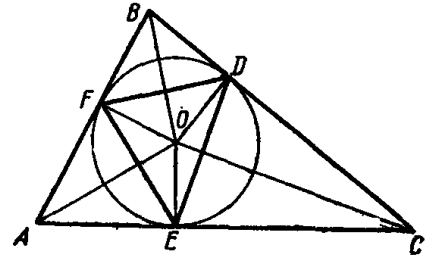


Рис. 203.

Задача 3. В треугольник ABC, стороны которого $BC = a$, $AC = b$ и $AB = c$, вписана окружность. Найти длины отрезков, соединяющих точки касания.

По свойству касательных к окружности, выходящих из одной точки, находим, что $AE = AF$, $BF = BD$ и $CD = CE$ (рис. 203). Рассматривая четырехугольники $AEOF$, $BFOD$ и $CDOE$, легко показать, что $AO \perp EF$, $BO \perp FD$ и $CO \perp DE$.

Из $\triangle AEO$ ($\angle AEO = 90°$) находим его площадь

$$S = \frac{1}{2} AE \cdot OE = \frac{1}{2} AO \cdot \frac{1}{2} FE$$

или

$$FE = \frac{2AE \cdot OE}{AO}. \qquad (1)$$

Известно, что $OE = r = \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$, где p — полупериметр $\triangle ABC$. Учитывая, что $AE = AF$, $BF = BD$, $CD = CE$, находим, что $AE + CD = b$, $CD + BF = a$, $BF + AE = c$ и $AE + CD + BF = p$. Отсюда

$$AE = p - a,\ BF = p - b,\ CD = p - c,$$

тогда

$$OA = \sqrt{AE^2 + OE^2} = \sqrt{\frac{bc(p-a)}{p}}.$$

Подставив найденные значения OA, OE и AE в формулу (1), получим

$$EF = 2(p-a)\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}.$$

Аналогично находим длину остальных двух искомых отрезков:

$$ED = 2(p-c)\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

и $$FD = 2(p-b)\sqrt{\frac{(c-a)(p-c)}{ac}}.$$

З а д а ч а 4. Определить отношение радиуса вписанной в равносторонний треугольник окружности к радиусу описанной окружности.

В равностороннем $\triangle ABC$ его три медианы, биссектрисы и высоты совпадают и пересекаются в одной точке — центре треугольника. Радиусом описанной окружности будет отрезок, соединяющий центр O с одной из вершин треугольника (рис. 204), а вписанной — апофема OD (см. § 26). Но так как AO еще и биссектриса, то $\angle OAD = 30°$, а $\triangle AOD$ — прямоугольный; следовательно, $\frac{OD}{AO} = \frac{1}{2}$.

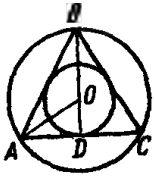


Рис. 204.

З а д а ч а 5. Доказать, что апофема правильного треугольника равна половине радиуса описанной окружности. Выполнить рисунок.

$\triangle ABC$ — правильный, OM — апофема ($OM \perp BC$; O — центр треугольника). Соединим вершины A, B, C с центром O, тогда $OA = OB = OC = R$, где R — радиус описанной окружности. Так как OB — биссектриса треугольника, то $\angle OBM = \angle ABO = 30°$, а $\triangle OBM$ — прямоугольный, OM — катет, лежащий против угла 30°; значит

$$OM = \frac{OB}{2} = \frac{R}{2}.$$

З а д а ч а 6. Окружность вписана в трапецию, периметр которой равен P. Построить рисунок и определить среднюю линию трапеции.

Окружность вписана в трапецию $ABCD$, $P = AB + BC + CD + AD$. По свойству сторон описанного четырехугольника $AD + BC = AB + CD$. Следовательно, $P = 2(AD + BC)$, а средняя линия трапеции m равна

$$m = \frac{1}{2}(AD + BC) = \frac{1}{4}P.$$

З а д а ч а 7. В треугольник вписан круг так, что две из его сторон делятся точками касания в отношениях $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$. Построить рисунок и найти отношения сторон треугольника.

Обозначим $AD = mx$, $DB = nx$, $CE = py$, $BE = qy$. Тогда $AB : BC : CA = (mx + nx) : (py + qy) : (mx + py)$. По свойству отрез-

ков касательных, проведенных к окружности из одной и той же точки, $DB = BE$ или $nx = qy$. Отсюда

$$\frac{x}{y} = \frac{q}{n}$$

и, следовательно,

$$AB : BC : CA = (mq + nq) : (pn + qn) : (mq + np) = q(m + n) : \\ : n(p + q) : (mq + np).$$

§ 26. Правильные многоугольники

Многоугольник называется *правильным*, если он имеет равные стороны и равные углы.

Каждый угол правильного n-угольника равен $\frac{180^\circ (n-2)}{n}$.

Центром правильного многоугольника называется точка, равноотстоящая от всех его вершин. Центр находится также на одинаковых расстояниях от сторон многоугольника.

Радиусами правильного многоугольника называются отрезки, соединяющие его центр с вершинами.

Апофемами правильного многоугольника называются отрезки перпендикуляров, опущенных из его центра до пересечения со сторонами.

Вокруг правильного n-угольника можно описать и в него можно вписать окружность. Центры описанной и вписанной окружностей совпадают с центром многоугольника. Радиус описанной вокруг правильного многоугольника окружности равен его радиусу, а радиус вписанной окружности — апофеме многоугольника.

Правильные одноименные многоугольники подобны, их стороны относятся как апофемы или радиусы, а площади относятся как квадраты апофем или радиусов.

Сторона b_n правильного описанного многоугольника выражается через сторону a_n правильного вписанного многоугольника с тем же числом сторон и радиус R окружности по формуле

$$b_n = \frac{2Ra_n}{\sqrt{4R^2 - a_n^2}}.$$

Сторона a_{2n} правильного вписанного в окружность радиуса R многоугольника с удвоенным числом сторон выражается через сторону a_n правильного вписанного n-угольника с помощью формулы

$$a_{2n} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}}.$$

Соотношения между сторонами некоторых правильных вписанных многоугольников и радиусом круга определяются следующим образом:

$$a_3 = R\sqrt{3} \approx 1{,}7321\ R,$$
$$a_4 = R\sqrt{2} \approx 1{,}4142\ R,$$

$$a_5 = R\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} \approx 1{,}755\ R,$$

$$a_6 = R,$$

$$a_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}} \approx 0{,}7654\ R,$$

$$a_{10} = R\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}6180\ R,$$

$$a_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}} \approx 0{,}5176\ R,$$

$$a_{15} = \frac{1}{4}R\left[\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)\right] \approx 0{,}4158R.$$

Задача 1. В данную окружность вписать правильный шестиугольник и треугольник.

Раствором циркуля, равным радиусу окружности, делаем на ней засечки в точках A, B, C, D, E, F. Соединяя точки A, B, C, D, E, F подряд, получим правильный шестиугольник. Соединяя их через одну, получим правильный (равносторонний) треугольник (рис. 205).

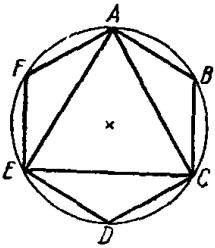


Рис. 205.

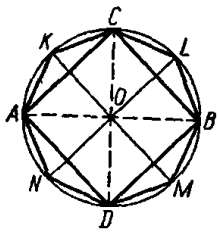


Рис. 206.

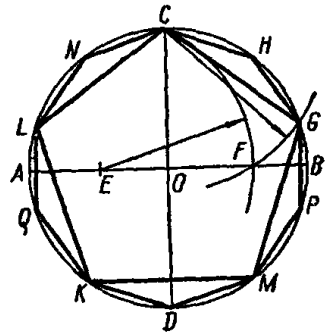


Рис. 207.

Задача 2. Вписать в данную окружность квадрат и правильный восьмиугольник.

Проведем в данной окружности O два взаимно перпендикулярных диаметра AB и CD. Соединив точки A, D, B, C, получаем квадрат.

Опустив из центра O на стороны квадрата перпендикуляры и продолжив их до пересечения с окружностью, разделим ее на восемь равных частей. Точки деления окружности являются вершинами правильного восьмиугольника (рис. 206).

Задача 3. В данную окружность вписать правильный пятиугольник и правильный десятиугольник.

Проведем два взаимно перпендикулярных диаметра AB и CD. Разделим пополам радиус AO в точке E. Из E радиусом EC проводим дугу CF, пересекая ею диаметр AB в точке F. Из C радиусом CF проводим дугу FG, пересекая ею данную окружность в точке G, тогда $CG = CF$ есть одна из сторон искомого пятиугольника. Проведя тем же радиусом дугу из центра G, получаем следующую вершину M искомой фигуры и т. д. (рис. 207).

Отметим, что отрезок OF равен стороне правильного, вписанного в данную окружность десятиугольника, т. е.

$$CN = NL = LQ = \ldots = HC = OF$$

Поэтому можно ограничиться только построением отрезка $OF = a_{10}$, затем строим все вершины правильного десятиугольника, соединив их через одну, получим правильный пятиугольник.

Упражнения. 1. Построить правильные, описанные вокруг данной окружности треугольник и шестиугольник.

2. Построить правильные описанные вокруг данной окружности пятиугольник и десятиугольник.

§ 27. Сводная таблица частных случаев четырехугольников

Введем обозначения: a, b, c, d — стороны, α, β, γ, δ — углы, h — высота, p — полупериметр, k, l — диагонали, φ — угол между диагоналями, R — радиус описанной окружности, r — радиус вписанной окружности, S — площадь.

Таблица 8

Вид четырехугольника	Определения, формулы, свойства, соотношения между элементами
Трапеция	$c \parallel a$; c и a — основания; b и d — стороны. Средняя линия m (отрезок EF, соединяющий середины боковых сторон) параллельна основаниям и равна их полусумме: $m = \frac{a+c}{2}$; $S = mh = \frac{a+b}{2}h = \frac{1}{2}kl\sin\varphi$. Центр тяжести лежит на отрезке, соединяющем середины оснований на расстоянии $\frac{h}{3}\cdot\frac{a+2c}{a+c}$ от нижнего основания
Равнобочная трапеция	$c \parallel a$; $b = d$; $h^2 = b^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2$; $k = l$, $\alpha = \delta$; $\beta = \gamma$
Вписанный четырехугольник	$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$; $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$; $R = \frac{1}{4S}\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}$; $l = \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}}$ (l — диагональ, замыкающая стороны a и b); $k = \sqrt{\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}}$ (k — диагональ, замыкающая стороны a и d); $kl = ac + bd$ (теорема Птолемея)

Продолжение табл. 8

Вид четырехугольника	Определения, формулы, свойства, соотношения между элементами
Описанный четырехугольник	$a + c = b + d$; $S = pr$
Параллелограмм	$a \parallel c$, $b \parallel d$; $a = c$, $b = d$; $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$; $\alpha + \beta = \beta + \gamma = \gamma + \delta = \delta + \alpha = 180°$. Диагонали, пересекаясь, делятся взаимно пополам; точка пересечения диагоналей — центр тяжести, $k^2 + l^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2(a^2 + b^2)$; $S = ab \sin\alpha = ah = \frac{1}{2} kl \sin\varphi$
Прямоугольник	$a \parallel c$, $b \parallel d$; $a = c$, $b = d$; $k = l$, $k^2 = a^2 + b^2$; $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 90°$; $S = ab = \frac{1}{2} l^2 \sin\varphi$
Ромб	$a = b = c = d$; $k \perp l$, $\varphi = 90°$, $k^2 + l^2 = 4a^2$; $\alpha = \gamma$; $\beta = \delta$; $\alpha + \beta = \beta + \gamma = \gamma + \delta = \delta + \alpha = 180°$; $S = \frac{1}{2} kl = a^2 \sin\alpha$
Квадрат	$a = b = c = d$; $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 90°$; $k \perp l$, $\varphi = 90°$; $k = l = a\sqrt{2}$; $S = a^2 = \frac{1}{2} l^2$; $R = \frac{1}{2} l$; $r = \frac{1}{2} a$

Геометрические задачи на построение с помощью циркуля и линейки

§ 28. Простейшие задачи на построение

1. Разделить данный отрезок пополам.

Из концов A и B данного отрезка AB одним и тем же произвольным, но большим половины отрезка AB, радиусом R описываем две дуги, которые пересекаются в двух точках C и D. Точки C и D соединяем прямой CD. Точка N пересечения прямых AB и CD является искомой, делящей отрезок AB пополам (рис. 208).

2. Восставить перпендикуляр к данной прямой в данной на ней точке N.

Построение можно выполнить, применяя предыдущий прием. На данной прямой AB следует лишь отложить по обеим сторонам от точки N равные отрезки $AN = NB$, а затем повторить все построение, указаиное на рис. 208.

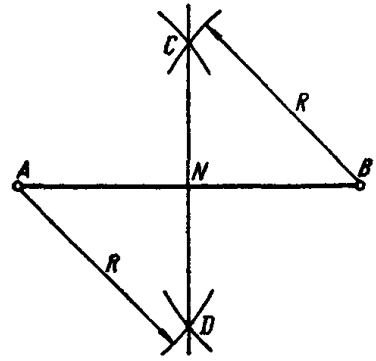


Рис. 208.

Можно поступить также следующим образом. Взяв произвольную точку O вне данной прямой AB, проводим из нее, как из центра, окружность радиуса ON. Через вторую точку M пересечения окружности O с прямой AB проводим диаметр MOK.

Соединив коиец диаметра K с точкой N, получаем $KN \perp AB$, так как вписанный угол KNM опирается на диаметр (см. § 22).

Этим способом удобно восставлять перпендикуляр в конце отрезка, не продолжая его, а также в точке, лежащей близко к краю чертежного листа.

3. Опустить перпендикуляр на задаиную прямую из данной точки C, лежащей вие ее.

Построение можно выполнить, применяя прием деления отрезка пополам. Следует лишь получить на заданной прямой две засечки A и B при помощи дуги с центром в точке C произвольного радиуса R большего, чем расстояние от точки C до прямой AB. Выполнить рисунок.

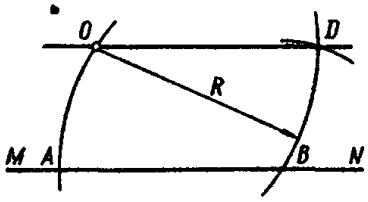


Рис. 209.

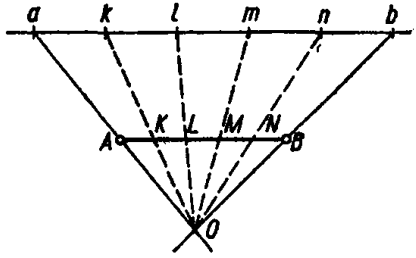


Рис. 210.

4. Через данную точку O провести прямую, параллельную заданной прямой MN.

Описываем дугу произвольным раднусом R с центром в точке O. Из точки пересечения B, лежащей на заданной прямой MN, как из центра, тем же радиусом R описываем дугу OA. Затем раствором циркуля радиуса AO из точки B делаем засечку и получаем точку D. Прямые OD и MN параллельны (рис. 209).

5. Разделить данный отрезок AB на данное число равных частей.

Проводим прямую ab, параллельную AB, на которой откладываем заданное число равных отрезков произвольной длины, например $ak = kl = lm = mn = nb$ (рис. 210). Далее, проводим прямые aA, bB и через точку их пересечения O проводим лучи kO, lO, mO, nO, которые

и пересекут AB в точках K, L, M, N, делящих AB на заданное число равных частей (в нашем примере на 5).

6. Данный отрезок разделить на части, пропорциональные данным величинам.

Построение аналогично описанному в задаче 5. Следует лишь на прямой ab отложить отрезки, равные данным величинам.

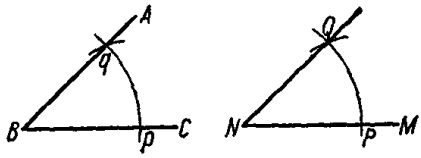


Рис. 211.

7. На луче NM в вершине N построить угол, равный заданному углу ABC.

Из вершины B описываем дугу pq произвольного радиуса и тем же радиусом из центра N проводим дугу, пересекающую луч NM в точке P. Из точки P радиусом, равным отрезку pq, делаем засечку и найденную точку Q соединяем с вершиной N. Угол QNM — искомый (рис. 211).

8. Построить углы, равные 30, 60 и 90°.

Из концов A и B произвольного отрезка AB, как из центров, описываем радиусом $R = AB$ две дуги. Точки их пересечения C и D соединяем прямой, которая пересечет отрезок AB в его середине O. Точку A соединяем прямой с точкой C. Тогда $\angle ACO = 30°$, $\angle CAO = 60°$, $\angle AOC = 90°$. Построить самостоятельный рисунок.

9. Данный угол BAC разделить пополам.

Из вершины A произвольным радиусом проводим дугу DE. Из точек D и E ее пересечения со сторонами AB и AC описываем произвольными равными радиусами дуги ab, cd. Точку их пересечения F соединяем с A; полученная прямая AF делит угол BAC пополам, т. е. является его биссектрисой (рис. 212).

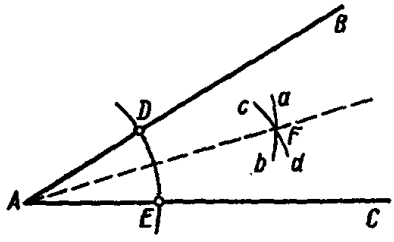


Рис. 212.

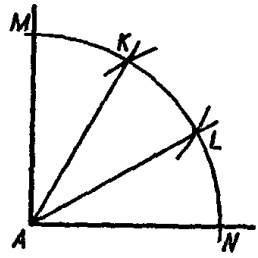


Рис. 213.

10. Разделить прямой угол на три равные части.

Произвольным радиусом проводим дугу с центром в вершине A данного угла до ее пересечения в точках M и N с его сторонами. Этим же радиусом из точек M и N, как из центров, на дуге MN делаем две засечки K и L, которые соединяем с вершиной A (рис. 213).

$$\angle MAK = \angle KAL = \angle LAN = 30°.$$

11. Разделить данный угол BAC на три равные части.

С помощью линейки без делений и циркуля точно выполнить это построение, которое называют трисекцией угла, нельзя. Однако с помощью циркуля и меченой линейки (т. е. линейки с нанесенной на нее равномерной шкалой, например миллиметровой) трисекцию угла

легко выполнить следующим образом. Произвольным радиусом AC описываем из вершины угла A окружность. Продолжаем AC за точку A. Кладем меченую линейку так, чтобы она проходила через B, и вращаем ее вокруг B до тех пор, пока отрезок ED между окружностью и прямой AK не станет равным радиусу AC. Тогда угол EDF есть треть угла BAC (рис. 214). Это легко доказать, пользуясь тем, что, согласно построению, $\triangle DEA$ равнобедренный, а тогда по теореме о внешнем угле треугольника

$$\angle BEA = 2x;\ \angle BAC = \alpha = x + 2x,\ \text{где } x = \angle EDA.$$

12. Через две данные точки A и B провести окружность заданным радиусом R.

Из точек A и B проводим дуги ef и mn радиусом R. Точка их пересечения есть центр искомой окружности. Построить рисунок.

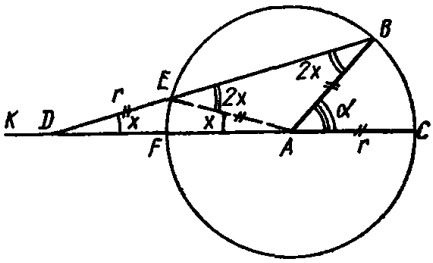


Рис. 214.

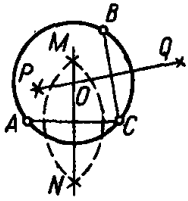


Рис. 215.

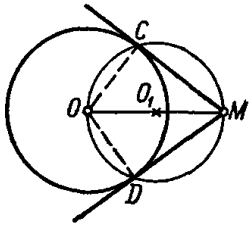


Рис. 216.

Замечание. Задача имеет решение только в том случае, если R больше или равно половине отрезка AB.

13. Провести окружность через три данные точки A, B, C, не лежащие на одной прямой.

Проводим перпендикуляры MN и PQ к отрезкам AC и BC через их середины. Точка пересечения этих перпендикуляров O есть центр искомой окружности (рис. 215).

14. Найти центр данной окружности или ее дуги.

На данной окружности или дуге выбираем три точки. Затем поступаем, как в предыдущей задаче. Точки следует брать на возможно более далеком расстоянии друг от друга.

15. Данную дугу окружности разделить пополам.

Концы дуги соединяем хордой. Проводим перпендикуляр через середину хорды (см. задачу 1), который и разделит дугу пополам.

16. Через данную точку M провести касательную к данной окружности O.

А. Точка M лежит на окружности. В этом случае в конце M радиуса OM восставляем перпендикуляр $AM \perp OM$. Прямая AM является искомой касательной (построить рисунок).

Б. Точка M лежит вне окружности. Соединив точки O и M, на отрезке OM, как на диаметре, строим окружность O, центр которой O_1 есть середина отрезка OM (рис. 216). Точки C и D пересечения окружностей O и O_1 соединяем с точкой M. Прямые CM и DM — искомые касательные, так как $\angle OCM = \angle ODM = 90°$, как вписанные в окружность O_1 углы, опирающиеся на диаметр OM.

17. К двум данным окружностям провести общую внешнюю касательную.

А. В случае, когда радиусы данных окружностей равны между собой, задача имеет два решения. Через центры A и B проводим диаметры KK_1 и LL_1, перпендикулярные к линии центров AB. Проведя KL и K_1L_1, имеем искомые решения. Построить рисунок.

Б. Пусть радиусы даиных окружностей не равны: $R > r$; из центра большего круга A проводим окружность радиусом $AC = R - r$. К ней проводим касательную BC из центра B меньшего круга. Центр A соединяем с точкой касания C прямой. Продолжаем ее и получаем на большей окружности точку D. Проводнм отрезок BE перпендикулярно к BC до пересечения в точке E с меньшей окружностью. Точки D и E соединяем. Прямая DE — искомая касательная. Задача допускает два решения (DE и D_1E_1), если меньший круг не лежнт целиком внутри большего (рис. 217).

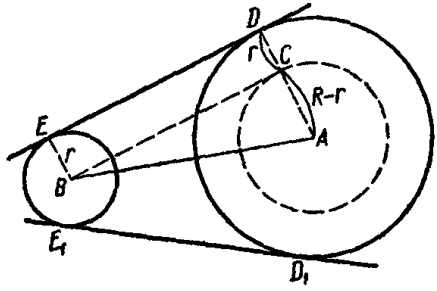
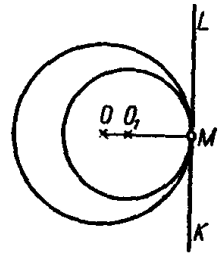


Рис. 217.



Рнс. 218.

В случае внутреннего касания задача имеет одно решение. Через точку касания M проводим прямую, перпендикуляриую радиусу OO_1M (рис. 218).

18. К двум данным окружностям провести общую внутреннюю касательную.

В случае внешнего касания заданных окружностей A и B задача имеет лишь одно решение. Через точку касания M проводим прямую, перпендикулярную линии центров AB.

Если окружности не имеют общих точек и не лежат одна внутри другой, то задача имеет два решения.

Из центра A большей окружности проведем окружность радиусом $AC = R + r$.

Из центра B меньшей окружностн проведем касательные к построенной вспомогательной окружности. Точку касания C и центр A соединим прямой AC, которая пересечет бо́льшую окружность в точке D. Из точки B проведем радиус $BE \perp BC$. Точку E соединим с точкой D. Прямая ED является нскомой касательной. Аналогично строится и вторая внутренняя касательная E_1D_1 (рис. 219). Точка N пересечения внутренних касательных всегда лежит на линии центров.

В случае, когда одна из окружностей лежит полностью внутри другой или пересекает ее в двух точках, задача решения не имеет.

Рассмотрите также случай $R = r$ и докажите, что в этом случае касательная пройдет через середину отрезка AB.

19. Построить параллелограмм по его сторонам и высоте. Пусть даны стороны параллелограмма a, b н его высота h_a. На произвольной прямой l от произвольно взятой на ней точки A отложим отрезок $AD = a$. На расстоянии h_a от прямой l проведем прямую $k \parallel l$. Из точки A,

как из центра, радиусом $AB = b$ сделаем на прямой k засечку. От точки B на прямой k отложим отрезок $BC = a$. Соединим точки A, B и точки D, C (рис. 220).

Фигура $ABCD$ — параллелограмм. Задача имеет два решения.

Отметим, что в частном случае $h_a = b$ фигура $ABCD$ — прямоугольник, а при $a = b > h_a$ получим ромб. Если же $h_a > b$, задача решений не имеет.

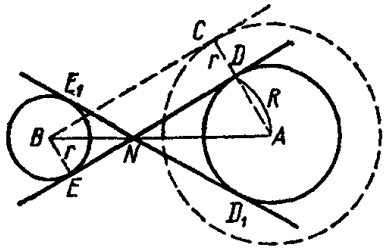


Рис. 219.

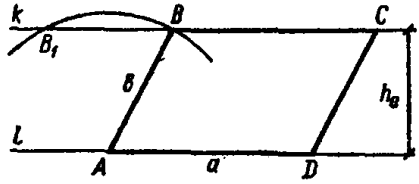


Рис. 220.

20. Построить треугольник по основанию a, боковой стороне b и высоте h_a.

Начало построения аналогично предыдущей задаче. Следует лишь, построив точку B (рис. 220), соединить ее с точкой D, и мы получим $\triangle ABD$, который и будет искомым.

Как и в предыдущей задаче, в случае $h_a = b$ решений нет; в случае $h_a = b$ решение единственное; в случае $h_a < b$ задача имеет два решения.

21. Построить треугольник по трем сторонам a, b, c.

Отложим на произвольно взятой прямой от какой-либо ее точки B один из данных отрезков, например $BC = a$. Из точек B и C радиусами, равными соответственно $R_1 = b$ и $R_2 = c$, проведем дуги двух окружностей до их пересечения в точке A (рис. 221). $\triangle ABC$ — искомый.

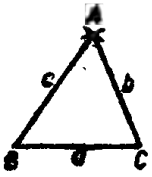


Рис. 221.

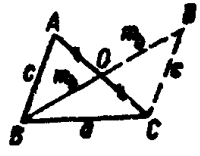


Рис. 222.

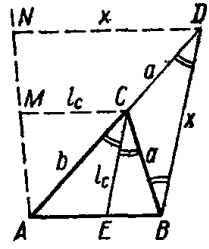


Рис. 223.

Условие существования решения: сумма двух любых сторон треугольника должна быть больше третьей стороны.

Эта задача как составная часть встречается при решении многих более сложных задач на построение.

22. Построить треугольник по двум сторонам a, c и медиане m_b.

Строим $\triangle BDC$ (рис. 222) по трем сторонам $BC = a$, $BD = 2m_b$, $DC = c$. Через середину O стороны BD проводим прямую COA, где $OC = OA$. Точку B соединяем с точкой A; $\triangle ABC$ — искомый.

Аналогично строится параллелограмм по двум его сторонам и диагонали, а также параллелограмм по его диагоналям и одной из сторон.

При этом следует учесть, что диагонали параллелограмма в точке пересечения взаимно делятся пополам. Выполнить эти построения самостоятельно.

23. Построить треугольник по двум сторонам a, b и биссектрисе угла между ними l_c.

Предположим, что $\triangle ABC$ — искомый. Продолжив сторону AC и отложив на ее продолжении отрезок $CD = BC = a$, соединим точки B и D (рис. 223).

Треугольник BCD — равнобедренный, причем $\angle D = \angle B = \angle ECB$, так как согласно теореме о внешнем угле треугольника

$$\angle ACB = \angle B + \angle D = 2\angle D,$$

а с другой стороны, по условию задачи l_c—биссектриса и, следовательно,

$$\angle ACB = 2\angle ECB = 2\angle D.$$

Углы ECB и CBD есть внутренние накрестлежащие, поэтому из их равенства вытекает, что $EC \parallel BD$, а тогда $\triangle AEC \sim \triangle ABD$ и сторона $BD = x$ будет определяться из пропорции

$$\frac{x}{l_c} = \frac{a+b}{b}.$$

Итак, мы получили все необходимые данные для того, чтобы фактически построить искомый треугольник.

Прежде всего определим отрезок x, как четвертый, пропорциональный к трем заданным отрезкам b, $a+b$, l_c. Для этого на произвольно выбранной прямой AD последовательно откладываем отрезки $b = AC$ и $a = CD$. Из точки C в произвольном направлении откладываем заданный отрезок $l_c = CM$ и через точку M продолжаем луч AM, а затем проводим $DN \parallel CM$. Отрезок DN равен искомому отрезку x. Найдя x, строим на отрезке CD вспомогательный $\triangle CDB$ по известным трем сторонам $CD = BC = a$ и $DB = x$ (см. задачу 21). Соединив найденную вершину B с точками A и C, получим искомый треугольник ABC.

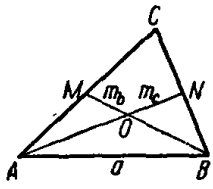


Рис. 224.

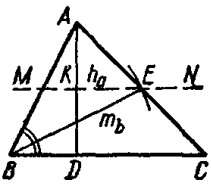


Рис. 225.

24. Построить треугольник по основанию a и медианам боковых сторон m_b и m_c.

Строим треугольник AOB по трем сторонам a, $\frac{2}{3}m_b$, $\frac{2}{3}m_c$ (рис. 224). Отложив на продолжении BO отрезок $OM = \frac{1}{3}m_b$ и на продолжении AO отрезок $ON = \frac{1}{3}m_c$, проводим прямые AM и BN до их пересечения в точке C. $\triangle ABC$ — искомый.

25. Построить треугольник по его высоте h_a, меднане m_b и углу B.

Построим прямоугольный треугольник ABD по стороне $AD = h_a$ и углу B (рис. 225). Через середину K катета AD проведем прямую $MN \parallel BD$. Радиусом $R = m_b$ из точки B проводим дугу до ее пересе-

чения в точке E с прямой MN. Продолжим прямые BD и AE до их пересечения в точке C. ΔABC — искомый.

26. Построить треугольник по трем медианам.

Построим вспомогательный треугольник AED по трем сторонам $AE = \frac{2}{3} m_c$, $AD = \frac{2}{3} m_a$, $DE = \frac{2}{3} m_b$ (рис. 226). В этом треугольнике проведем медиану AP и продолжим ее за точку P на отрезок $PC =$

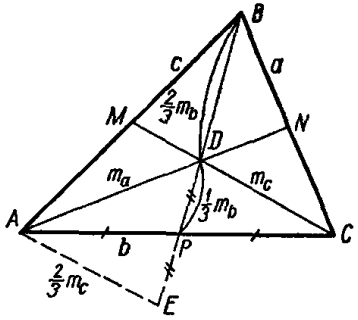


Рис. 226.

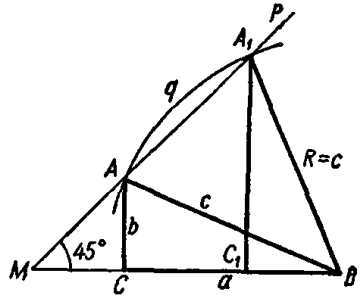


Рис. 227.

$= AP$. Точку C соединим с точкой D и, продолжив отрезок CD, отложим на нем $CM = m_c$. От точки A на продолжении отрезка AD отложим $AN = m_a$. Через точки A и M, N и C проведем прямые до их пересечения в точке B. ΔABC — искомый.

27. Построить прямоугольный треугольник по сумме его катетов $a + b$ и гипотенузе c.

Из конца M отрезка $BM = a + b$ проводим луч MP под углом 45° к отрезку MB (рис. 227). Из точки B, как из центра, радиусом $R = c$ проводим дугу q до ее пересечения с лучом MP и из полученных точек A и A_1 опускаем перпендикуляры AC и A_1C_1 на прямую MB. Треугольники ABC и A_1BC_1 — искомые ($BC = A_1C_1 = a$; $AC = BC_1 = b$).

В случае двух точек пересечения дуги q с лучом AP задача имеет два решения.

В случае касания дуги q с лучом AP — одно решение.

Исследуйте, какое дополнительное условие надо наложить на катеты a и b для того, чтобы решение было единственным.

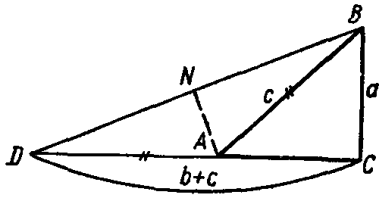


Рис. 228.

28. Построить прямоугольный треугольник по его катету a и сумме другого катета с гипотенузой $b + c$.

Строим прямоугольный треугольник BDC по катетам $BC = a$, $DC = b + c$ (рис. 228). Через середину N стороны BD проводим перпендикуляр до его пересечения с прямой DC в точке A. Соединяем точки A и B. ΔABC — искомый ($AD = AB$ как стороны равнобедренного треугольника ABD).

29. Построить равнобедренный треугольник по его основанию c и радиусу вписанной окружности r.

На произвольной прямой отложим отрезок $AB = c$ и к точке N, которая делит его пополам, восставим перпендикуляр. На этом пер-

пендикуляре отложим отрезок $ON = r$, из точки O, как из центра, проводим окружность заданного радиуса r, которая будет касаться основания AB. Из точек A и B проводим касательные к данной окружности O, которые пересекутся в точке C. Полученный $\triangle ABC$ — искомый. Построить рисунок.

30. Построить треугольник, если даны два его угла A и B и сумма двух его сторон $b + c$.

Предположим, что задача решена и $\triangle ABC$ есть искомый. Найдем связь между искомыми и данными его элементами. Отложим на продолжении стороны AB отрезок $DA = AC$ и соединим точки C и D. Треугольник ACD — равнобедренный; следовательно, учтя теорему о внешнем угле треугольника, находим, что $\angle CDA = \angle DCA = \frac{1}{2}\angle A$ (рис. 229).

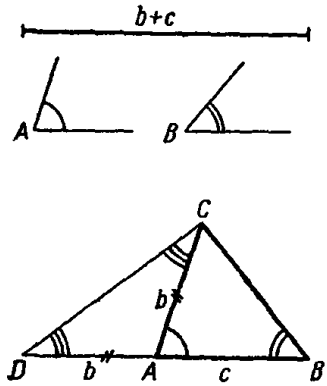


Рис. 229.

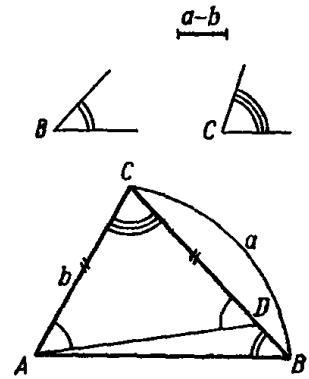


Рис. 230.

В треугольнике BCD известно основание $DB = b + c$, равное заданному отрезку $(b + c)$, и два прилежащих угла: $\angle CDB = \frac{1}{2}\angle A$ и $\angle CBD = \angle B$, так что его легко построить. Выполнив фактически это построение, с которого и надо начинать решение данной задачи, получим две вершины B и C искомого треугольника. Третья его вершина A одновременно является вершиной вспомогательного равнобедренного треугольника DCA, в котором известно основание CD и углы при основании, равные $\frac{1}{2}\angle A$. Этот треугольник также легко построить; в результате получим вершину A. Соединив точки A и C, получаем искомый треугольник ABC.

31. Построить треугольник, если даны разность сторон $a - b$ и два угла B и C.

Предположим, что $\triangle ABC$ — искомый (рис. 230). На стороне BC от точки B откладываем отрезок $BD = a - b$ и соединяем точки A и D. Тогда $DC = AC = b$,

$$\angle CAD = \angle ADC = \frac{180^\circ - \angle C}{2} = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle C.$$

Следовательно,

$$\angle ADB = 180° - \left(90° - \frac{\angle C}{2}\right) = 90° + \frac{1}{2}\angle C.$$

Поскольку $DB = a - b$, то легко построить $\triangle ABD$ по известному осиованию, равному заданному отрезку $(a - b)$ и двум прилежащим углам $\angle ADB = 90° + \frac{1}{2}\angle C$ и $\angle DBA = \angle B$, и определить таким образом положение вершии A и B. После этого вершина C определится как вершина равиобедренного треугольиика ADC, для которого будут известны основания AD и $\angle ADC = \angle CAD = 90° - \frac{1}{2}\angle C$.

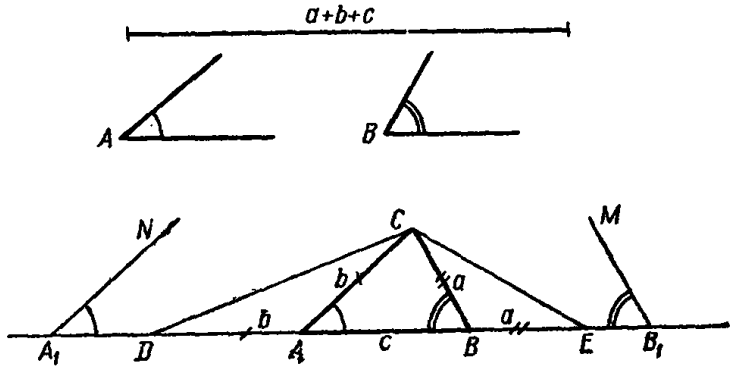


Рис. 231

32. Построить треугольник, если даны его периметр $2p = a + b + a$ и два угла A и B.

Пусть $\triangle ABC$ построен (рис. 231). Продолжив в обе стороиы отрезок AB, отложим на прямой AB отрезки $AD = b$ и $BE = a$ и соединим вершину C с точками D и E. Тогда $DE = a + b + c$; $\angle D = \frac{1}{2}\angle A$; $\angle E = \frac{1}{2}\angle B$. Следовательно, $\triangle DCE$ легко построить по заданному основанию и двум прилежащим углам. Этим определяется вершиna C. Далее через точку C следует провести прямые AC и BC так, чтобы они составляли с прямой DE заданные углы. Для этого, построив на прямой DE при произвольных точках A_1 и B_1 углы, равные заданным $\angle A_1 = \angle A$ и $\angle B_1 = \angle B$, проводим через точку C $AC \parallel A_1N$, $BC \parallel B_1M$.

33. Построить параллелограмм по его диагоиалям d_1, d_2 и одной из сторои, например a.

По трем сторонам $AB = a$, $AO = \frac{1}{2}d_1$, $BO = \frac{1}{2}d_2$ строим треугольник AOB, стороны которого AO и BO продолжим за точку O на отрезки, равиые соответственно $OC = AO$ и $OD = BO$ (рис. 232). Последовательно соединяем точки A, B, C, D. Фигура $ABCD$ — искомый параллелограмм.

34. Построить трапецию по четырем сторонам a, b, c, d ($a \parallel b$).

Строим $\triangle CBE$ по трем сторонам $EC = c$, $CB = d$ и $BE = a - b$. На продолжении BE откладываем $AE = b$. Из точки A радиусом $R_1 = c$ и из точки C радиусом $R_2 = b$ проводим две дуги, которые пересекутся в точке D. Соединим точку D с точками A и C (рис. 233). Фигура $ABCD$ — искомая трапеция.

35. Построить трапецию по основаниям a, b, боковой стороне c и высоте h.

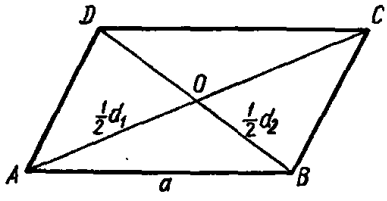


Рис. 232.

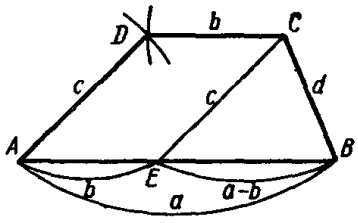


Рис. 233.

Проведем две параллельные прямые на расстоянии h. На одной из параллельных прямых отложим отрезок $AB = a$. Из точки A радиусом $R = c$ проведем дугу до ее пересечения с другой параллельной прямой в точке D (рис. 234). От точки D отложим отрезок $DC = b$. Соединим точки C и B. Трапеция $ABCD$ есть искомая.

36. К стороне заданного острого угла провести перпендикулярную прямую, отрезок которой, заключенный внутри угла, был бы равен данному отрезку a.

Из произвольной точки N, лежащей на стороне AB данного острого угла ABC, восставим перпендикуляр и на нем от точки N внутрь угла отложим отрезок $NM = a$.

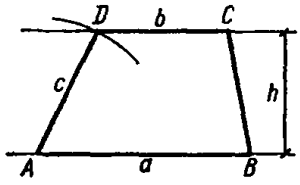


Рис. 234.

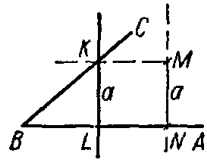


Рис. 235.

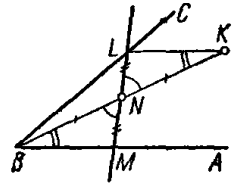


Рис. 236.

Проведем прямую $MK \parallel AB$ до ее пересечения со стороной угла BC в точке K. Из точки K опустим перпендикуляр KL на сторону AB. Прямая KL — искомая, так как $KL \perp AB$ и $KL = MN = a$ (рис. 235).

37. Через точку N внутри данного угла ABC провести прямую, отрезок которой, заключенный внутри угла, делился бы точкой N пополам.

Через вершину угла B и данную точку N проведем прямую, на продолжении которой от точки N отложим отрезок $NK = BN$ (рис. 236).

Через точку K проведем прямую, параллельную стороне AB, до ее пересечения со стороной BC в точке L. Через точки L и N проведем прямую LNM, которая и будет искомой.

Действительно, $\triangle BMN = \triangle KLN$, так как $\angle BNM = \angle LNK$, $\angle LKN = \angle NBM$ и по построению $BN = NK$. Следовательно, $LN = MN$.

38. Провести биссектрису угла, вершина которого срезана и лежит за пределами рисунка.

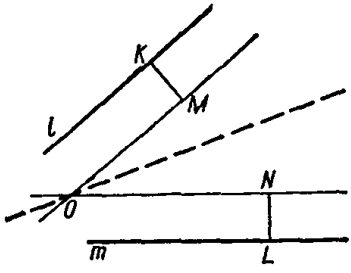


Рис. 237.

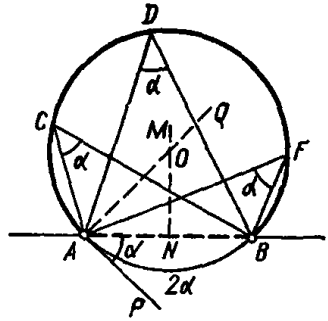


Рис. 238.

Из двух произвольных точек K и L, взятых на сторонах l и m данного угла, восставляем перпендикуляры, на которых откладываем равные отрезки $KM = LN$ (рис. 237).

Через точки M и N проводим параллельно сторонам данного угла прямые $MO \parallel l$, $NO \parallel m$, которые, пересекаясь, образуют $\angle NOM$.

Биссектриса вспомогательного угла NOM, которую строим изложенным ранее приемом, будет одновременно и биссектрисой данного угла со сторонами m и l.

*39. Построить геометрическое место точек (см. § 29), из которых данный отрезок AB виден под заданным углом α.

Отложим на произвольной прямой отрезок AB. Из конца этого отрезка A под заданным углом α проведем луч AP (рис. 238). От луча AP по другую сторону отрезка AB проведем перпендикуляр $AQ \perp AP$. Из середины N отрезка AB восставим перпендикуляр $NM \perp AB$.

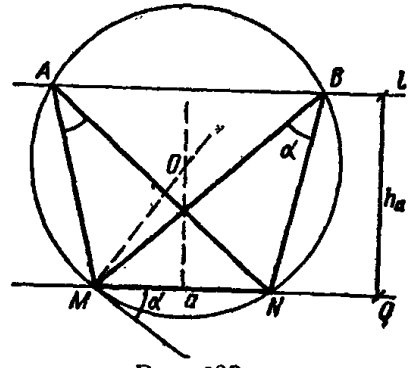


Рис. 239.

Из точки O пересечения прямых AQ и NM, как из центра, радиусом $R = AO$ проведем окружность. Любой из вписанных углов ACB, ADB, AFB и т. д. равен заданному углу α, так как все эти углы опираются на дугу $ANB = 2\alpha$ (см. § 22). Следовательно, дуга ADB и дуга, симметричная с ней относительно AB, являются искомым геометрическим местом точек, так как только для каждой точки этих дуг отрезок AB виден под заданным углом α. Точки любой другой дуги или линии, а также и любые другие изолированные точки этим свойством не обладают.

Отметим, что из каждой точки дополняющей дуги ANB отрезок AB виден под одним и тем же углом

$$\beta = 180° - \alpha.$$

Сами точки A и B надо исключить из рассмотрения. Построенную дугу ADB называют также *дугой, вмещающей данный угол* α.

40. Построить треугольник по основанию a, высоте h_a и углу при вершине α (рис. 239).

Строим дугу $MABN$, вмещающую данный угол α и опирающуюся на данную хорду $MN = a$ (см. предыдущую задачу). Из произвольной точки Q прямой MN восставляем к ней перпендикуляр и на нем от точки Q откладываем заданную высоту h_a. Проводим прямую $l \parallel MN$, проходящую на расстоянии h_a от прямой MN.

Если прямая l пересекает окружность O в двух точках, задача имеет два решения.

Если прямая l является касательной к окружности O, задача имеет одно решение.

Исследуйте, в каких случаях задача вообще не имеет решений.

У п р а ж н е н и я. 1. Построить квадрат по его стороне AB или по его диагонали AC.

2. Построить треугольник по основанию b, медиане m_b и высоте h_b.

3. Через данную точку A провести прямую, от которой данная окружность O отсекала бы хорду данной длины Q.

§ 29. Метод геометрических мест точек

Понятие о геометрическом месте точек является важным не только в геометрии, но и в других разделах математики.

З а м е ч а н и е. Термин «геометрическое место точек» был введен еще древнегреческим ученым и философом Аристотелем (384—322 гг. до н. э.), который представлял себе линию, как некоторое «место», где могут быть размещены точки.

Понятие линии как следа движущейся точки, или как совокупности точек возникло значительно позже.

Соответственно новейшим взглядам на геометрические фигуры, базирующимся на теории множеств, следовало бы устаревший термин «геометрическое место точек» заменить современным научным термином «множество точек».

Однако в связи с тем, что по укоренившейся традиции терминами «геометрическое место точек», «метод геометрических мест» и другими пользуются еще миллионы преподающих и изучающих математику и эти термины употребляются в подавляющем большинстве научных и методических изданий, мы также используем ниже термин «геометрическое место точек», понимая под этим термином «множество точек, имеющих соответствующее условию данной задачи свойство».

Геометрическим местом точек называется множество всех точек, обладающих одним или несколькими общими свойствами. Это определение не утверждает, что точки некоторого геометрического места не могут иметь и других свойств, характерных лишь для части данных точек или даже для одной из них.

Одно и то же условие может определять различные геометрические места точек в зависимости от того, где оно осуществляется: на прямой линии, на плоскости или в пространстве.

Если геометрическое место точек каким-либо образом определено, то наложение дополнительных условий существенно изменяет характер данного геометрического места, сужает его. Условия, определяю-

щие геометрическое место точек, могут задаваться с помощью некоторых данных описательного характера, а также с помощью аналитических выражений: уравнений, их систем, неравенств и т. д.

Во втором случае используется принцип взаимно одиозначного соответствия точек прямой линии и вещественных чисел, точек плоскости и пар вещественных чисел, точек трехмерного пространства и троек вещественных чисел, являющихся соответственно одномерными, двумерными и трехмерными координатами точки.

В элементарной математике рассматриваются также геометрические места точек на комплексной плоскости.

Примеры.

1. Геометрическим местом точек на прямой, равноудаленных от точек A и B этой прямой, является одна единственная точка C — середина отрезка AB. Геометрическим местом точек на плоскости, равноудаленных от концов отрезка AB, являются все точки перпендикуляра, проходящего через середину отрезка AB. Ни одна другая точка плоскости, не лежащая на данном перпендикуляре, этим свойством не обладает и, следовательно, не принадлежит к рассматриваемому геометрическому месту точек.

В пространстве таким геометрическим местом точек будет плоскость, перпендикулярная к AB и проходящая через середину этого отрезка.

2. Геометрическим местом точек, равноудаленных на данное расстояние a от данной точки O, является окружность радиуса $R = a$ с центром в точке O (и шар радиуса $R = a$ в случае пространства).

В этом параграфе рассматриваются лишь примеры геометрических мест точек на плоскости.

3. Геометрическим местом точек, равноудаленных от сторон данного угла, является биссектриса этого угла, а геометрическим местом точек, равноудаленных от двух пересекающихся прямых, являются биссектрисы вертикальных углов, образованных этими прямыми.

4. Геометрическим местом точек, равноудаленных от вершин данного треугольника, является лишь одна точка — центр описанной вокруг этого треугольника окружности, а геометрическим местом точек, равноудаленных от сторон данного треугольника, является центр вписанной в него окружности — точка пересечения биссектрис его внутренних углов.

5. Геометрическим местом точек, находящихся от данной прямой l на расстоянии a, являются две параллельные прямые, расположенные по обе стороны прямой l на расстоянии a от нее.

6. Геометрическим местом вершин треугольников, построенных на данном основании a и имеющих данную площадь S, являются две, параллельные основанию, прямые, находящиеся по обе стороны от него на расстоянии

$$h = \frac{2S}{a}.$$

7. Геометрическим местом центров окружностей равных радиусов R, касающихся данной окружности O радиуса R_1, является:

а) в случае $R > R_1$ — две окружности радиусов $R_2 = R_1 + R$ и $R_3 = R_1 - R$ с центрами в точке O;

б) в случае $R < R_1$ — две окружности радиусов $R_2 = R + R_1$ и $R_3 = R - R_1$ с центрами в точке O;

в) в случае $R = R_1$ — окружность удвоенного радиуса $R_2 = R + R_1 = 2R$ с центром в точке O и сама точка O, т. е. окружность нулевого радиуса $R_3 = R - R_1 = 0$.

Сущность решения задач на построение с помощью метода геометрических мест точек состоит в следующем:

а) из нескольких условий, данных в задаче, оставляют лишь одно, отбросив остальные. Этим самым задача превращается в неопределенную, т. е. имеющую бесконечное множество решений. Обычно это множество решений находится легко, так как является элементарным геометрическим местом точек;

б) построив соответствующее геометрическое место точек, рассматривают какое-либо другое условие задачи и строят еще одно геометрическое место точек и т. д.

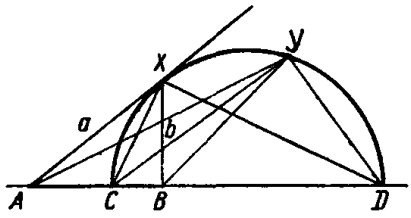


Рис. 240.

Общие точки, принадлежащие всем геометрическим местам, построенным по условиям задачи, и дают окончательный результат — искомую фигуру, линию и т. д.

При решении некоторых задач § 28 мы уже пользовались методом геометрических мест точек, например в задачах 19—21.

З а д а ч а 1. Найти геометрическое место точек, отношение расстояний которых от концов данного отрезка есть заданная постоянная величина.

Дан отрезок AB (рис. 240) и некоторое число $\frac{a}{b}$. Радиусами, равными a и b (или радиусами, им пропорциональными), описываем из точек A и B, как из центров, две дуги. Точка X пересечения этих дуг будет одной из искомых точек. Разделив угол AXB и смежный с ним пополам прямыми XC и XD, получим на прямой AB две точки C и D, также принадлежащие искомому геометрическому месту, так как $AC : CB = a : b$ и $AD : BD = a : b$, причем точки A, B, C, D образуют гармоническую группу точек. Так как $\angle CXD$ — прямой, то точка X лежит на окружности, описанной на CD, как на диаметре. Покажем, что каждая точка этой окружности принадлежит искомому геометрическому месту. Возьмем на окружности произвольную точку Y и соединим ее с точками A, B, C и D. Пары точек A, B и C, D гармонически сопряжены и, кроме того, угол DYC — прямой, как опирающийся на диаметр, а поэтому

$$\angle AYC = \angle BYC,$$

следовательно,

$$\frac{AY}{BY} = \frac{AC}{CB} = \frac{a}{b}.$$

З а д а ч а 2. Построить геометрическое место середин хорд, проходящих через одну точку окружности.

Пусть дана окружность O и на ней точка M (рис. 241). Точка O принадлежит искомому геометрическому месту, так как она является серединой диаметра, а следовательно, наибольшей хордой, проходящей через точку M.

Проведем произвольную хорду MN и ее середину K соединим с центром O. Угол MKO — прямой по построению. К искомому геометрическому месту точек, следовательно, принадлежат вершины прямых углов всех прямоугольных треугольников, построенных на отрезке MO как на гипотенузе. Таким образом, искомое геометрическое место точек представляет собой окружность, построенную на отрезке MO как на диаметре.

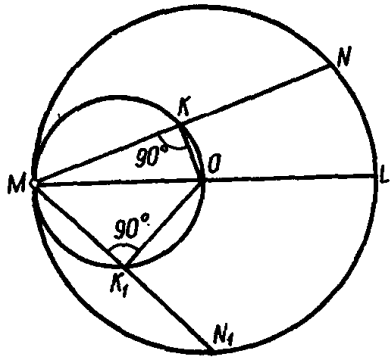


Рис. 241.

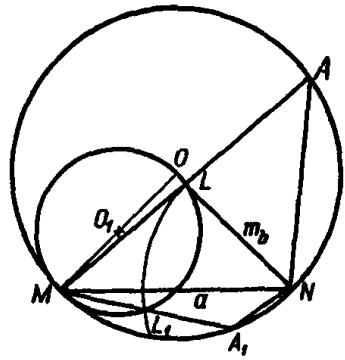


Рис. 242.

Задача 3. В данную окружность O вписать треугольник, имеющий данное основание a и медиану m_b (рис. 242).

Из произвольной точки M окружности, как из центра, радиусом $r = a$ проведем дугу до ее пересечения с окружностью O в точке N. Хорда $MN = a$, таким образом, построена.

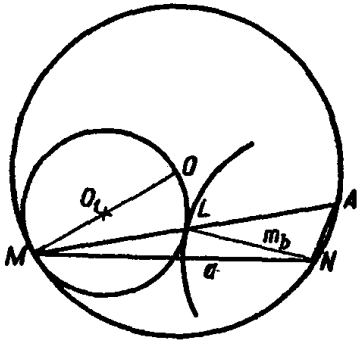


Рис. 243.

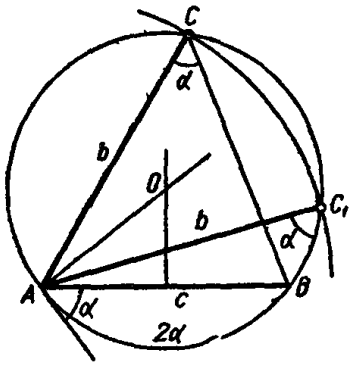


Рис. 244.

На отрезке MO как на диаметре построим окружность O_1. Из точки N, как из центра, радиусом $R = m_b$ проведем дугу до ее пересечения с окружностью O_1 в точке L. Соединим точки M и L и отрезок ML продолжим до пересечения с окружностью O в точке A. Треугольник MNA — искомый. Задача может иметь два решения: $\triangle MNA$ и $\triangle MNA_1$ (рис. 242), одно решение (рис. 243) и ни одного.

Задача 4. Построить треугольник по основанию c, боковой стороне b и углу при вершине α.

Строим геометрическое место точек, из которых данный отрезок $AB = c$ виден под данным углом (см. задачу 39 § 28). Из двух дуг с хордой $AB = c$, вмещающих данный угол α, рассмотрим лишь одну.

Вторым геометрическим местом точек будет окружность с центром в точке A и радиусом $R = b$.

Оба геометрических места могут иметь две общие точки, одну и ни одной. Соответственно этому задача может иметь два решения (рис. 244), одно (рис. 245) или ни одного (рис. 246).

Упражнения. 1. Найти геометрическое место точек, расстояние которых от одной из двух параллельных прямых в три раза больше, чем от другой.

2. Найти геометрическое место точек, являющихся вершинами треугольников с данным основанием и с данной медианой, проведенной к этому основанию.

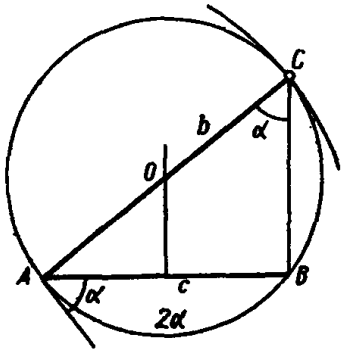


Рис. 245.

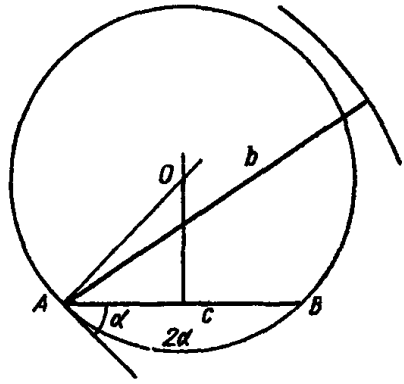


Рис. 246.

3. Найти геометрическое место середин отрезков прямых, параллельных одной из диагоналей параллелограмма и расположенных внутри него.

4. Построить квадрат, стороны которого проходят через четыре данные точки. Всегда ли эта задача будет иметь решение?

5. На стороне данного угла найти точку, равноудаленную от другой стороны и от данной внутри угла точки.

§ 30. Метод подобия

Во многих задачах на построение удается разделить условие задачи на две такие части, что одна из них вполне определяет форму фигуры, которую требуется построить, а другая часть определяет размер этой фигуры. Сущность метода подобия заключается в том, что, используя те элементы условия задачи, которые определяют форму искомой фигуры, можно сначала построить фигуру, подобную искомой. Затем, используя элементы, определяющие размер, при помощи подобного преобразования выполняется построение искомой фигуры.

Этот метод удобен, когда только одна из данных в задаче величин есть длина, а остальные величины — углы или отношения каких-либо линейных элементов.

Задача 1. В данный угол ABC вписать окружность, которая проходила бы через данную внутри этого угла точку M.

Проведем биссектрису BL угла ABC и прямую BM. Центр искомой окружности должен лежать на BL, однако его положение на BL нам неизвестно.

Построим вспомогательную окружность, вписанную в $\angle ABC$. Ее центр O также должен лежать на BL (рис. 247). При пересечении окружности O с прямой BM получим две точки P и Q. Соединим точки P и Q с центром O и проведем через точку M прямые $MO_1 \parallel PO$

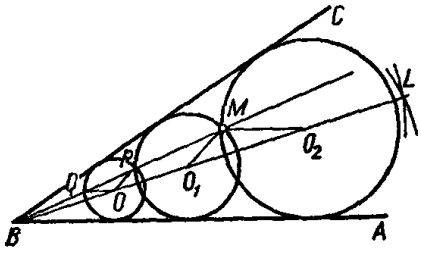


Рис. 247.

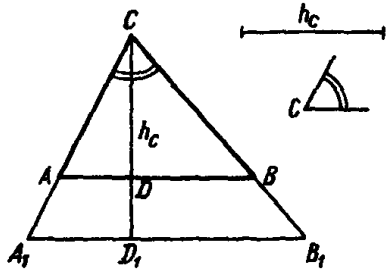


Рис. 248.

и $MO_2 \parallel QO$. Точки O_1 и O_2 будут центрами двух окружностей, которые можно вписать в $\angle ABC$ так, чтобы они проходили через точку M. Таким образом, задача имеет два решения. Центром подобия является точка B.

Задача 2. Построить треугольник по отношению его сторон $a : b$, высоте h_c и углу C.

Возьмем два произвольных отрезка m и n так, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{m}{n} = \frac{a}{b}.$$

По отрезкам m, n и углу между ними C построим треугольник A_1B_1C, подобный искомому. Этим самым установлена форма искомого треугольника. Далее выполним подобное преобразование $\triangle A_1B_1C$ так, чтобы высота искомого $\triangle ABC$ была равна данной высоте h_c. Для этого на высоте CD_1 треугольника A_1B_1C (или на продолжении высоты CD_1) отложим отрезок $CD = h_c$ и через точку D проведем прямую $AB \parallel A_1B_1$ (рис. 248). Треугольник ABC — искомый.

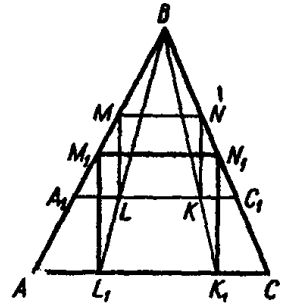


Рис. 249.

Задача 3. В данный треугольник вписать квадрат так, чтобы две его вершины лежали на боковых сторонах треугольника, а две другие вершины — на основании.

В данном $\triangle ABC$ проведем $MN \parallel AC$ и на отрезке MN построим квадрат $KLMN$ (рис. 249). Продолжив в обе стороны отрезок KL, получим на сторонах треугольника точки A_1, C_1.

$\triangle A_1BC_1 \sim \triangle ABC$. Выполним подобное преобразование квадрата $KLMN$, принимая в качестве центра подобия точку B. Продолжив лучи BL и BK до пересечения их с основанием AC, получим точки L_1 и K_1. Восставив из этих точек перпендикуляры к основанию AC,

получаем точки M_1, N_1. Таким образом, квадрат $K_1L_1M_1N_1$ является вписанным в $\triangle ABC$ согласно условию задачи.

Задача 4. Вписать в данный сегмент квадрат так, чтобы его сторона лежала на хорде, а две вершины на дуге сегмента.

Построение удобно выполнить следующим образом. В концах хорды AB восставим перпендикуляры $AD \perp AB$, $BC \perp AB$, $AD = BC = AB$ (рис. 250). Выполним подобное преобразование квадрата $ABCD$, взяв в качестве центра подобия середину N хорды AB.

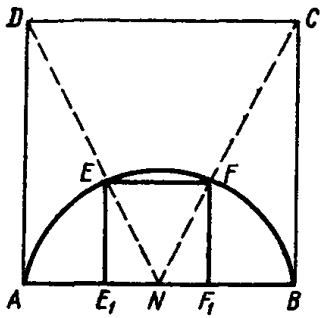


Рис. 250.

На пересечении отрезков DN и CN с дугой данного сегмента получим соответственно точки E и F. Опустив из этих точек перпендикуляры на AB, получаем точки E_1 и F_1. Квадрат EE_1F_1F—искомый.

Упражнения. 1. Построить ромб, если дана его сторона и отношение диагоналей.

2. Построить параллелограмм, если дано отношение его смежных сторон, угол и одна из диагоналей.

3. Построить равнобедренную трапецию, если дано отношение оснований, одна диагональ и угол.

4. В данный ромб вписать квадрат, вершины которого лежали бы на сторонах ромба.

5. В данный круг вписать прямоугольник с данным углом между диагоналями.

§ 31. Метод симметрии

Этот метод решения задач на построение основывается на свойствах осевой и центральной симметрии фигур либо их частей.

Симметрия относительно прямой (оси). *Две точки* A и A', расположенные по разные стороны от прямой MN на одном и том же перпендикуляре к ней и на одинаковом расстоянии от основания L перпендикуляра, называются *симметричными* относительно прямой (оси) MN.

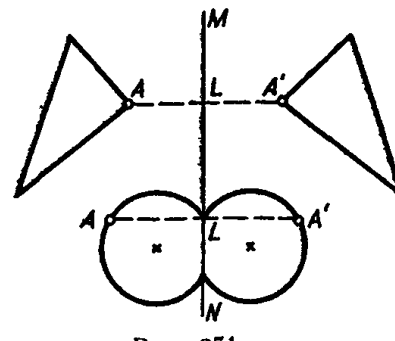


Рис. 251.

Две фигуры называются *симметричными* относительно прямой MN, если каждой точке одной фигуры соответствует симметричная ей относительно оси MN точка другой фигуры. Аналогично определяется осевая симметрия двух частей и одной и той же фигуры (рис. 251).

Любые две фигуры, симметричные относительно какой-нибудь оси, равны. Однако для совмещения таких фигур в общем случае требуется переворот (вынос из плоскости) одной из них.

Симметрия относительно точки (центра). *Две точки* A и A', расположенные на одной прямой с точкой O по разные стороны от нее на

одинаковом расстоянии, называются *симметричными* относительно точки O (рис. 252). Точку O называют также *центром симметрии*.

Если для двух точек A и B какой-нибудь прямой AB построить симметричные им относительно некоторой точки O точки A' и B', то

$$A'B' \parallel AB, \quad A'B' = AB$$

и каждой точке D прямой AB соответствует симметричная ей относительно того же центра O точка D' на прямой $A'B'$ (рис. 252).

Две фигуры называются симметричными относительно точки O, если каждой точке одной фигуры соответствует симметричная ей относительно центра симметрии O точка другой фигуры. Такая симметрия двух фигур называется *центральной симметрией*.

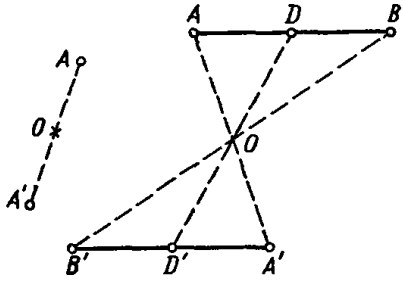


Рис. 252.

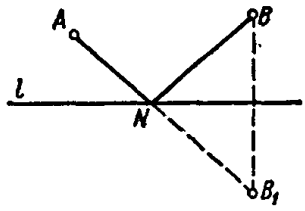


Рис. 253.

Если каждой точке некоторой фигуры соответствует симметричная ей точка этой же фигуры, то говорят, что данная фигура имеет центр симметрии.

Каждую фигуру можно совместить с фигурой ей центрально-симметричной путем ее поворота вокруг центра симметрии на 180°. Центрально-симметричные фигуры можно совместить друг с другом без переворота, т. е. без выноса из плоскости.

Сущность *метода симметрии* решения задач на построение заключается в том, что для данной фигуры (или ее части) выполняют симметричное относительно некоторой оси или точки построение. Это часто дает возможность заметить такие зависимости между элементами фигур (или их частей) данной и симметричной, которые до построения заметить было трудно. Решение задачи при этом существенно облегчается. Успех зависит от характера самой задачи, удачного выбора осей и центров симметрии.

З а д а ч а 1. Дана прямая l и две точки A и B по одну сторону от нее.

Найти на прямой l точку N такую, чтобы сумма $AN + BN$ была наименьшей.

Построим точку B_1, симметричную с точкой B относительно прямой l.

Пусть N — искомая точка (рис. 253). Тогда

$$BN = B_1N \text{ и } AN + NB = AN + NB_1.$$

Сумма $AN + NB_1$ будет наименьшей, если отрезки AN и NB_1 составляют прямую линию. Следовательно, построив точку B_1 и соединив ее с заданной точкой A, получим искомую точку N как точку пересечения прямых l и AB_1.

Задача 2. Даны две окружности с центрами в точках O_1 и O_2 и не пересекающая их прямая AB. Найти на прямой AB такую точку N, чтобы касательные из нее к данным окружностям были наклонены к прямой AB под равными углами (рис. 254).

Строим окружность O_1', симметричную окружности O_1 относительно прямой AB. Проводим общую касательную к окружностям O_1' и O_2. Она пересечет прямую AB в искомой точке N. Задача имеет четыре решения соответственно четырем общим касательным (внешним и внутренним) к окружностям O_1' и O_2 (см. рис. 217 и 219).

Задача 3. В данный угол вписать треугольник наименьшего периметра так, чтобы одна его вершина находилась в точке, данной внутри угла, а две другие на его сторонах. Выполнить построение.

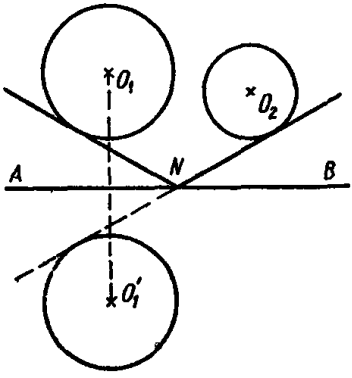


Рис. 254.

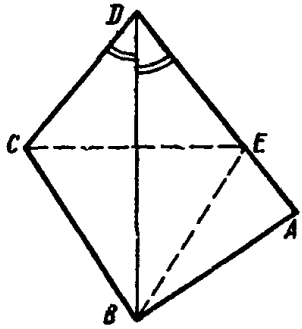


Рис. 255.

Пусть дан угол MON и внутри него точка A. Построим точку A_1, симметричную с данной точкой A относительно прямой OM, и точку A_2, симметричную с точкой A относительно прямой ON. Точки B и C пересечения прямой A_1A_2 с прямыми OM и ON будут вершинами искомого треугольника.

Задача 4. Пусть MN и PQ — перпендикулярные прямые, O — точка их пересечения. Точки A' и A симметричны относительно MN, а точки A'' и A — относительно PQ. Доказать, что точки A' и A'' симметричны относительно точки O. Выполнить построение.

Нужно доказать, что линия $A'OA''$ прямая и $A'O = OA''$. Из равенства прямоугольных треугольников AOK и $A'OK$, AOL и $A''OL$ следует, что $\triangle AOA'$ и $\triangle AOA''$ равнобедренные, а потому $\angle AOK = \angle A'OK$, $\angle AOL = \angle A''OL$; но $\angle AOL + \angle AOK = 90°$; значит, $\angle A''OA + \angle AOA' = 90° + 90° = 180°$, т. е. точки A', O и A'' лежат на одной прямой, при этом $A''O = OA = OA'$, как стороны равнобедренных треугольников с общей боковой стороной OA. Следовательно, точки A' и A'' симметричны относительно центра O.

Задача 5. Построить четырехугольник по четырем сторонам, если известно, что его диагональ делит один из углов пополам.

Пусть диагональ BD четырехугольника $ABCD$ делит угол D пополам (рис. 255). Пусть для конкретности $AD > CD$. Выберем в качестве оси симметрии диагональ BD и, перегнув рисунок по этой оси, на AD получим точку E, симметричную с точкой C относительно BD. Соединим точки B и E. Тогда $BE = BC$, $DE = DC$ и $AE = AD - CD$; следовательно, $\triangle ABE$ можно построить по трем сторонам. Далее

на продолжении AE от точки A откладываем данную сторону AD. Используя данные стороны BC и DC, получаем четвертую вершину C искомого четырехугольника, для чего из точек B и D как из центров радиусами BC и DC проводим дуги, пересечение которых даст точку C.

Упражнение. Построить треугольник по двум сторонам AC и BC и разности углов, лежащих против этих сторон.

§ 32. Метод параллельного переноса

Этот метод оказывается наиболее полезным, когда непосредственное построение искомой фигуры затруднительно в связи с разобщенностью ее элементов. Разобщенность элемеитов искомой фигуры может выразиться не только в отдаленности их друг от друга, но и в отсутствии удобной для решения задачи компоновки этих элементов (включение в треугольник, какой-либо другой фигуры и т. п.).

В этих случаях элементы фигуры переносят параллельно самим себе на такое расстояние, чтобы полученная после переноса фигура могла быть построена более просто, чем искомая. При этом следует стремиться к тому, чтобы вновь полученная фигура включила как можно больше исходных данных.

После построения вспомогательной фигуры и обратного переиоса получаем искомую фигуру с помощью ряда простейших построений или непосредственно.

Задача 1. Построить трапецию по ее основаниям a, b и диагоналям d_1 и d_2.

В трапеции $ABCD$ (рис. 256) диагонали для построения непосредственно использовать не удается. Однако, совершив параллельный перенос диагонали $DB = d_2$ на величину b, замечаем, что $\triangle ACE$ легко может быть построен по трем сторонам $a + b$, d_1 и d_2. Получив точку C, остальные построения выполняем весьма просто. Проведем $CD \parallel AB$ и на прямой DC радиусом, равным d_2, из точки B как из центра делаем засечку D, совершив обратный параллельный перенос диагонали d_2. Точки A, B, C и D соединяем. Фигура $ABCD$ — искомая трапеция.

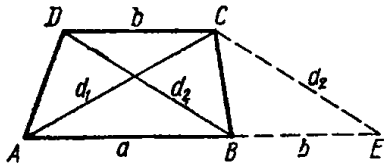


Рис. 256.

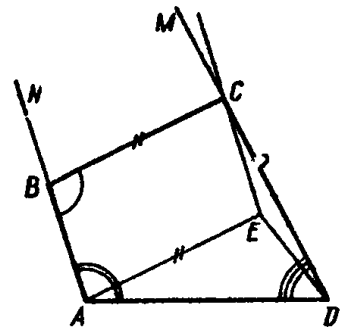


Рис. 257.

Задача 2. Построить четырехугольник по двум противоположным сторонам и трем углам.

Предположим, что четырехугольник $ABCD$ искомый (рис. 257). Перенесем сторону BC параллельно самой себе так, чтобы она проходила через вершину A. По построению $AE = BC$. Соединив точ-

ку E с точкой D, получим $\triangle AED$, в котором известны две стороны AE и AD и угол EAD:

$$\angle EAD = \angle BAD - \angle BAE,$$

где

$$\angle BAE = \angle NBC = 180° - \angle ABC.$$

Построив $\triangle AED$, проведем $EC \parallel AN$ и луч из точки D под заданным углом ADM. На пересечении этих прямых и получим точку C. Далее проведем $CB \parallel AE$. Полученную точку B соединяем с точкой A. Фигура $ABCD$ — искомый четырехугольник.

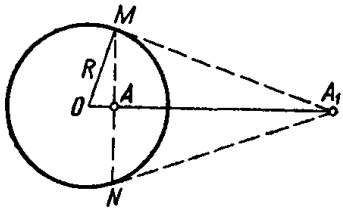


Рис. 258.

Упражнения. 1. Построить четырехугольник по трем его сторонам и углам, прилежащим к четвертой стороне.

2. Построить прямоугольник с данной стороной так, чтобы стороны его проходили через четыре данные точки.

3. Построить треугольник по медианам двух его сторон и высоте, опущенной на третью сторону.

§ 33. Метод инверсии

Точки A и A_1 называются *взаимно инверсными* или симметричными относительно окружности с центром в точке O и радиусом R, если они лежат на одном луче, исходящем из центра окружности O, и если расстояния OA и OA_1 связаны соотношением (рис. 258):

$$OA \cdot OA_1 = R^2.$$

Точку A_1 называют также *обратным* или *инверсным* изображением точки A, а само преобразование называют *преобразованием инверсии*. При этом если точка A лежит внутри окружности O, то ее инверсное изображение A_1 обязательно будет лежать вне окружности O, и наоборот.

Данную окружность O называют *окружностью инверсии*, а ее центр — *полюсом* или *центром инверсии*. Величина R^2 называется *степенью инверсии*. Термин «инверсия» происходит от латинского слова *inversio* — переворачивание, перестановка.

Преобразование инверсии легко осуществить графически. Для этого из данной точки A восставляем перпендикуляр к лучу OA и через точку M (или N) его пересечения с окружностью O проводим касательную, которая и отсечет на продолжении луча OA точку A_1, симметричную относительно окружности O (рис. 258).

Действительно, из подобия треугольников OMA и OMA_1 ($\angle OAM = \angle OMA_1 = 90°$ и $\angle MOA = \angle MOA_1$) получаем

$$\frac{R}{OA} = \frac{OA_1}{R} \text{ или } OA \cdot OA_1 = R^2,$$

как и должно быть для взаимно инверсных точек.

Если данная точка A_1 лежит вне окружности O, то проводим из нее касательную A_1M, а затем, опустив перпендикуляр $MA \perp OA_1$,

получаем ее изображение A. Точке, лежащей на окружности инверсии, соответствует сама эта точка.

Если точка A приближается к центру инверсии, то ее изображение A_1 удаляется бесконечно далеко. Если точка A приближается к окружности инверсии, то ее инверсное изображение A_1 извне приближается к той же точке на окружности.

Совокупность обратных изображений всех точек некоторой фигуры образует фигуру, инверсно соответствующую данной. В частности, окружности инверсии соответствует сама эта окружность, а прямой, проходящей через центр инверсии, соответствует сама эта прямая. В этом случае каждому радиусу, т. е. отрезку, соединяющему центр с какой-либо точкой окружности, будет соответствовать луч, уходящий в бесконечность и являющийся продолжением этого радиуса.

Часть плоскости, заключенная внутри окружности инверсии, соответствует внешней части плоскости, и наоборот. Прямой линии, которая не проходит через центр инверсии, соответствует окружность, проходящая через центр инверсии. Окружность, не проходящая через центр инверсии, преобразуется в другую окружность, также не проходящую через центр инверсии.

Если две линии пересекаются или касаются, то и образы (изображения) этих линий, полученные при помощи инверсии, пересекаются или касаются в соответственной точке.

Угол пересечения двух линий равен углу пересечения образов этих линий, но противоположен ему по знаку.

Преобразование инверсии часто называют также преобразованием посредством обратных радиусов или, короче, *преобразованием обратными радиусами*.

Метод инверсии решения задач на построение основывается на том, что при инверсии относительно окружности (как и при симметрии относительно прямой, которая является частным случаем инверсии) фигура, обратная данной, сохраняет в известной степени сходство с данной фигурой, в частности, все углы сохраняют величину. В задачах на построение некоторые элементы и связи между ними в искомой фигуре неизвестны. Их следует определить, отыскав путь к решению, что не всегда бывает легко. При инверсии данные и искомые элементы отобразятся, и часто зависимость между ними подмечается проще в отображенной фигуре, чем в исходной. Построив отображенную фигуру, инвертируют ее обратно с тем же центром и степенью инверсии и получают искомую фигуру. Большую роль здесь играет удачный выбор центра и степени инверсии.

З а д а ч а. Построить окружность O_1, касающуюся данной окружности O и проходящую через две заданные точки A и B, расположенные вне окружности O.

Предположим, что задача решена. Примем точку A за центр инверсии, а квадрат касательной, проведенной из точки A к окружности O, за степень инверсии (рис. 259):

$$AT^2 = R^2 \text{ или } AT = R.$$

Искомая окружность O_1 будет отображенной фигурой к касательной B_1N_1, проведенной к заданной окружности O из точки B_1, где точка B_1 инверсна заданной точке B. Чтобы ее определить, проводим через заданные точки A и B луч, а затем из центра A радиусом $R = AT$ — окружность инверсии и строим точку B_1, симметричную относительно

этой окружности, как было показано на рис. 258. Проведя через точку B_1 касательную B_1N_1 и соединив найденную точку N_1 отрезком прямой с заданной точкой A, имеем

$$AN \quad AN_1 = AT^2 = R^2,$$

так как произведение всей секущей на ее внешнюю часть равно квадрату касательной. Следовательно, точки N и N_1 также взаимно симметричны относительно той же самой окружности инверсии A.

Если мы теперь, двигаясь по прямой N_1B_1, будем удаляться в бесконечность, то *образом (изображением)* бесконечно удаленной точки будет центр инверсии, т. е. точка A. В таком случае, образом всей прямой N_1B_1 будет являться окружность O_1, проходящая через точки A, B, N, которую легко построить (см. § 28, задача 13). Эта окружность и будет искомой, так как углы при инверсии сохраняются, а прямая N_1B_1 касается заданной окружности O; значит, и ее образ — окружность ANB будет касаться заданной окружности O в точке N, инверсной к точке N_1.

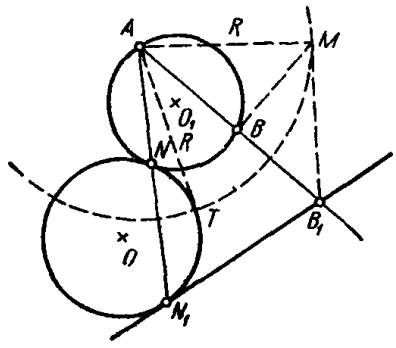


Рис. 259.

В заключение отметим, что преобразование инверсии применяют не только в геометрии, но и в картографии, теории функций комплексного переменного, физике и технике. Например, выдающийся русский математик П. Л. Чебышев (1821—1894), создавший несколько новых направлений в высшей математике, основоположник теории механизмов в России, пользуясь инверсией, сконструировал ряд оригинальных механизмов для преобразования криволинейного движения в прямолинейное.

Упражнения.

1. Дана окружность O. Построить окружности, пересекающие данную окружность под прямыми углами. (Окружность пересекается под прямыми углами окружностью, проходящей через две инверсные относительно данной окружности точки. Радиус секущей окружности равен длине касательной, проведенной из ее центра к окружности O.)

2. Дана окружность инверсии радиуса R. Определить фигуру, инверсную (отображенную) окружности радиуса R_1, концентрической с окружностью инверсии. Рассмотреть случаи $R > R_1$, $R < R_1$, $R = R_1$.

3. Построить графически еще несколько образов (изображений) точек, произвольно взятых на прямой N_1B_1, симметричных относительно окружности инверсии A, и проверить, все ли эти точки будут находиться на окружности O_1 (рис. 259).

Примечание. С помощью метода инверсии, в частности, может быть решена известная задача древности — задача Аполлония: построить окружность, касательную к трем данным окружностям произвольных радиусов.

§ 34. Построение фигур, равновеликих данным

При решении планиметрических задач на вычисление, построение и доказательство часто оказывается полезным предварительное построение фигуры, равновеликой данной, т. е. фигуры, площадь которой равна площади данной фигуры. Рассмотрим некоторые примеры построения равновеликих фигур:

1. Построить равнобедренный треугольник, равновеликий данному произвольному треугольнику. Выполнить рисунок.

Через вершину данного треугольника проводим прямую, параллельную его основанию. Точку, полученную при пересечении этой прямой с перпендикуляром, восставленным к середине основания, соединяем с концами основания. Полученный треугольник равнобедренный. Его основание и высота соответственно равны основанию и высоте данного треугольника; следовательно, их площади равны.

2. Построить прямоугольный треугольник, равновеликий произвольно заданному.

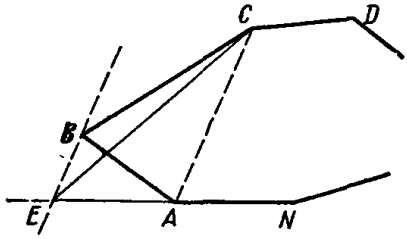


Рис. 260.

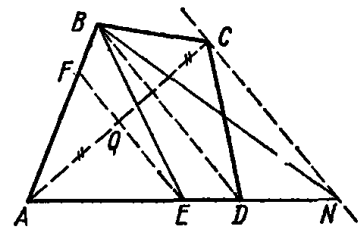


Рис. 261.

Вершину искомого треугольника найдем как точку пересечения прямой, параллельной основанию и проходящей через вершину данного треугольника, с перпендикуляром, восставленным в конце его основания.

3. Построить квадрат, равновеликий данному треугольнику.

Пусть основание и высота данного треугольника равны соответственно a и h.

Обозначим сторону искомого квадрата через x. Из условия равенства площадей треугольника и квадрата имеем

$$x^2 = \frac{1}{2}ah,$$

следовательно, сторона квадрата есть средний пропорциональный отрезок между отрезками $\frac{a}{2}$ и h (см. § 35). Задача имеет единственное решение.

4. Построить квадрат, равновеликий данной трапеции.

Пусть основания трапеции и ее высота соответственно равны a, b, h. Обозначим через x сторону искомого квадрата. Следовательно, по условию равенства площадей, имеем:

$$x^2 = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$

Таким образом, отрезок x и в данном случае строится как средняя пропорциональная величина между отрезками $\frac{a+b}{2}$ (средняя линия трапеции) и h. Задача имеет единственное решение.

5. Построить $(n-1)$-угольник, равновеликий данному n-угольнику.

Пусть точки A, B, C, D, ..., N являются вершинами данного n-угольника. Проведем диагональ AC (можно провести любую другую, стягивающую две смежные стороны), а через вершину B проведем прямую $BE \parallel AC$ (рис. 260). Точку E пересечений этой прямой с продолжением стороны AN соединим с вершиной C. Фигура $ECD \ldots N$ является уже $(n-1)$-угольником, так как число вершин данного n-угольника уменьшено на единицу. Так как треугольники ABC и AEC равновелики (докажите это), то и построенный $(n-1)$-угольник будет равновелик исходному n-угольнику. Задача имеет бесконечное множество решений.

6. Построить треугольник, равновеликий данному n-угольнику.

Указание. Для выполнения построения следует операцию, описанную в предыдущей задаче, выполнить $n-3$ раза, уменьшая при этом каждый раз число углов данного многоугольника на единицу. После выполнения всех операций число углов данного многоугольника окажется равным $n-(n-3)=3$. Использование построения треугольника, равновеликого данному четырехугольнику, может быть продемонстрировано на следующей задаче.

Задача. Если в произвольном четырехугольнике $ABCD$ через середину Q диагонали AC провести прямую $EF \parallel BD$, то прямая BE разделит площадь данного четырехугольника пополам. Доказать.

Через вершину четырехугольника C проведем прямую CN, параллельную его диагонали BD. Тогда (согласно примеру 5) треугольник ABN равновелик исходному четырехугольнику $ABCD$ (рис. 261). В таком случае требуется доказать, что

$$S_{ABE} = \frac{1}{2} S_{ABN}.$$

Так как по условию $AQ = QC$ и $QE \parallel CN$, то QE есть средняя линия $\triangle ACN$; следовательно, $AE = EN$.

Таким образом, BE есть медиана $\triangle ABN$ и, значит,

$$S_{ABE} = \frac{1}{2} S_{ABN} = \frac{1}{2} S_{ABCD},$$

что и требовалось доказать.

§ 35. Алгебраический метод решения геометрических задач на построение

Применение алгебраического метода к решению геометрических задач на построение сводится к следующему:

1) составлению уравнения по условиям задачи;

2) решению полученного уравнения относительно буквы, означающей искомый отрезок;

3) исследованию полученной формулы;

4) построению отрезка по составленной формуле.

В данном параграфе мы остановимся только на четвертом пункте, так как применение всех предыдущих не вызывает затруднений.

Построение отрезков по заданным формулам. Пусть через $a, b, c, d\ldots$ обозначены заданные отрезки, а через $x, y, z, t\ldots$ — искомые.

А. Построение отрезков по формулам, представляющим собой сумму, разность, а также умножение либо деление на число, не представляет труда и сводится к сложению отрезков, их вычитанию, увеличению отрезка в заданное число раз и делению отрезка на заданное число равных частей (см. § 28).

Б. Построение отрезков по формулам $x = \sqrt{a^2 + b^2}$, $x = \sqrt{c^2 - b^2}$ сводится к построению прямоугольного треугольника по его катетам, либо гипотенузе и катету. В первом случае x — гипотенуза, во втором — x — катет.

В. Построение отрезков по формулам

$$x = \frac{ab}{c};\ x = \frac{a^2}{c}$$

сводится к отысканию четвертого пропорционального отрезка (используется теорема о пересечении угла параллельными прямыми).

Г. Построение отрезков по формулам

$$x = \frac{a^2}{c};\ x^2 = ab \text{ или } x = \sqrt{ab}$$

удобно выполнять, используя теорему о перпендикуляре, опущенном из произвольной точки окружности на диаметр.

Д. Построение отрезков по формулам, представляющим комбинации приведенных выше формул, выполняется путем введения вспомогательных неизвестных отрезков и последовательного их отыскания.

Примеры.

1. $x = \dfrac{(a+b)(b-c)}{a+c}$.

Здесь необходимо последовательно построить четыре отрезка $y = a + b$, $z = b - c$, $t = a + c$, $x = \dfrac{yz}{t}$.

2. $x = \dfrac{a^2 + 2ab + b^2}{a+c}$.

Преобразовав заданную формулу к виду $x = \dfrac{(a+b)^2}{a+c}$, следует построить три отрезка $y = a + b$, $z = a + c$, $x = \dfrac{y^2}{z}$. Без преобразования после почленного деления пришлось бы выполнить пять операций.

3. $x = \dfrac{ab\sqrt{a^2 + b^2}}{cd}$.

Следует положить $y = \dfrac{ab}{c}$, $z = \sqrt{a^2 + b^2}$; тогда получим

$$x = \frac{yz}{d}.$$

4. $x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d^2}$.

Следует построить два вспомогательных отрезка:

$$y = \sqrt{a^2 + b^2},\ z = \sqrt{c^2 - d^2}.$$

Тогда $x = \sqrt{y^2 + z^2}$. В этом примере, как и во многих других, вводя новые отрезки, можно подбирать разные комбинации заданных. Наилучшим решением будет такое, которое требует минимального количества операций.

5. $x = \sqrt[4]{a^4 + b^4}$.

Следует предварительно выполнить преобразования

$$x = \sqrt[4]{a^4 + b^4} = \sqrt{\sqrt{a^4 + b^4}} = \sqrt{\sqrt{a^2\left(a^2 + \frac{b^4}{a^2}\right)}} =$$

$$= \sqrt{a\sqrt{a^2 + \left(\frac{b^2}{a}\right)^2}}.$$

Следовательно, требуется положить

$$y = \frac{b^2}{a},\ z = \sqrt{a^2 + y^2},$$

тогда

$$x = \sqrt{az}.$$

6. В треугольник ABC вписать квадрат $MQPN$ так, чтобы две его вершины Q и P лежали на основании BC, а две другие — на боковых сторонах.

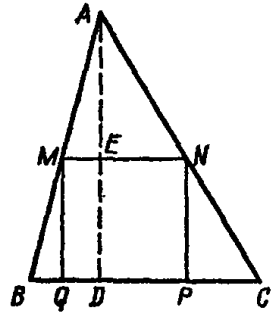


Рис. 262.

Обозначим $BC = a$, $AD = h$, $MN = MQ = x$ (рис. 262). Из подобия треугольников ABC и AMN (у которых по условию $MN \parallel BC$) находим

$$\frac{a}{x} = \frac{h}{h - x},$$

откуда

$$x = \frac{ah}{a + h}.$$

Построив сторону x квадрата $MQPN$ как четвертое пропорциональное отрезков a, h и $a + h$ (см. § 6, рис. 100) проведем на расстоянии x от основания BC прямую $MN \parallel BC$. Получим точки M и N, опустим $MQ \perp BC$ и $NP \perp BC$. Искомый квадрат построен.

§ 36. Построение корней квадратного уравнения

Если при построении отрезка x приходится использовать квадратное уравнение, то следует поступать так. Учитывая, что квадратное уравнение, в зависимости от знака свободного члена, имеет вид

$$x^2 + px + q = 0 \text{ или } x^2 + px - q = 0,$$

положим $q = m^2$ (это всегда возможно, так как $q > 0$). Тогда квадратное уравнение приводится к виду

$$x^2 + px + m^2 = 0 \text{ или } x^2 + px - m^2 = 0.$$

Рассмотрим первое из этих уравнений:

А. В случае $p < 0$ заменим $p = -n$ и получим уравнение $x^2 - nx + m^2 = 0$, где $n > 0$. При этом для корней x_1 и x_2 рассматриваемого квадратного уравнения согласно формулам Виеты имеем

$$x_1 + x_2 = n; \quad x_1 \cdot x_2 = m^2 = q.$$

Построение x_1 и x_2 осуществляется следующим образом. На отрезке длиной n как на диаметре описываем окружность (рис. 263) и на расстоянии $q = m^2$ от диаметра n проводим прямую, ему параллельную. Если $n > 2q$, то прямая пересечет окружность в точках M и N. Опустив из точки M (или N) перпендикуляр на диаметр, разбиваем его на

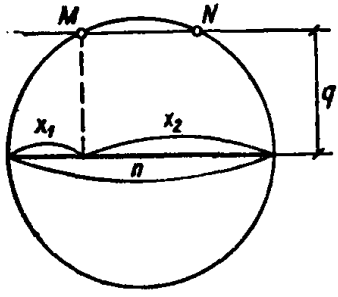


Рис. 263.

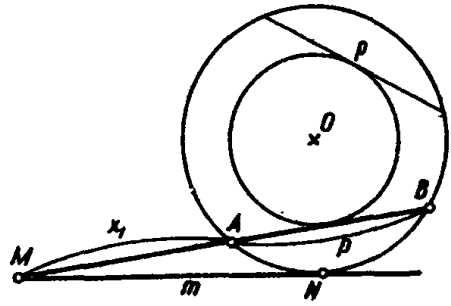


Рис. 264.

два отрезка x_1 и x_2, являющиеся корнями данного уравнения, так как они удовлетворяют соотношениям $x_1 + x_2 = n = -p$; $x_1 \cdot x_2 = m^2 = q$.

Если $n > 2q$, получаем два разных отрезка x_1 и x_2.

Если $n = 2q$, получаем один отрезок $x_1 = x_2$ (в этом случае проведенная прямая будет только касаться окружности).

Если $n < 2q$, построить отрезок, длина которого является корнем квадратного уравнения, невозможно (в этом случае проведенная прямая не касается окружности). Корни квадратного уравнения в этом случае будут комплексными.

Б. В случае $p > 0$ оба корня квадратного уравнения отрицательны.

Если нас интересует абсолютная величина корней x_1 и x_2, то уравнение $x^2 + px + q = 0$ заменяем уравнением $x^2 - px + q = 0$, корни которого по абсолютной величине равны корням предыдущего квадратного уравнения, но оба положительны. В результате мы снова пришли к построению, описанному выше.

Рассмотрим теперь второе уравнение

$$x^2 + px - m^2 = 0.$$

В этом уравнении, в зависимости от знака коэффициента p также возможны два случая:

А. В случае $p > 0$ корни уравнения $x^2 + px - m^2 = 0$ имеют разные знаки. Построим положительный корень, для чего следует записать уравнение в виде $x(x + p) = m^2$.

При $p > 0$ величину m можно рассматривать как длину касательной к окружности из некоторой внешней точки, а $(x + p)$ как длину проведенной из той же точки секущей, часть которой, лежащая внутри окружности, равна p.

Построение отрезка x осуществляется следующим образом. Взяв произвольную окружность, диаметр которой больше p, построим хорду p и концентрическую окружность, касающуюся этой хорды (рис. 264).

В произвольной точке N внешней окружности проводим к ней касательную и откладываем на ней от точки касания отрезок $MN = m$. Далее из точки M проводим к внутренней окружности касательную, которая пересечет внешнюю окружность в некоторых точках A и B; при этом $AB = p$, так как отрезки всех касательных, заключенных между двумя концентрическими окружностями, равны между собой. Следовательно, $AM = x_1$, где $x_1 > 0$, поскольку произведение всей секущей $(x_1 + p)$ на ее внешнюю часть x_1 равно квадрату касательной m^2.

Абсолютную величину отрицательного корня x_2 получаем на основании равенства $x_1 + x_2 = -p$, откуда $-x_2 = x_1 + p$, а в таком случае

$$|x_2| = BM.$$

Б. В случае $p < 0$ произведем замену $-p = n$ $(n > 0)$. Уравнение примет вид $x^2 - nx - m^2 = 0$, т. е.

$$x(x - n) = m^2.$$

Построение отрезков x_1 и x_2 выполняется аналогично, однако теперь положительным корнем является длина отрезка BM, а абсолютной величиной отрицательного корня — длина отрезка AM.

§ 37. Геометрические задачи на неравенства

Задачи на доказательство геометрических неравенств встречаются в планиметрии довольно часто. Их решение вызывает иногда трудности, связанные со спецификой конкретных задач. Общие идеи, применяемые при решении, основываются на известных свойствах алгебраических неравенств. Рассмотрим несколько наиболее типичных задач.

Все рисунки, необходимые для более четкого понимания рассматриваемых ниже задач, читатель легко сможет выполнить самостоятельно, поэтому их приводить не будем.

З а д а ч а 1. Доказать, что в произвольном треугольнике удвоенная сумма медиан, опущенных на боковые стороны, больше утроенного основания.

Рассмотрим $\triangle ABC$, где AB — основание. Проведем медианы к боковым сторонам AC и CB и обозначим буквой O точку пересечения медиан. Тогда

$$AO = \frac{2}{3} m_a; \quad BO = \frac{2}{3} m_b.$$

Из $\triangle AOB$ следует

$$AO + BO > AB, \text{ т. е. } \frac{2}{3} m_a + \frac{2}{3} m_b > AB,$$

откуда

$$2(m_a + m_b) > 3AB,$$

что и требовалось доказать.

Задача 2. Доказать, что в неравнобедренном прямоугольном треугольнике высота, опущенная на гипотенузу, меньше половины гипотенузы.

Пусть в прямоугольном треугольнике ABC a и b — катеты, c — гипотенуза, h_c, m_c — соответственно высота и медиана, опущенные на гипотенузу. Поскольку $h_c \perp c$ и h_c и m_c проведены из одной точки C, то $h_c < m_c$, так как m_c — наклонная (по условию задачи $\triangle ABC$ не равнобедренный, а значит, $h_c \neq m_c$). Но $m_c = \frac{1}{2} c$, следовательно,

$$h_c < \frac{1}{2} c.$$

Выполнить все необходимые построения.

Задача 3. Доказать, что средняя линия треугольника меньше полусуммы двух пересекаемых ею сторон, но больше их полуразности.

Обозначим через DE среднюю линию $\triangle ABC$, пусть при этом точка D лежит на стороне AB.

Для любого треугольника справедливы неравенства (см. § 12)

$$|AB - BC| < AC < AB + BC,$$

следовательно,

$$\left|\frac{AB}{2} - \frac{BC}{2}\right| < \frac{AC}{2} < \frac{AB}{2} + \frac{BC}{2},$$

но

$$DE = \frac{1}{2} AC,\ DB = \frac{1}{2} AB,\ BE = \frac{1}{2} BC.$$

Таким образом,

$$|DB - BE| < DE < DB + BE,$$

что и требовалось доказать.

Задача 4. Доказать, что во всяком прямоугольном треугольнике ABC ($AC = b$, $BC = a$, $AB = c$) между гипотенузой c и катетами a, b имеет место неравенство

$$c \geqslant \frac{a+b}{\sqrt{2}}.$$

Из очевидного неравенства $(a-b)^2 \geqslant 0$ или $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$ имеем

$$2(a^2 + b^2) \geqslant 2ab + (a^2 + b^2) \text{ или } 2(a^2 + b^2) \geqslant (a+b)^2.$$

Учитывая, что $a^2 + b^2 = c^2$, получим $2c^2 \geqslant (a+b)^2$, т. е.

$$c \geqslant \frac{a+b}{\sqrt{2}},$$

что и требовалось доказать.

Очевидно, что знак равенства имеет место лишь в случае равнобедренного прямоугольного треугольника.

Задача 5. Доказать, что сумма квадратов биссектрис треугольника не больше квадрата его полупериметра.

В формулах

$$\beta_a = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{p(p-c)};\ \beta_b = \frac{2\sqrt{ac}}{a+c}\sqrt{p(p-b)};$$

$$\beta_c = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\sqrt{p(p-c)}$$

заменим первые сомножители единицами. Тогда, поскольку

$$a+b \geqslant 2\sqrt{ab};\ a+c \geqslant 2\sqrt{ac};\ b+c \geqslant 2\sqrt{bc},$$

получим

$$\beta_a \leqslant \sqrt{p(p-a)};\ \beta_b \leqslant \sqrt{p(p-b)};\ \beta_c \leqslant \sqrt{p(p-c)}.$$

Возводя в квадрат и складывая, находим $\beta_a^2 + \beta_b^2 + \beta_c^2 \leqslant p(p-a) + p(p-b) + p(p-c) = p[3p-(a+b+c)]$, или, после очевидных упрощений,

$$\beta_a^2 + \beta_b^2 + \beta_c^2 \leqslant p^2;\ p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Знак равенства имеет место в случае равностороннего треугольника.

Задача 6. Доказать, что сумма квадратов высот треугольника не больше квадрата его полупериметра.

Поскольку во всяком треугольнике $h_a \leqslant \beta_a$; $h_b \leqslant \beta_b$; $h_c \leqslant \beta_c$, то из неравенства $\beta_a^2 + \beta_b^2 + \beta_c^2 \leqslant p^2$ после замены биссектрис соответствующими высотами следует

$$h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 \leqslant p^2.$$

Знак равенства имеет место в случае равностороннего треугольника.

Задача 7. Доказать, что радиус описанной вокруг треугольника окружности не меньше, чем диаметр окружности, вписанной в этот треугольник.

Пусть R — радиус описанной, а r — радиус вписанной в один и тот же треугольник окружности. Учитывая, что расстояние d между центрами вписанной и описанной окружности, выражаемое формулой

$$d = \sqrt{R^2 - 2Rr},$$

неотрицательно, т. е. $d \geqslant 0$, получаем $R^2 - 2Rr \geqslant 0$. Поскольку $R > 0$, то приходим к требуемому неравенству

$$R \geqslant 2r.$$

Задача 8. Доказать, что во всяком треугольнике площадь и полупериметр связаны неравенством

$$p^2 \geqslant 3\sqrt{3}S.$$

Воспользуемся неравенством, связывающим среднее арифметическое и среднее геометрическое трех чисел $(p-a)$, $(p-b)$, $(p-c)$:

$$\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3} \geqslant \sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)},$$

откуда с учетом $a+b+c=2p$, получаем

$$p \geqslant 3\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Возводя обе части этого неравенства в куб и умножая на p, находим

$$p^4 \geqslant 27p(p-a)(p-b)(p-c).$$

Извлечем из обеих частей квадратный корень и воспользуемся формулой Герона (см. § 17); имеем

$$p^2 \geqslant 3\sqrt{3}\cdot\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ т. е. } p^2 \geqslant 3\sqrt{3S},$$

что и требовалось доказать.

СТЕРЕОМЕТРИЯ

ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Стереометрия (от греческих слов στερεός — пространственный и μετρέω — измеряю) — раздел геометрии, содержащий учение о пространственных телах и фигурах и о взаимном положении линий, плоскостей, поверхностей и тел в пространстве.

Геометрическая фигура называется пространственной, если не все точки ее лежат в одной плоскости. Примером пространственной фигуры может служить геометрическое тело — часть пространства, занимаемая предметом. Геометрическое тело отделяется от окружающего пространства поверхностью.

Две геометрические фигуры называются равными, если их можно совместить так, чтобы они совпали всеми своими частями.

Предполагается, что при перемещении в пространстве геометрические фигуры не изменяются.

Пространственные фигуры изображаются на чертеже в виде рисунков, которые выполняются по определенным правилам, основанным на геометрических свойствах фигур.

Прямые и плоскости в пространстве

§ 38. Основные свойства плоскости

Основными понятиями в стереометрии являются: точка, прямая и плоскость. Вопросы о точках и прямых были уже частично рассмотрены в разделе «Планиметрия». Поэтому перейдем непосредственно к рассмотрению плоскостей.

Основные свойства плоскостей выражаются следующими а к с и о м а м и:

1. Через любые три точки пространства, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость и притом только одну.

2. Если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.

3. Если две точки прямой принадлежат плоскости, то вся прямая принадлежит этой плоскости.

Из этих аксиом вытекают следствия:

1) Через прямую и точку, лежащую вне этой прямой, можно провести плоскость и притом только одну.

2) Через две пересекающиеся прямые можно провести плоскость и притом только одну.

3) Через две параллельные прямые можно провести плоскость и притом только одну.

4) Через любую прямую в пространстве можно провести бесчисленное множество плоскостей.

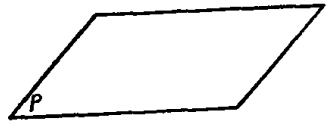


Рис. 265.

Если множество всех плоскостей рассматривать как вращение одной и той же плоскости относительно некоторой прямой, то можно следствие 4) сформулировать так: плоскость может вращаться вокруг любой прямой, принадлежащей плоскости.

Множество плоскостей, проходящих через некоторую прямую, называют *пучком плоскостей*, а прямую, через которую они проходят, называют *осью пучка*.

Плоскость на рисунке изображается в виде параллелограмма и обозначается одной буквой, например, P (рис. 265).

§ 39. Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Две прямые в пространстве могут иметь следующее расположение:

две прямые лежат в одной плоскости, при этом они могут иметь общую точку, т. е. пересекаться, или не иметь общих точек, тогда их называют *параллельными*;

две прямые не лежат в одной плоскости и, следовательно, не имеют общих точек, тогда их называют *скрещивающимися*.

Две скрещивающиеся прямые не образуют угол в обычном смысле, так как у них нет общей точки.

Условились считать, что угол между двумя скрещивающимися прямыми равен углу, образованному двумя лучами, выходящими из одной точки и параллельными этим скрещивающимся прямым.

На рис. 266 прямые AB и CD — скрещивающиеся, а лучи $OM \parallel AB$ и $ON \parallel CD$; угол между скрещивающимися прямыми считают равным углу MON.

Расстоянием между двумя параллельными прямыми считают длину заключенного между ними отрезка прямой, перпендикулярной к каждой из параллельных прямых и пересекающей их.

Расстояние между скрещивающимися прямыми измеряется длиной отрезка прямой, перпендикулярной к каждой из скрещивающихся прямых и пересекающей каждую из них в точках, являющихся концами этого отрезка. Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми есть наименьшее расстояние между точками, лежащими на этих прямых.

На рис. 267 изображены скрещивающиеся прямые: AB, лежащая в плоскости P, и CD, пересекающая эту плоскость. Прямая MN перпендикулярна как к AB, так и к CD; тогда длина отрезка MN есть расстояние между скрещивающимися прямыми AB и CD.

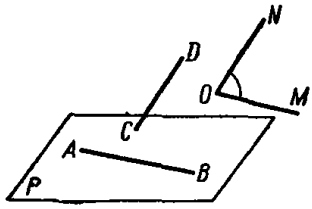


Рис. 266.

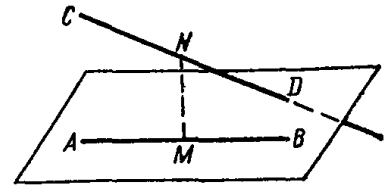


Рис. 267.

§ 40. Взаимное расположение прямой и плоскости

Прямая линия и плоскость в пространстве могут быть расположены следующим образом:

прямая лежит в плоскости или, что то же самое, плоскость проходит через прямую;

прямая и плоскость имеют одну общую точку, т. е. прямая пересекает плоскость. Точку их пересечения называют следом прямой на данной плоскости;

прямая не имеет общих точек с плоскостью, т. е. прямая параллельна плоскости.

Перпендикуляр и наклонная к плоскости. Прямая называется *перпендикулярной плоскости*, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости. Прямая, пересекающая плоскость, но не перпендикулярная ей, называется *наклонной* к этой плоскости.

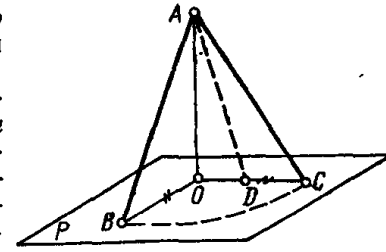


Рис. 268.

Теорема 1. (Признак перпендикулярности прямой и плоскости.) *Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в некоторой плоскости, то она перпендикулярна любой прямой, лежащей в данной плоскости, т. е. прямая перпендикулярна плоскости.*

Прямоугольной проекцией точки на плоскость называется след перпендикуляра, проведенного через эту точку к данной плоскости.

След перпендикуляра на плоскости называется основанием перпендикуляра, а след наклонной — основанием наклонной.

Прямоугольной проекцией наклонной на плоскость называется отрезок прямой, соединяющей основание наклонной и основание перпендикуляра, опущенного из конца наклонной на эту плоскость.

Теорема 2. *Если из одной и той же точки вне плоскости провести к плоскости перпендикуляр и наклонные, то:*

а) *перпендикуляр короче всякой наклонной;*

б) *наклонные, имеющие равные проекции, равны между собой;*

в) *из двух наклонных, имеющих разные проекции, больше та, проекция которой больше.*

На рис. 268 AB, AC и AD наклоиные к плоскости P, а AO — перпеидикуляр к этой плоскости. Тогда, если проекция $OB = OC$, то и иаклоиные $AB = AC$, если $OD < OC$, то и соответственио иаклоиные $AD < AC$.

Теорема 3 (обратная теореме 2). *Если из одной и той же точки, лежащей вне плоскости, провести к этой плоскости перпендикуляр и наклонные, то:*

а) *равные наклонные имеют равные проекции;*

б) *из двух проекций больше та, которая соответствует большей наклонной.*

Теорема 4 (теорема о трех перпендикулярах). *Прямая, проведенная на плоекости перпендикулярно наклонной, перпендикулярна проекции этой наклонной на данную плоскость.*

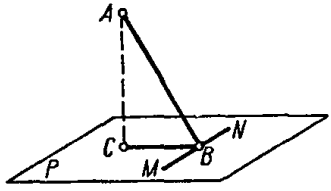


Рис. 269.

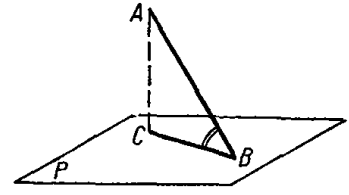


Рис. 270.

Теорема 5 (обратная теореме 4). *Прямая, проведенная на плоскости перпендикулярно проекции наклонной на эту плоскость, перпендикулярна самой наклонной.*

На рис. 269 AB — иаклоиная, а AC — перпендикуляр к плоскости P, если $MN \perp AB$, то и $MN \perp BC$ и, иаоборот, если $MN \perp CB$, то и $MN \perp AB$.

Угол между прямой и плоскостью. *Углом между прямой и плоскостью* называется острый угол между этой прямой и проекцией иа даиную плоскость.

На рис. 270 AB — наклониая, а CB ее проекция на плоскость P, тогда угол между AB и плоскостью P равен $\angle ABC$.

Теорема 6. *Угол между прямой и плоскостью есть наименьший из всех углов, образованных этой прямой с любой прямой, лежащей в данной плоскости.*

Рассмотрим несколько задач на взаимное расположеиие прямой и плоскости.

З а д а ч а 1. Из точки M, отстоящей от плоскости P на расстоянии $MO = 4$, проведены к этой плоскости иаклоиные MA, MB, MC под углами в 30°, 45°, 60° к прямой MO, перпеидикулярной плоскости P. Определить длину наклоиных MA, MB и MC.

Пусть на рис. 271 $MO \perp P$, $\angle MAO = 60°$, $\angle MBO = 45°$ и $\angle MCO = 30°$, тогда из треугольника AMO находим $AO = \frac{1}{2} AM$ и (по теореме Пифагора) $AM^2 - AO^2 = MO^2$ или $\frac{3}{4} AM^2 = 16$, откуда $AM = \frac{8\sqrt{3}}{3}$;

из $\triangle MBO$ ($MO = OB$), $MB = 4\sqrt{2}$;
из $\triangle MCO$ ($CM = 2MO$), $MC = 8$.

Ответ: $MA = \frac{8\sqrt{3}}{3}$; $MB = 4\sqrt{2}$; $MC = 8$.

Задача 2. Из некоторой точки пространства проведены к данной плоскости две наклонные, каждая из которых равна a; угол между ними равен 60°, а угол между их проекциями на данную плоскость — прямой.

Найти А) расстояние между основаниями наклонных;
Б) расстояние от данной точки до плоскости;
В) угол между наклонными и плоскостью.

На рис. 272 $AO \perp P$, $AB = AC = a$ — наклонные, $\angle BOC = 90°$, $\angle BAC = 60°$.

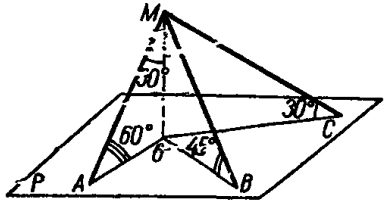


Рис. 271.

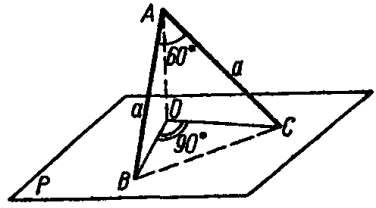


Рис. 272.

А. $\triangle ABC$ — равнобедренный с углом в 60° при вершине, т. е. он равносторонний, поэтому расстояние между основаниями наклонных $BC = a$.

Б. $\triangle BOC$ — равнобедренный прямоугольный (так как проекции OB и OC равных наклонных AB и AC равны), гипотенуза которого $BC = a$, а тогда проекция $OB = OC = \frac{\sqrt{2}}{2} a$. Далее по теореме Пифагора из прямоугольного $\triangle AOC$ находим расстояние точки A от плоскости P: $AO = \sqrt{AC^2 - OC^2} = \sqrt{a^2 - \frac{1}{2} a^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} a$.

В. Угол $ACO = ABO = 45°$, так как прямоугольные треугольники ABO и AOC равны между собою и одновременно являются равнобедренными треугольниками:

$$AO = OC = OB = \frac{\sqrt{2}}{2} a.$$

Задача 3. Если в равнобедренном прямоугольном треугольнике один катет лежит на плоскости P, а другой катет образует с ней угол в 45°, то гипотенуза образует с плоскостью P угол в 30°. Доказать.

В треугольнике ABC (рис. 273) угол $C = 90°$ и $AC = BC$. Катет AC лежит в плоскости P, а катет CB образует с ней угол в 45°; $BD \perp P$. Обозначим $AC = BC = a$, тогда из прямоугольного $\triangle CBD$ находим:

$$CD = BD = \frac{\sqrt{2}}{2} a.$$

Гипотенуза данного прямоугольного треугольника ABC $AB = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$. Тогда в прямоугольном треугольнике ABD катет $BD = \frac{1}{2} AB$ и, по известному свойству (см. § 12), угол $BAD = \alpha = 30°$, что и требовалось доказать.

Задача 4. Доказать, что если из вершины угла, лежащего на плоскости, провести наклонную к плоскости так, чтобы она составляла со сторонами угла равные углы, то проекция этой наклонной на плоскость будет биссектрисой данного угла.

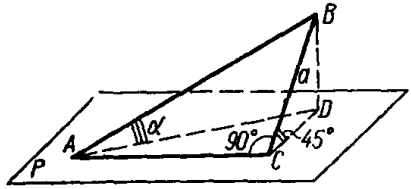


Рис. 273.

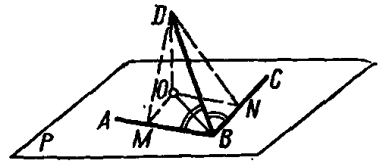


Рис. 274.

По условию задачи $\angle ABC$ лежит в плоскости P (рис. 274) и наклонная DB образует с его сторонами $\angle ABD = \angle DBC$. Из точки D опустим перпендикуляр DO на плоскость P, и из точки O проведем $OM \perp AB$ и $ON \perp BC$, тогда по теореме о трех перпендикулярах наклонные DM и DN будут перпендикулярны соответственно сторонам угла AB и BC. Прямоугольные треугольники DBM и DBN равны по общей гипотенузе DB и равным острым углам $\angle MBD = \angle NBD$. Тогда наклонная $DM = DN$, а значит, равны и их проекции $OM = ON$, но тогда равны $\triangle MOB = \triangle NOB$, а вместе с ними и углы $\angle MBO = \angle NBO$, т. е. OB — биссектриса угла ABC, что и требовалось доказать.

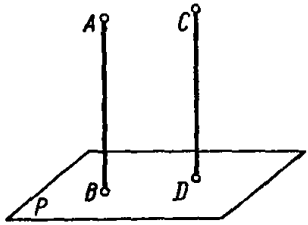


Рис. 275.

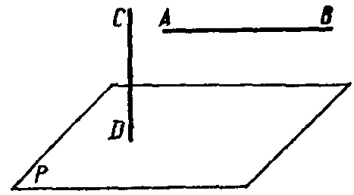


Рис. 276.

Параллельные прямые и плоскости. Теорема 7. *Если плоскость перпендикулярна одной из параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.*

Теорема 8 (обратная теореме 7). *Если две прямые перпендикулярны одной и той же плоскости, то они параллельны.*

Таким образом, если $AB \parallel CD$ и $AB \perp P$ (рис. 275), то и $CD \perp P$ и, наоборот, если $AB \perp P$ и $CD \perp P$, то $AB \parallel CD$.

Признаки параллельности прямой и плоскости выражаются теоремами 9 и 10.

Теорема 9. *Если плоскость P и прямая AB* (рис. 276), *не лежащая в плоскости P, перпендикулярны к одной и той же прямой CD, то они параллельны.*

Теорема 10. *Если прямая AB параллельна прямой CD, лежащей в плоскости P* (рис. 277), *то она параллельна плоскости P.*

Теорема 11. *Если две плоскости P и Q, проходящие соответственно через параллельные прямые AB и CD, пересекаются, то линия их пересечения MN параллельна обеим данным прямым AB и CD* (рис. 278).

Теорема 12. *Две прямые, параллельные одной и той же третьей прямой, параллельны между собой.*

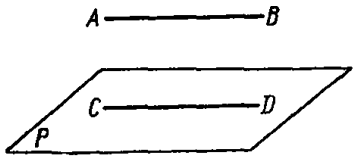


Рис. 277.

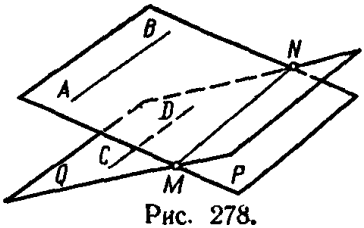


Рис. 278.

Теорема 13. *Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.*

Из теоремы 13 вытекает следствие: если прямая параллельна каждой из двух пересекающихся плоскостей, то она параллельна линии их пересечения.

Теорема 14. *Если одна из двух параллельных прямых параллельна некоторой плоскости, то и другая прямая параллельна той же плоскости или лежит в ней.*

Теорема 15. *Через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит плоскость и притом только одна, параллельная другой прямой.*

Рассмотрим несколько задач на параллельность прямой и плоскости.

З а д а ч а 5. Правильный треугольник спроектирован на плоскость P; вершины треугольника отстоят от этой плоскости на 10 *дм*, 15 *дм* и 17 *дм*. Найти расстояние от центра треугольника до плоскости P.

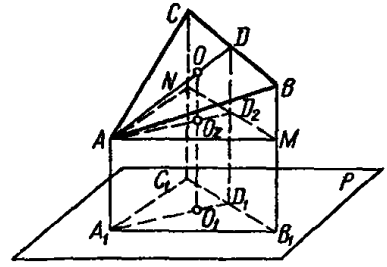


Рис. 279.

Точки A_1, B_1, C_1 (рис. 279) являются прямоугольными проекциями вершин A, B, C данного треугольника ABC на плоскость P. По условию задачи $AA_1 = 10$ *дм*, $BB_1 = 15$ *дм*, $CC_1 = 17$ *дм*. На перпендикулярах к плоскости отложим от их основания отрезки $B_1M = C_1N = AA_1 = 10$ *дм*. Тогда $MB = 5$ *дм*, а $NC = 7$ *дм*. Центр O данного правильного треугольника ABC есть точка пересечения его медиан. Медиана AD треугольника ABC точкой O делится в отношении $AO : OD = 2 : 1$. Из точки D опустим на плоскость P перпендикуляр DD_2, который сторону NM $\triangle ANM$ разделит пополам: $ND_2 = D_2M$, т. е. AD_2 — медиана $\triangle ANM$. DD_2 — как средняя линия трапеции $MBCN$ будет равна $\frac{1}{2}(BM + CN) = 6$ *дм*. Тогда из подобия треугольников AOO_2 и ADD_2 находим $OO_2 : DD_2 = AO : AD$ или $OO_2 : 6 = 2 : 3$; $OO_2 = 4$ *дм*, учитывая, что $O_2O_1 = AA_1 = 10$ *дм*, находим $OO_1 = OO_2 + O_2O_1 = 14$ *дм*.

О т в е т: 14 *дм*.

Замечание. Расстояние от центра правильного треугольника до некоторой плоскости равно среднему арифметическому расстояний от его вершин до этой плоскости.

Задача 6. Через одну из сторон ромба проведена плоскость на расстоянии 4 *см* от противолежащей стороны. Проекции диагоналей ромба на эту плоскость равны 8 *см* и 2 *см*. Найти проекции сторон ромба на эту плоскость.

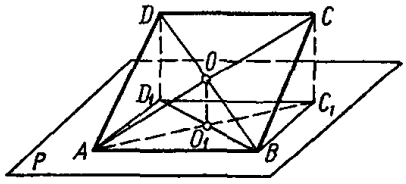


Рис. 280.

ABCD—ромб, сторона *AB* которого лежит в плоскости *P* (рис. 280). По условию задачи перпендикуляры к плоскости *P* $DD_1 = CC_1 = 4$ *см*; $AC_1 = 8$ *см*, $D_1B = 2$ *см*. Требуется найти $BC_1 = AD_1$ и D_1C_1. Диагонали ромба находим из треугольника ACC_1 и BDD_1, откуда $AC = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}$ *см* и $BD = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$ *см*. Тогда сторона ромба $DC = D_1C_1 = \frac{1}{2}\sqrt{AC^2 + BD^2} = \frac{1}{2}\sqrt{80 + 20} = 5$ *см*. Из $\triangle ADD_1$ находим $AD_1 = \sqrt{AD^2 - DD_1^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$ *см*.

Ответ: 5 *см* и 3 *см*.

§ 41. Параллельные плоскости

Две плоскости называются *параллельными*, если они не имеют общих точек.

Признаки параллельности плоскостей:

Теорема 1. *Если две плоскости перпендикулярны одной и той же прямой, то они параллельны.*

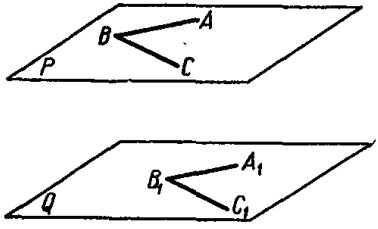


Рис. 281.

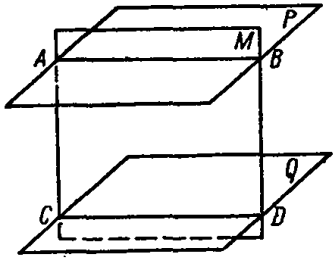


Рис. 282.

Теорема 2. *Если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то такие две плоскости параллельны.*

Другими словами, если пересекающиеся прямые *AB* и *BC* лежат в плоскости *P*, а прямые A_1B_1 и B_1C_1 лежат в плоскости *Q* и $AB \parallel A_1B_1$, а $CB \parallel C_1B_1$ (рис. 281), то $P \parallel Q$.

Теорема 3. *Две параллельные плоскости пересекаются третьей по параллельным прямым.*

Другими словами, если плоскости P и Q параллельны и плоскость M их пересекает, то прямые пересечения этих плоскостей AB и CD параллельны (рис. 282).

Теорема 4. *Две плоскости, параллельные одной и той же третьей плоскости, параллельны между собой.*

Теорема 5 (обратная теореме 4). *Плоскость, пересекающая одну из параллельных плоскостей, пересечет и другую плоскость.*

Теорема 6. *Если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и другой плоскости.*

Теорема 7. *Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны между собой.*

Теорема 8. *Два угла с соответственно параллельными и одинаково направленными сторонами равны между собой.*

Рассмотрим несколько задач на параллельные плоскости.

Задача 1. Отрезки двух прямых, заключенные между двумя параллельными плоскостями, равны 51 *см* и 53 *см*, а их проекции на одну из этих плоскостей относятся, как 6 : 7. Определить длину этих проекций и расстояние между данными плоскостями.

По условию задачи $P \parallel Q$, $AB = 51$ *см*, $A_1B_1 = 53$ *см*, $AC \perp Q$, $A_1C_1 \perp Q$ и $BC : B_1C_1 = 6 : 7$ (рис. 283). Требуется определить BC, B_1C_1 и AC. Обозначим $BC = 6x$, $B_1C_1 = 7x$ и, учитывая, что $AC = A_1C_1$ из треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, получаем

$$AB^2 - BC^2 = A_1B_1^2 - B_1C_1^2 \quad \text{или} \quad 51^2 - (6x)^2 = 53^2 - (7x)^2;$$

$$13x^2 = 208 \quad \text{и} \quad x = 4.$$

Следовательно, для искомых проекций имеем

$$BC = 6x = 24 \text{ см}; \quad B_1C_1 = 7x = 28 \text{ см}.$$

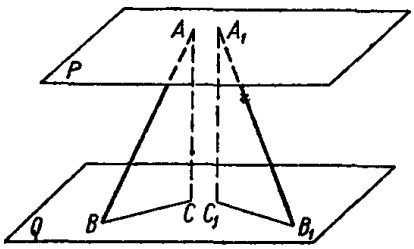


Рис. 283.

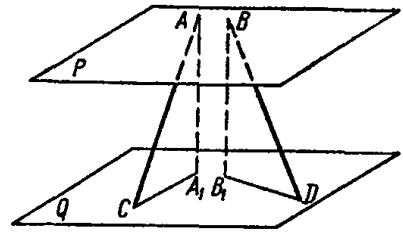


Рис. 284.

Определив BC и зная AB, находим из $\triangle ABC$ по теореме Пифагора расстояние между плоскостями

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{51^2 - 24^2} = 45 \text{ см}.$$

Ответ: 24 *см*, 28 *см* и 45 *см*.

Задача 2. Между двумя параллельными плоскостями P и Q проведены отрезки AC и BD (точки A и B лежат в плоскости P); $AC = 13$ *см*; $BD = 15$ *см*; сумма длин проекций AC и BD на одну из данных плоскостей равна 14 *см*. Найти длины этих проекций и расстояние между данными плоскостями (рис. 284).

По условию задачи $P \parallel Q$, $AC = 13$ *см*, $BD = 15$ *см*, $AA_1 \perp Q$, $BB_1 \perp Q$ и $CA_1 + B_1D = 14$ *см*. Определить CA_1, B_1D и $AA_1 = BB_1$. Обозначим $CA_1 = x$, тогда $B_1D = 14 - x$.

Из прямоугольных треугольников AA_1C и BDB_1 находим $AA_1^2 = AC^2 - A_1C^2 = BD^2 - B_1D^2$ или $13^2 - x^2 = 15^2 - (14 - x)^2$, откуда $28x = 140$ и $x = 5$.

Следовательно,

$$CA_1 = 5 \text{ см}, \quad B_1D = 9 \text{ см} \text{ и } AA_1 = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ см}.$$

§ 42. Двугранные углы и перпендикулярные плоскости

Часть плоскости, лежащая по одну сторону какой-либо прямой, принадлежащей этой плоскости, называется *полуплоскостью*.

Двугранным углом называется геометрическая фигура, образованная двумя полуплоскостями P и Q (рис. 285), исходящими из одной прямой AB. Прямая AB называется *ребром*, а полуплоскости P и Q — сторонами или *гранями двугранного угла*.

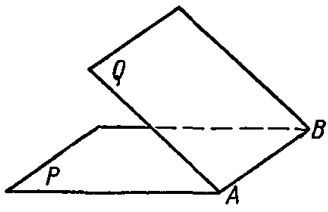


Рис. 285.

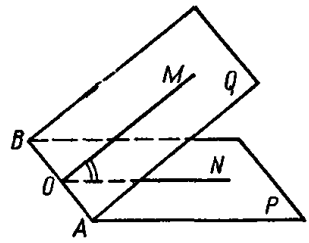


Рис. 286.

Двугранный угол обозначают или двумя буквами, поставленными у ребра, например, AB, или четырьмя буквами $PABQ$, из которых две средние обозначают ребро, а крайние — грани.

Линейным углом двугранного угла называется угол, образованный двумя перпендикулярами, восставленными к ребру из произвольной его точки и лежащими на гранях угла (рис. 286). ON лежит в плоскости P, а OM — в плоскости Q, причем $ON \perp AB$ и $OM \perp AB$, тогда угол MON называется линейным углом двугранного угла $PABQ$.

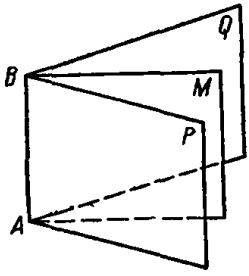


Рис. 287.

Равенство и неравенство двугранных углов. Два двугранных угла называются *равными*, если они при вложении совмещаются.

Если совместить по одной грани два неравных двугранных угла, то бо́льшим считают тот из них, между гранями которого заключена вторая грань второго двугранного угла. На рис. 287 двугранный угол $PABQ$ больше двугранного угла $PABM$.

Теорема 1. *Если два двугранных угла равны, то и их линейные углы равны.*

Если два двугранных угла не равны, то большему двугранному углу соответствует и больший линейный угол.

Теорема 2 (обратная теореме 1). *Равным линейным углам соответствуют равные двугранные углы.*

Если линейные углы не равны, то большему линейному углу соответствует больший двугранный угол.

Прямой двугранный угол. Двугранные углы называются *смежными*, если у них одна грань общая, а две другие составляют одну плоскость.

Прямым двугранным углом называется каждый из равных смежных двугранных углов.

Плоскости, образующие прямой двугранный угол, называются *взаимно перпендикулярными*.

Измерение двугранных углов. Двугранный угол измеряется его линейным углом, т. е. за единицу измерения двугранных углов принимается такой двугранный угол, линейный угол которого содержит единицу измерения линейных углов. Так, двугранный угол в 1° есть угол, линейный угол которого содержит 1°; двугранный угол в 1 радиан есть угол, линейный угол которого содержит 1 радиан.

Перпендикулярные плоскости. (Признак перпендикулярности плос-

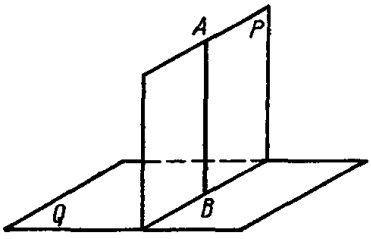


Рис. 288.

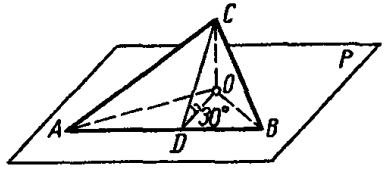


Рис. 289.

костей.) Если плоскость P проходит через перпендикуляр AB к плоскости Q, то плоскости P и Q взаимно перпендикулярны (рис. 288).

Теорема 1. *Если две плоскости взаимно перпендикулярны, то любая прямая, лежащая в одной из них и перпендикулярная их линии пересечения, перпендикулярна другой плоскости.*

Теорема 2. *Если две плоскости взаимно перпендикулярны и из какой-нибудь точки одной из них опущен перпендикуляр на другую, то этот перпендикуляр лежит в первой плоскости.*

Теорема 3. *Плоскость, перпендикулярная двум пересекающимся плоскостям, перпендикулярна ребру образованного ими двугранного угла.*

Теорема 4. *Плоскость, перпендикулярная ребру двугранного угла, перпендикулярна и его граням.* (Теорема 4 обратна теореме 3).

Задача 1. Катеты прямоугольного треугольника равны a и b. Определить расстояние от вершины прямого угла до плоскости, которая проходит через гипотенузу и составляет угол в 30° с плоскостью треугольника.

Из вершины C треугольника ABC на гипотенузу AB опустим перпендикуляр CD и на плоскость P перпендикуляр CO (рис. 289). По теореме о трех перпендикулярах OD как проекция наклонной CD на плоскость P перпендикулярна AB. Тогда $\angle CDO = 30°$ — линейный угол двугранного угла, образованного плоскостью треугольника ABC и плоскостью P.

Из $\triangle ABC$ находим

$$CD = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

CO как катет, лежащий против угла в 30° в $\triangle DCO$, равен $\frac{1}{2} CD$.

Ответ: $CO = \frac{ab}{2\sqrt{a^2+b^2}}$.

Задача 2. Данный отрезок имеет концы на двух взаимно перпендикулярных плоскостях и составляет с одной из них угол в 45°, а с другой — угол в 30°; длина этого отрезка равна a. Определить часть линии пересечения плоскостей, заключенную между перпендикулярами, опущенными на нее из концов данного отрезка.

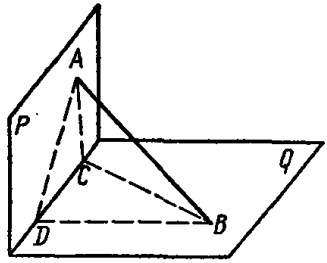


Рис. 290.

По условию задачи $Q \perp P$, $AB = a$, $\angle ABC = 30°$, а $\angle BAD = 45°$ ($AC \perp Q$ и $BD \perp P$). Определить CD (рис. 290).

Из $\triangle ACB$ ($\angle B = 30°$), $AC = \frac{1}{2} AB = \frac{a}{2}$. Из $\triangle ABD$ ($\angle A = 45°$), $AD = \frac{\sqrt{2}}{2} AB = a\frac{\sqrt{2}}{2}$. Тогда из прямоугольного треугольника ACD находим

$$CD = \sqrt{AD^2 - AC^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}.$$

Ответ: $CD = \frac{1}{2} a$.

§ 43. Задачи на построение в стереометрии

Решение задач на построение в пространстве существенно отличается от решения задач на построение в планиметрии. Содержание всякой задачи на построение состоит из трех частей: данных элементов, того, что требуется построить, и тех средств, с помощью которых задача должна быть решена.

Для построения пространственных фигур фактически не существует инструментов, аналогичных циркулю, линейке, угольнику и др., применяемых при решении задач на построение в планиметрии. При решении задач на построение пространственных фигур обыкновенно описывается и логически обосновывается ход построения, который сопровождается схематическим чертежом. Таким образом, при решении задач на построение в пространстве основным является логическое обоснование построения, а чертеж является лишь иллюстрацией.

Способы и правила построения чертежей пространственных фигур изучаются в начертательной геометрии.

Задача на построение в стереометрии считается решенной, если она сведена к решению простейших задач. К ним относятся следующие:

I. Провести плоскость через три точки, не лежащие на одной прямой.

II. Провести плоскость через прямую и точку, лежащую вне прямой.

III. Провести плоскость через две пересекающиеся или параллельные прямые.

IV. Построить линию пересечения двух данных плоскостей (если они пересекаются).

V. Решить любую задачу на построение в данной плоскости, если она допускает решение (пользуясь методами, изучаемыми в планиметрии).

Рассмотрим некоторые из основных задач на построение в стереометрии.

Задача 1. Построить плоскость, перпендикулярную данной прямой и проходящую через данную точку.

Пусть дана точка A и прямая l. Требуется построить плоскость P, проходящую через точку A перпендикулярно к прямой l (рис. 291). Рассмотрим два случая.

А. Если точка A лежит вне прямой l, то через точку A и прямую l проводим плоскость M (задача II) и через l проводим произвольную плоскость N, не сливающуюся с плоскостью M. В плоскости M из точки A проводим перпендикуляр AO к прямой l, а в плоскости N из точки O восставим перпендикуляр OB к прямой l (задача V). Пересекающиеся прямые AO и OB определяют искомую плоскость P, которая единственна.

Б. Если точка A лежит на прямой l, то через прямую l проводим две произвольные плоскости, в которых из точки A восставляем перпендикуляры к прямой l. Эти перпендикуляры определят искомую

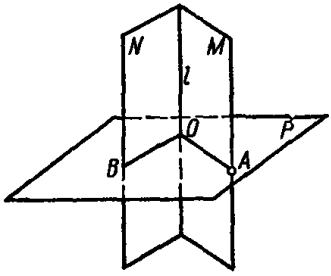


Рис. 291.

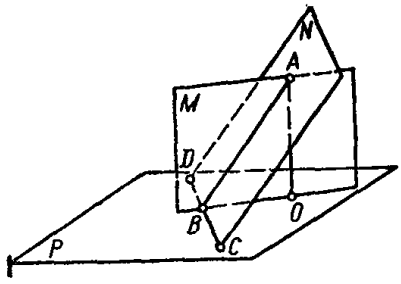


Рис. 292.

плоскость P, которая также будет единственной. Таким образом, из точки вне (и на) прямой можно провести к этой прямой перпендикулярную плоскость и притом только одну.

Задача 2. Через данную точку провести перпендикуляр к данной плоскости.

Пусть дана точка A и плоскость P. Требуется провести через точку A перпендикуляр к плоскости P (рис. 292). Рассмотрим также два случая.

А. Если точка A лежит вне плоскости P, то проводим в плоскости P произвольную прямую CD (задача V) и через CD и данную точку A проводим плоскость N (задача II), в которой из A к DC проводим $AB \perp DC$ (задача V). После этого в плоскости P восставим перпендикуляр BO к DC (задача V). Пересекающиеся прямые (задача III) определяют плоскость M, перпендикулярную прямой CD. В плоскости M

проводим перпендикуляр AO к BO (задача V), который будет искомым, т. е. $AO \perp P$.

Б. Если данная точка лежит на плоскости P, то пусть на рис. 293 данной в задаче точкой будет точка O. Тогда проводим произвольную прямую CD в плоскости P, не проходящую через точку O. Из точки O проводим $OB \perp CD$ и через CD проводим пронзвольную плоскость N, не сливающуюся с плоскостью P. Восставляем в плоскости N перпендикуляр BA к DC и через пересекающиеся прямые OB и BA проводим плоскость M, в которой восставляем $OA \perp BO$. Легко доказать, что

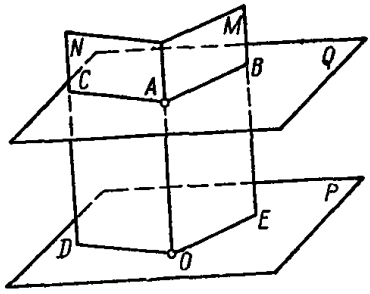


Рис. 293.

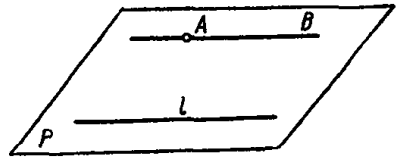


Рис. 294.

$AO \perp P$. Таким образом, через точку к данной плоскости всегда можно провести перпендикуляр и притом только один.

З а д а ч а 3. Через данную точку провести плоскость, параллельную данной плоскости.

Пусть даиа точка A и плоскость P. Требуется провести плоскость Q через точку A, параллельную плоскости P (рис. 293).

В плоскости P проводим две произвольные пересекающиеся прямые OE и OD и через эти прямые и заданную точку A проводим плоскости M и N, которые пересекаются по прямой OA. В плоскости M проводим прямую $AB \parallel OE$, а в плоскости N — прямую $AC \parallel OD$. Прямые AB и AC определяют плоскость Q, которая проходит через точку A и параллельна данной плоскости P.

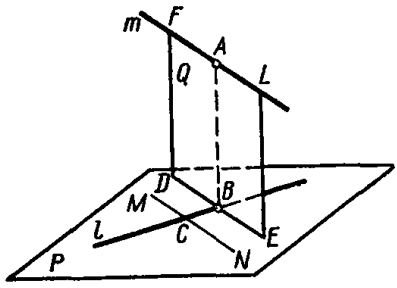


Рис. 295.

Если точка A лежит на плоскости P, то плоскости P и Q сливаются и их можно считать параллельными. Таким образом, через точку вне данной плоскости можно провести параллельную плоскость и притом только одну.

З а д а ч а 4. Через данную точку провести прямую, параллельную данной.

Пусть дана точка A и прямая l. Требуется провести прямую, параллельную l и проходящую через точку A (рис. 294). Через даиные точку A и прямую l проводим плоскость P и в ней через точку A проводим нскомую прямую AB, параллельную l, притом единственную.

З а д а ч а 5. Определить расстояние между двумя скрещивающимися прямыми.

Пусть даны две скрещивающиеся прямые l и m (рис. 295). Требуется определить расстояние между ними.

Задача определения расстояния между данными скрещивающимися прямыми сводится к построению прямой, пересекающей эти прямые и перпендикулярной к ним обеим.

Через произвольную точку C прямой l проводим прямую $MN \parallel m$ и через прямые MN и l проводим плоскость P, которая также параллельна прямой m. Из какой-нибудь точки F прямой m опускаем на плоскость P перпендикуляр и через прямые DF и m проводим плоскость Q, перпендикулярную плоскости P. Плоскость Q пересечет прямую l в точке B. Через точку B проведем прямую, перпендикулярную прямой m с пересечением в точке A. Таким образом, отрезок AB, концы которого лежат на данных скрещивающихся прямых l и m, перпендикулярный к каждой из этих прямых, т. е. длина отрезка AB и есть расстояние между заданными скрещивающимися прямыми.

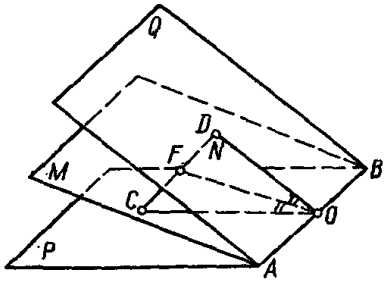


Рис. 296.

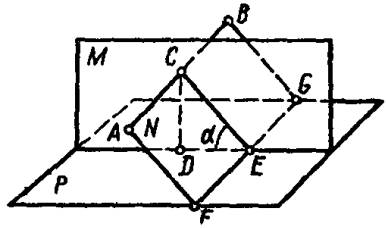


Рис. 297.

Задача 6. Данный двугранный угол разделить плоскостью на два равных между собой двугранных угла. (Провести биссекторную плоскость.)

Дан двугранный угол $PABQ$ (рис. 296), требуется провести плоскость M, делящую двугранный угол пополам. Из произвольной точки O ребра AB данного двугранного угла восставляем перпендикуляры OC и OD к этому ребру, лежащие в плоскостях P и Q; тогда угол COD будет линейным углом данного двугранного угла. Проведем плоскость N через прямые OC и OD, которая будет перпендикулярной к ребру AB. Построим биссектрису OF линейного угла COD. Через AB и OF проведем плоскость M, которая делит данный двугранный угол на два равных угла $PABM = MABQ$. Построенная плоскость называется *биссекторной плоскостью* двугранного угла $PABQ$.

Задача 7. Через данную прямую провести плоскость, перпендикулярную к данной плоскости.

Через любую точку данной прямой проведем перпендикуляр к данной плоскости (задача 2). Данная прямая и проведенный перпендикуляр определяют искомую плоскость.

Задача 8. Через данную точку провести плоскость, перпендикулярную к двум данным плоскостям.

Из данной точки опускаем перпендикуляры на данные плоскости (задача 2). Эти перпендикуляры и определяют искомую плоскость.

Задача 9. Через данную прямую провести плоскость, образующую с данной плоскостью заданный угол α.

А. Если данная прямая AB параллельна данной плоскости P (рис. 297), то через произвольную точку C данной прямой проводим плоскость M, перпендикулярную этой прямой, которая пересечет плоскость P по прямой, проходящей через точки D и E. В плоскости M

строим угол $CED = \alpha$. В плоскости P через точку E проводим прямую EG, перпендикулярную DE, которая по теореме о трех перпендикулярах будет перпендикулярна и наклонной CE. Через прямые FG и CE проводим плоскость N. Двугранный угол $PFGN$ искомый, так как его линейный угол $CED = \alpha$.

Б. Если данная прямая AB пересекает плоскость P (рис. 298) и A их точка пересечения, то из точки B на плоскость P опустим перпендикуляр BO; через прямые AB и BO проведем плоскость AOB и в этой плоскости построим угол $BDO = \alpha$. Затем радиусом OD в плоскости P из точки O как из центра строим окружность; к этой окружности из точки A в плоскости P проводим касательные AC и AE. Радиусы окружности, проведенные в точки касания,

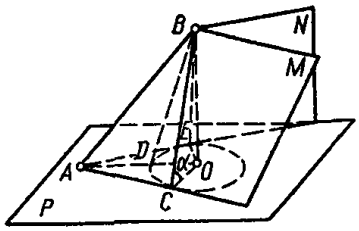


Рис. 298.

$$AC \perp OC; \quad AE \perp EO.$$

Построим теперь наклонные BC и BE, перпендикулярные касательным AC и AE по теореме о трех перпендикулярах. Через прямые AB и BC проведем плоскость M, а через AB и BE плоскость N. Плоскости M и N искомые, так как

$$\angle BCO = \angle BEO = \alpha,$$

а углы BCO и BEO есть линейные углы двугранных углов, образованных плоскостями M и P и соответственно плоскостями N и P.

§ 44. Многогранные углы

Многогранным углом называется фигура, состоящая из нескольких лучей OA, OB, OC, ..., OF, выходящих из одной точки O и не лежащих в одной плоскости, и из плоских углов AOB, BOC, ..., FOA между этими лучами (рис. 299).

Общая точка O пересечения всех лучей называется *вершиной* многогранного угла, лучи OA, OB, ..., OF — его *ребрами*, части плоскостей, заключенные между ребрами, называются его *гранями*, а углы AOB, BOC, ..., FOA, образованные ребрами, лежащими в одной грани, называются *плоскими углами* многогранного угла.

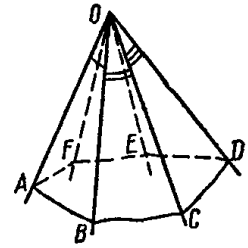


Рис. 299.

Многогранный угол называется *выпуклым*, если он целиком лежит по одну сторону от плоскости, совпадающей с любой его гранью. Два многогранные угла считаются *равными*, если они при наложении совпадают всеми своими частями.

Сумма плоских углов выпуклого многогранного угла меньше 360°.

Трехгранные углы. Если число граней многогранного угла равно трем, то его называют *трехгранным* углом.

Основные свойства трехгранных углов выражаются следующими теоремами.

Теорема 1. *Сумма двух плоских углов трехгранного угла больше третьего его плоского угла.*

Теорема 2. *Каждый плоский угол трехгранного угла меньше разности двух других его плоских углов.*

Равными трехгранными углами называются такие углы, которые при наложении совмещаются во всех своих частях. Следовательно, у равных трехгранных углов все двугранные углы и плоские углы соответственно равны между собой, но обратное утверждение не справедливо. Существуют такие трехгранные углы, у которых двугранные и плоские углы соответственно равны, а трехгранные углы не равны между собой. Например, на рис. 300 изображены два трехгранных угла, у которых плоские и двугранные углы соответственно равны, а совместить эти углы невозможно. Трехгранные углы невозможно совместить из-за неодинаковой ориентации их соответственных граней относительно вершины. Грани AOB, BOC и COA ориентированы относительно вершины O против движения часовой стрелки, а соответствующие грани A_1OB_1, B_1OC_1 и C_1OA_1 ориентированы по движению часовой стрелки и трехгранные углы $OABC$ и $OA_1B_1C_1$ не равны, хотя в них равны и все плоские, и все двугранные углы.

Таким образом, для равенства двух трехгранных углов с соответственно равными плоскими и двугранными углами необходимо еще, чтобы их грани были одинаково ориентированы относительно их вершин.

Признаки равенства трехгранных углов. Существуют признаки равенства трехгранных углов, аналогичные признакам равенства треугольников в планиметрии, которые выражаются следующими теоремами.

Теорема 1. *Если два одинаково ориентированных трехгранных угла имеют по равному плоскому углу, прилежащему к двум соответственно равным двугранным углам, то такие трехгранные углы равны.*

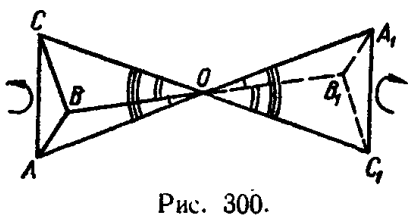


Рис. 300.

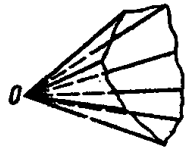


Рис. 301.

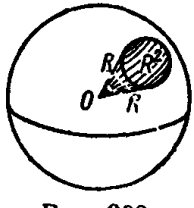


Рис. 302.

Теорема 2. *Если два одинаково ориентированных трехгранных угла имеют по два равных плоских угла, плоскости которых образуют равные двугранные углы, то такие трехгранные углы равны.*

Теорема 3. *Если два одинаково ориентированных трехгранных угла имеют по три соответственно равных плоских угла, то такие трехгранные углы равны.*

Теорема 4. *Если два трехгранных угла одинаково ориентированы и имеют по три соответственно равных двугранных угла, то такие трехгранные углы равны.*

Телесный угол. Часть пространства, ограниченная пучком прямых, проведенных из одной точки (вершины) ко всем точкам какой-либо замкнутой линии, называется телесным углом (рис. 301).

Мерой телесного угла является площадь поверхности, вырезаемая данным телесным углом на сфере радиуса R с центром в вершине этого угла.

Единица измерения телесного угла называется *стерадианом* (от греч. στερεος — пространственный и слова радиан, происходящего от лат. *radius* — луч, радиус).

Один стерадиан — это такой телесный угол, который вырежет на поверхности сферы радиуса R фигуру с площадью, равной R^2. Вершина телесного угла при этом должна быть помещена в центре сферы (рис. 302).

Задача 1. Каждый плоский угол трехгранного угла равен 60°; на одном из ребер отложен от вершины отрезок, равный 3, и из конца его опущен перпендикуляр на противолежащую грань. Найти длину этого перпендикуляра.

Дан трехгранный угол $OMNP$, плоские углы которого MON, NOP, POM равны по 60° и отрезок $AO = 3$, $AD \perp$ пл. NOP. Найти длину AD (рис. 303). Из основания перпендикуляра AD опустим на

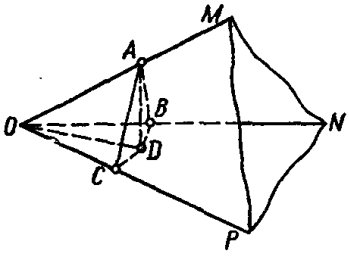


Рис. 303.

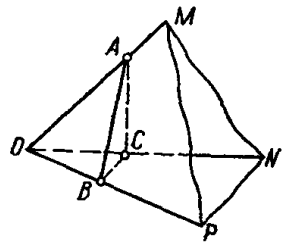


Рис. 304.

лучи OP и ON перпендикуляры $CD \perp OP$ и $DB \perp ON$ и точку D соединим с точкой O. Проведем отрезки AC и AB, которые по теореме о трех перпендикулярах будут соответственно перпендикулярными OP и ON.

Из прямоугольного треугольника ACO ($\angle A = 30°$, так как по условию $\angle AOC = 60°$) находим

$$OC = \frac{1}{2} OA = \frac{3}{2}.$$

В $\triangle OCD$ ($\angle C = 90°$, $\angle COD = 30°$) $OD = 2CD$ и по теореме Пифагора имеем

$$OD^2 - CD^2 = OC^2$$

или

$$3CD^2 = \frac{9}{4}, \quad CD = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{а} \quad OD = \sqrt{3}.$$

Из $\triangle ADO$ по теореме Пифагора получаем

$$AD = \sqrt{AO^2 - OD^2} = \sqrt{9 - 3} = \sqrt{6}.$$

Ответ: $AD = \sqrt{6} \approx 2{,}4495$.

Задача 2. В трехгранном углу два плоских угла по 45°, двугранный угол между ними прямой. Найти третий плоский угол.

В трехгранном углу $OMNP$ $\angle MON = \angle NOP = 45°$, а $\angle MNOP = 90°$. Найти угол $MOP = \alpha$ (рис. 304).

Из произвольной точки C ребра ON строим линейный угол ACB двугранного угла $MNOP$, тогда по условию задачи $\angle ACB = 90°$. Так как углы $AOC = BOC = 45°$, то $AC = OC = CB$ и прямоугольные треугольники ACO, ACB и BCO равны между собой, тогда $AB = AO = BO$ и искомый $\angle AOB = 60°$.

Ответ: 60°.

Многогранники

§ 45. Основные определения

Многогранником называется геометрическое тело, поверхность которого состоит из частей плоскостей, ограниченных многоугольниками.

Гранями многогранника называются части плоскостей (многоугольники), ограничивающие многогранник. *Ребрами* многогранника называются общие стороны смежных граней (многоугольников). *Вершинами* многогранника называются вершины многогранных углов, образованных его гранями, сходящимися в одной точке. *Диагональю* многогранника называется отрезок прямой, соединяющей две вершины многогранника, не лежащие в одной грани. *Диагональной плоскостью* многогранника называется плоскость, проходящая через три вершины многогранника, не лежащие в одной грани. *Сечением* многогранника плоскостью называется часть этой плоскости, ограниченная линией пересечения поверхности многогранника с этой плоскостью. Многогранник называется *выпуклым*, если он целиком лежит по одну сторону от плоскости любой его грани. *Гранями* выпуклого многогранника могут быть только выпуклые многоугольники.

§ 46. Призма и параллелепипед

Призма. *Призмой* называется многогранник, две грани которого параллельны, а остальные пересекаются по параллельным прямым (рис. 305). Параллельные грани называются *основаниями призмы*, а все остальные грани — *боковыми гранями*.

Из определения призмы следует, что в основаниях призмы лежат равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами, а боковые грани призмы параллелограммы.

Общие стороны боковых граней призмы называются *боковыми ребрами* призмы.

Отрезок OO_1 (рис. 305) прямой, перпендикулярный плоскостям оснований призмы и заключенный между ними, называется *высотой* призмы. *Диагональной плоскостью* призмы принято называть плоскость, проходящую через диагональ основания и боковое ребро призмы, а фигуру E_1C_1CE (рис. 305), полученную при пересечении этой плоскости с поверхностью призмы, называют *диагональным сечением* призмы. Сечение призмы плоскостью, перпендикулярной ее боковым ребрам, называют *перпендикулярным сечением* призмы. На рис. 305 фигура

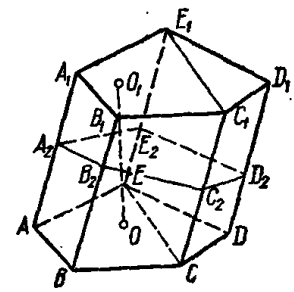


Рис. 305.

$A_2B_2C_2D_2E_2$ является перпендикулярным сечением рассматриваемой призмы.

Призма называется *прямой*, если ее боковые ребра перпендикулярны плоскости основания (рис. 306) и *наклонной* — если ее боковые ребра не перпендикулярны плоскости основания (рис. 305). В прямой призме высота OO_1 параллельна всем ее боковым ребрам AA_1, BB_1, CC_1...

Прямая призма называется *правильной*, если ее основания — правильные многоугольники. Призма называется *треугольной*, *четырехугольной*, *пятиугольной* и т. д. в зависимости от того, какой многоугольник лежит в основании призмы.

Параллелепипед. *Параллелепипедом* называется призма, основаниями которой служат параллелограммы (рис. 307).

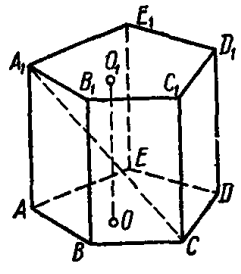


Рис. 306.

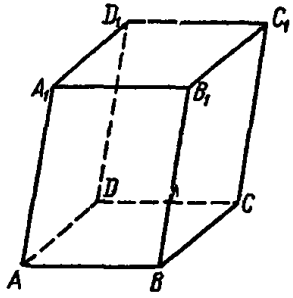


Рис. 307.

Параллелепипед, боковые ребра которого перпендикулярны к плоскостям оснований, называется *прямым*. В противном случае параллелепипед называется *наклонным*.

Прямой параллелепипед, основания которого прямоугольники, называется *прямоугольным*. Все грани прямоугольного параллелепипеда — прямоугольники. Длина каждого из трех ребер прямоугольного параллелепипеда, выходящих из одной вершины, называется *измерениями* параллелепипеда. Прямоугольный параллелепипед, все три измерения которого равны между собой, называется *кубом*.

Некоторые свойства параллелепипеда. 1. В параллелепипеде противоположные грани равны и параллельны.

2. Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.

3. Сумма квадратов всех диагоналей параллелепипеда равна сумме квадратов всех его ребер.

4. Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений.

Следствие. В прямоугольном параллелепипеде все четыре диагонали равны между собой.

Поверхность призмы и параллелепипеда. *Боковой поверхностью призмы* (параллелепипеда) называется сумма площадей всех ее боковых граней.

Полной поверхностью призмы (параллелепипеда) называется сумма ее боковой поверхности и площадей оснований.

Боковая поверхность призмы (параллелепипеда) равна произведению периметра перпендикулярного сечения на боковое ребро.

Боковая поверхность прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы.

§ 47. Объем призмы и параллелепипеда

Основные допущения об объемах. *Объемом геометрического тела* называется величина части пространства, занимаемого этим телом.

Принято рассматривать объем как величину, обладающую следующими свойствами:

а) равные тела имеют равные объемы;

б) объем какого-нибудь тела, состоящего из частей, равен сумме объемов этих частей;

в) если из двух геометрических тел первое содержится целиком внутри второго, то объем первого тела не превосходит объема второго.

Тела, имеющие равные объемы, называются *равновеликими*.

В качестве единицы объема принимается объем куба, ребро которого равно единице длины. Если ребро куба равно 1 *см*, то его объем считают равным одному кубическому сантиметру и сокращенно записывают 1 *куб. см* или 1 $см^3$. Если ребро куба равно 1 *м*, то его объем равен 1 $м^3$ и т. д.

Объем параллелепипеда. *Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений:*

$$V = abc \text{ куб. ед.},$$

где a, b, c — измерения параллелепипеда.

Объем куба равняется кубу его ребра.

Объем прямоугольного и наклонного параллелепипеда равен произведению его площади основания на высоту.

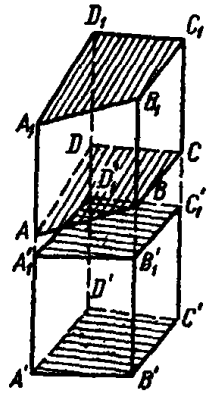


Рис. 308.

Объем призмы. *Наклонная призма равновелика такой прямой призме, основание которой равно перпендикулярному сечению наклонной призмы, а высота — ее боковому ребру* (рис. 308).

На рис. 308 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — наклонная призма, а $A'B'C'D'A'_1B'_1C'_1D'_1$ — прямая призма, основание которой $A'B'C'D'$ перпендикулярно к боковым ребрам наклонной призмы, а высота (боковое ребро) $AA'_1 = AA_1 = H$.

В таком случае

$$V_{ABCDA_1B_1C_1D_1} = V_{A'B'C'D'A'_1B'_1C'_1D'_1}.$$

Объем призмы равен произведению площади основания на высоту:

$$V = H \cdot S_{\text{осн}},$$

где $S_{\text{осн}}$ — площадь основания $ABCDE$, а $H = OO_1$ — высота (рис. 305).

Принцип Кавальери. Ученик Галилео Галилея итальянский математик Бонавентура Кавальери (1598—1647) в книге «Геометрия, изложенная новым способом при помощи неделимых частей непрерывных величин», вышедшей в 1635 г., сформулировал предложение, которое носит название *принципа Кавальери*.

Если два тела могут быть расположены так, что любая плоскость, параллельная какой-нибудь данной плоскости и пересекающая оба тела, дает в сечении с ними равновеликие фигуры, то объемы таких тел равны.

Рассмотрим теперь несколько типичных задач, дополняющих результаты, изложенные выше.

Задача 1. Ребро куба равно a. Найти кратчайшее расстояние от диагонали куба до непересекающего ее ребра.

Дан куб* AC_1, ребро которого $AA_1 = a$. Найти расстояние между AA_1 и BD_1 (рис. 309). Прямые AA_1 и BD_1 скрещивающиеся. Расстояние между ними равно расстоянию любой точки ребра AA_1 до диагональной плоскости куба BB_1D_1D. Опустив из точки A на плоскость BB_1D_1D перпендикуляр AO, из прямоугольного $\triangle AOB$ найдем $AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $A_2O_2 = AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

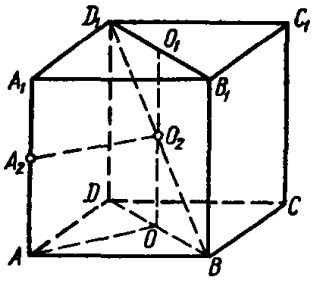


Рис. 309.

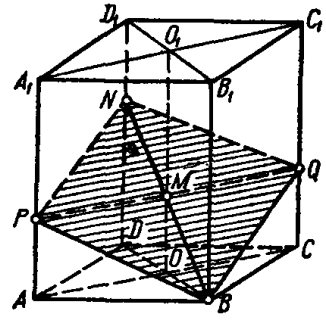


Рис. 310.

Задача 2. Дан прямоугольный параллелепипед, основанием которого служит квадрат. Построить сечение плоскостью, проходящей через вершину основания параллелепипеда параллельно диагонали основания и отсекающей на оси параллелепипеда (считая от основания, через вершину которого проведена плоскость) отрезок длины m. Вычислить площадь сечения, если сторона основания параллелепипеда равна a, а его высота равна h.

Строим прямоугольный параллелепипед AC_1, основанием которого служит квадрат $ABCD$ со стороной $AB = a$ и высотой $AA_1 = OO_1 = h$ (рис. 310). На оси параллелепипеда OO_1 (отрезок, соединяющий центры оснований), от точки O откладываем данный отрезок $OM = m$. В диагональной плоскости BB_1D_1D проводим прямую BM, которая пересечет ломаную DD_1B_1 в точке N, лежащей на ребре DD_1, если $m \leqslant \frac{1}{2}h$, и лежащей на отрезке D_1O_1 диагонали основания D_1B_1, если $\frac{1}{2}h < m \leqslant h$.

Рассмотрим два случая.

А. Если $m \leqslant \frac{1}{2}h$, то в диагональной плоскости AA_1C_1C параллелепипеда проводим через точку M прямую, параллельную диагонали

* При обозначении многогранников часто не указывают всех его вершин, а ограничиваются лишь указанием каких-либо двух вершин, достаточно полно характеризующих этот многогранник. Так, в данном случае вместо куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ можно сказать: куб AC_1.

основания AC. Пусть эта прямая пересечет ребра AA_1 и CC_1 соответственно в точках P и Q (рис. 310). Прямые BN и PQ полностью определяют искомую плоскость $BPNQ$, которая проходит через вершину основания B параллельно диагонали AC ($PQ \parallel AC$) и отсекает на оси OO_1 отрезок $OM = m$. Построив следы пересечения секущей плоскости с поверхностью параллелепипеда (т. е. те прямые, по которым эта плоскость пересекает грани параллелепипеда), получим фигуру сечения. Легко показать, что фигура $BPNQ$ — ромб. Площадь ромба $BPNQ$

$$S = \frac{1}{2} BN \cdot PQ,$$

где $PQ = AC = a\sqrt{2}$, как диагональ квадрата $ABCD$, а из прямоугольного $\triangle BMO$ следует

$$BN = 2BM = 2\sqrt{\frac{a^2}{2} + m^2} = \sqrt{2a^2 + 4m^2}.$$

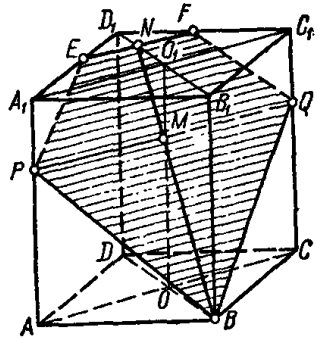


Рис. 311.

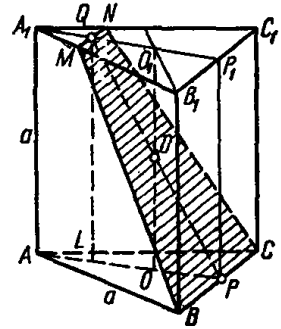


Рис. 312.

Поэтому

$$S = \frac{1}{2} a\sqrt{2} \cdot \sqrt{2a^2 + 4m^2} = a\sqrt{a^2 + 2m^2}.$$

Б. Если $\frac{1}{2} h < m \leqslant h$, то точка N лежит на отрезке D_1O_1 (рис. 311).

В плоскости AA_1C_1C через точку M проводим прямую PQ, параллельную AC. Пересекающиеся прямые BN и PQ полностью определяют секущую плоскость, которая пересечет основание $A_1B_1C_1D_1$ по прямой EF, параллельной PQ ($PQ \parallel$ пл. $A_1B_1C_1D_1$). Соединяя последовательно точки пересечения секущей плоскости с ребрами параллелепипеда, найдем фигуру сечения $BPEFQ$. Легко показать, что она состоит из равнобедренного треугольника PBQ и равнобедренной трапеции $PEFQ$, высотами которых соответственно будут отрезки BM и MN.

Поэтому площадь искомого сечения найдем по формуле

$$S = \frac{1}{2} PQ \cdot BM + \frac{1}{2} (PQ + EF) \cdot MN.$$

Из прямоугольника $APQC$ находим

$$PQ = AC = a\sqrt{2}.$$

Из MOB ($\angle MOB = 90°$) по теореме Пифагора имеем

$$BM = \sqrt{MO^2 + OB^2} = \sqrt{m^2 + \frac{a^2}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2m^2 + a^2}.$$

Из подобия треугольников MOB и MO_1N находим

$$NM = \frac{MB \cdot MO_1}{MO} \text{ или } NM = \frac{\frac{h-m}{\sqrt{2}} \sqrt{2m^2 + a^2}}{m} = \frac{(h-m)\sqrt{2m^2 + a^2}}{m\sqrt{2}}.$$

Из этих же треугольников получаем

$$O_1N = \frac{OB \cdot O_1M}{MO} \text{ или } O_1N = \frac{a(h-m)}{m\sqrt{2}}.$$

Из равнобедренного прямоугольного треугольника ED_1F определяем

$$EF = 2D_1N = 2(D_1O_1 - NO_1)$$

или

$$EF = 2\left[\frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{a(h-m)}{m\sqrt{2}}\right] = \frac{a(2m-h)\sqrt{2}}{m}.$$

Подставив найденные значения PQ, BM, EF и MN в формулу площади сечения, после несложных преобразований получим

$$S = \frac{a(4mh - 2m^2 - h^2)\sqrt{a^2 + 2m^2}}{2m^2}.$$

Ответ: А. $S = a\sqrt{a^2 + 2m^2}$, если $m \leqslant \frac{1}{2}h$.

Б. $S = \frac{a(4mh - 2m^2 - h^2)\sqrt{a^2 + 2m^2}}{2m^2}$, если $\frac{1}{2}h < m \leqslant h$.

Задача 3. Каждое ребро правильной треугольной призмы равно a. Через сторону основания и середину оси проведена плоскость. Найти площадь этого сечения и вычислить ее при $a = 7{,}6$ *см*.

Дана правильная призма, все ребра которой $AA_1 = AB = BC = CA = a$ (рис. 312). Через ребро основания BC и середину D оси OO_1 проведем плоскость, которая пересечет основание $A_1B_1C_1$ по прямой, параллельной B_1C_1. Точки пересечения этой прямой с ребрами A_1B_1 и A_1C_1 соответственно обозначим через M и N. Соединив точки M и B, N и C, получим сечение $BMNC$. Так как $MN \parallel BC$, то $BMNC$ — трапеция и ее высотой будет отрезок PQ ($LP \perp BC$, следовательно, и $QP \perp BC$). Тогда площадь сечения $BMNC$

$$S = \frac{1}{2}(BC + MN) \cdot QP.$$

По условию задачи $BC = a$; $\triangle DOP = \triangle DO_1Q$ ($OD = DO_1$; $\angle PDO = \angle QDO_1$ и эти треугольники прямоугольные). Тогда $OP = O_1Q = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ (как радиус вписанной окружности в $\triangle ABC$). Из прямоугольника LQO_1O получим

$$QO_1 = LO = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Так как $QL = AA_1 = a$, то из прямоугольного треугольника QLP находим

$$PQ = \sqrt{LP^2 + LQ^2} = \sqrt{\frac{a^2}{3} + a^2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

Из подобия треугольников A_1MN и $A_1B_1C_1$ ($MN \parallel B_1C_1$) имеем

$$\frac{MN}{B_1C_1} = \frac{A_1Q}{A_1P_1} = \frac{1}{3} \text{ или } MN = \frac{1}{3}B_1C_1 = \frac{1}{3}a.$$

Подставляя найденные значения BC, PQ и MN в формулу площади сечения, найдем

$$S = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{3}a\right) \cdot \frac{2a\sqrt{3}}{3} = \frac{4a^2\sqrt{3}}{9}.$$

Ответ: $S = \frac{4a^2\sqrt{3}}{9} \approx 0{,}7698a^2$; при $a = 7{,}6$ *см*, $S \approx 44{,}46$ *см*^{2}.

Задача 4. В наклонной треугольной призме боковые ребра содержат по 8 *см*; стороны перпендикулярного сечения относятся как 9 : 10 : 17, а его площадь равна 144 *см*^{2}. Определить боковую поверхность этой призмы.

Пусть дана призма AC_1; $AA_1 = BB_1 = CC_1 = 8$ *см*, $A_2B_2C_2$ — перпендикулярное сечение призмы, причем $A_2B_2 : B_2C_2 : C_2A_2 = 9 : 10 : 17$ и $S_{A_2B_2C_2} = 144$ *см*^{2} (рис. 313).

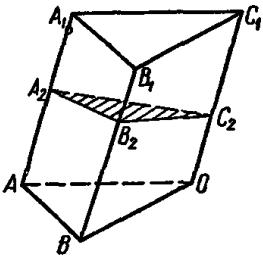


Рис. 313.

Требуется определить боковую поверхность призмы

$$S_{\text{бок}} = (A_2B_2 + B_2C_2 + C_2A_2) \cdot AA_1.$$

По условию задачи $AA_1 = 8$ *см*, а $A_2B_2 : B_2C_2 : C_2A_2 = 9 : 10 : 17$. Обозначим $A_2B_2 = 9x$, $B_2C_2 = 10x$, $C_2A_2 = 17x$. Тогда по формуле Герона площадь перпендикулярного сечения равна $\sqrt{18x \cdot x \cdot 8x \cdot 9x} = 36x^2$, а по условию она равна 144 *см*^{2}, т.е. $36x^2 = 144$, откуда следует $x = 2$ *см*.

В таком случае $A_2B_2 + B_2C_2 + C_2A_2 = 36x = 72$ *см*, и, следовательно,

$$S_{\text{бок}} = 72 \cdot 8 = 576 \text{ см}^2.$$

Ответ: $S_{\text{бок}} = 576$ *см*^{2}.

Задача 5. В наклонной треугольной призме площадь одной из боковых граней равна m^2, а расстояние ее от противолежащего ребра равно $2a$. Найти объем призмы.

Пусть на рис. 314 PMN перпендикулярное сечение призмы AC_1 и $ML \perp PN$, тогда по условию задачи $ML = 2a$, а $PN \cdot BB_1 = m^2$. Известно, что объем призмы равен

$$V = BB_1 \cdot S_{PMN}$$

или

$$V = \frac{1}{2} PN \cdot ML \cdot BB_1 = \frac{1}{2}(PN \cdot BB_1) \cdot ML = \frac{1}{2} m^2 \cdot 2a = am^2.$$

Ответ: $V = am^2$.

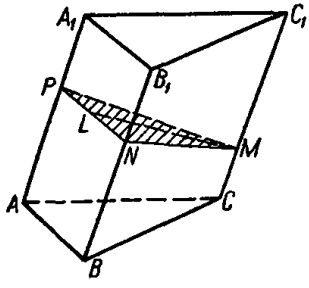


Рис. 314.

Задача 6. Определить объем прямоугольного параллелепипеда по площадям его граней: Q_1, Q_2 и Q_3.

Обозначим измерения параллелепипеда через x, y и z. Тогда

$$xy = Q_1;\ xz = Q_2;\ yz = Q_3.$$

Перемножив правые и левые части этих равенств, получим

$$(xyz)^2 = Q_1Q_2Q_3,$$

откуда

$$V = xyz = \sqrt{Q_1Q_2Q_3}.$$

Ответ: $V = \sqrt{Q_1Q_2Q_3}$ *куб. ед.*

Упражнения. 1. Построить и найти площадь сечения куба плоскостью, проходящей перпендикулярно его диагонали через ее середину, если ребро куба равно a.

2. Дана правильная шестиугольная призма, боковое ребро которой равно b, а сторона основания равна a. Построить сечение призмы плоскостью, проходящей через середины смежных сторон основания и середину ее оси, и найти площадь сечения.

3. Ребра прямого параллелепипеда, выходящие из одной вершины, относятся как 1 : 2 : 3, причем боковое ребро больше сторон основания. Через середины двух сторон основания, образующих большой угол, проведено сечение, параллельное диагонали, соединяющей вершины двух тупых углов оснований. В каком отношении это сечение делит боковую поверхность параллелепипеда?

Указание. О построении сечений многогранников плоскостью см. § 53.

§ 48. Пирамида

Пирамидой называется многогранник, ограниченный гранями многогранного угла и плоскостью, пересекающей все его грани (рис. 315).

Основанием пирамиды называется многогранник, полученный в секущей плоскости ($ABCDE$). Боковыми *гранями* пирамиды называются треугольники ASB, BSC, CSD, DSE, ESA с общей вершиной S, которая называется *вершиной* пирамиды. Боковыми *ребрами* пирамиды

называются ребра, по которым пересекаются боковые грани. *Высотой пирамиды* называется перпендикуляр SO, опущенный из вершины пирамиды на плоскость ее основания. Пирамида называется *правильной*, если ее основание — правильный многоугольник и высота пирамиды проходит через центр этого многоугольника. *Апофемой* правильной пирамиды называется высота ее боковой грани.

Отметим, что в пирамиде буквой S обычно обозначают и ее вершину и поверхность (полную или отдельных ее частей). Однако это не приводит к недоразумению, так как по смыслу всегда ясно, о чем идет речь в данном случае. Кроме того, если рассматривают поверхность или площадь, то в обозначение часто еще вводят дополнительные индексы, например, $S_{бок}$ (боковая поверхность), S_{ABCD} (площадь основания $ABCD$), S_{ASB} (площадь грани ASB) и т. д.

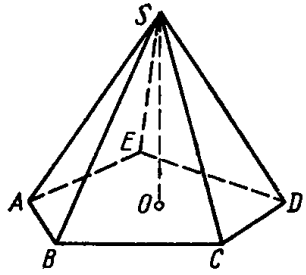


Рис. 315.

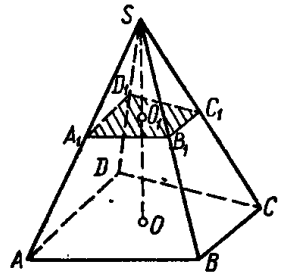


Рис. 316.

Свойства сечений пирамиды плоскостью, параллельной основанию.

Теорема 1. *Если пересечь пирамиду плоскостью, параллельной основанию, то:*

а) *боковые ребра и высота пирамиды разделяются этой плоскостью на пропорциональные отрезки;*

б) *в сечении получится многоугольник, подобный многоугольнику, лежащему в основании;*

в) *площади сечения и основания будут относиться между собой, как квадраты их расстояний от вершины пирамиды.*

На рис. 316 изображена пирамида $SABCD$ и параллельные плоскости $A_1B_1C_1D_1 \parallel ABCD$. В таком случае:

а) $\dfrac{SA_1}{SA} = \dfrac{SB_1}{SB} = \dfrac{SC_1}{SC} = \dfrac{SD_1}{SD}$;

б) многоугольник $A_1B_1C_1D_1$ подобен многоугольнику $ABCD$;

в) $\dfrac{\text{пл. } A_1B_1C_1D_1}{\text{пл. } ABCD} = \dfrac{SO_1^2}{SO^2}$

Теорема 2. *Если две пирамиды с равными высотами пересечь плоскостями, параллельными основаниям, на одинаковом расстоянии от вершины, то площади сечений будут пропорциональны площадям оснований.*

На рис. 317 изображены пирамиды $SABCD$ и $S'A'B'C'$, высоты которых равны $SO = S'O'$. На одинаковых расстояниях от вершины $SO_1 = S'O_1'$ проведены плоскости $A_1B_1C_1D_1$ и $A_1'B_1'C_1'$, параллельные основаниям пирамид. Тогда

$$\frac{\text{пл. } A_1B_1C_1D_1}{\text{пл. } A_1'B_1'C_1'} = \frac{\text{пл. } ABCD}{\text{пл. } A'B'C'}.$$

Следствие. Если у двух пирамид с равновеликими основаниями и равными высотами провести параллельные основаниям сечения на одинаковых расстояниях от вершины, то сечения будут равновеликими.

Поверхность пирамиды. *Боковой* поверхностью пирамиды называется сумма площадей ее боковых граней.

Полной поверхностью пирамиды называется сумма ее боковой поверхности и площади основания.

Боковая поверхность правильной пирамиды равна половине произведения периметра многоугольника основания на апофему:

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} mP,$$

где P — периметр многоугольника основания, а m — апофема.

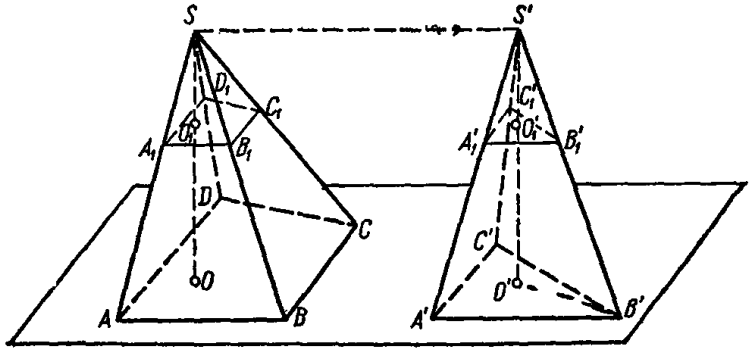


Рис. 317.

Объем пирамиды. *Объем пирамиды равен одной трети произведения площади ее основания на высоту:*

$$V = \frac{1}{3} BH,$$

где B — площадь основания, а H — высота пирамиды.

Задача 1. В правильную четырехугольную пирамиду вписан куб так, что четыре его вершины находятся на боковых ребрах пирамиды, а остальные четыре — в плоскости ее основания. Определить ребро куба, если в пирамиде сторона основания равна a и высота равна h.

На рис. 318 изображена пирамида $SABCD$ с вписанным в нее кубом $MNPQM_1N_1P_1Q_1$, четыре вершины которого лежат на боковых ребрах пирамиды, а остальные в плоскости основания. Обозначим ребро куба через x, т. е. положим, что $MN = MM_1 = x$. Рассмотрим подобные треугольники SO_1B и SON ($ON \parallel O_1B$). Из подобия этих треугольников находим

$$\frac{SO}{SO_1} = \frac{ON}{O_1B}.$$

Учитывая, что $SO_1 = h$, $SO = h - x$, $ON = \frac{x}{\sqrt{2}}$ и $O_1B = \frac{a}{\sqrt{2}}$, получаем

$$\frac{h-x}{h} = \frac{x}{a},$$

откуда

$$x = \frac{ah}{a+h}.$$

Ответ: $MN = x = \frac{ah}{a+h}$.

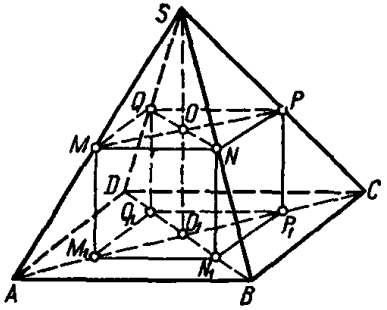


Рис. 318.

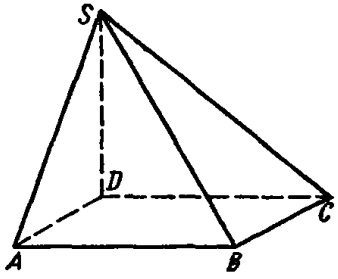


Рис. 319

Задача 2. Основанием пирамиды служит квадрат, ее высота проходит через одну из вершин основания. Определить боковую поверхность этой пирамиды, если сторона основания равна 20 *дм*, а высота равна 21 *дм*.

Дана пирамида $SABCD$, в основании которой лежит квадрат $ABCD$ со стороной 20 *дм*, а высота пирамиды $SD = 21$ *дм* (рис. 319). Определить боковую поверхность пирамиды.

Боковая поверхность пирамиды равна сумме площадей боковых граней:

$$S_{\text{бок}} = S_{ASD} + S_{DSC} + S_{CSB} + S_{BSA}$$

Треугольники ADS и CDS — прямоугольные и равные, и их площади

$$S_{ASD} = S_{CDS} = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 21 = 210 \text{ } дм^2.$$

Из этих треугольников по теореме Пифагора находим

$$AS = SC = \sqrt{20^2 + 21^2} = 29 \text{ } дм.$$

Так как по теореме о трех перпендикулярах

$$SC \perp CB \text{ и } SA \perp AB \ (DC \perp CB \text{ и } DA \perp AB),$$

то треугольники SAB и SCB прямоугольные и равные, и их площади

$$S_{ASB} = S_{CSB} = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 29 = 290 \text{ } дм^2.$$

Тогда

$$S_{бок} = 2\,(290 + 210) = 1000\ дм^2.$$

Ответ: 1000 $дм^2 = 10\ м^2$.

Задача 3. В основании четырехугольной пирамиды лежит параллелограмм. Через одну из сторон этого параллелограмма и среднюю линию противолежащей грани проведена плоскость. Найти, в каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды.

Дана пирамида $SABCD$, у которой $ABCD$ — параллелограмм и MN — средняя линия грани SAD (рис. 320). Найти отношение V_{SBMNC} и V_{ABCDMN}. Пусть объем данной пирамиды $SABCD$ равен V.

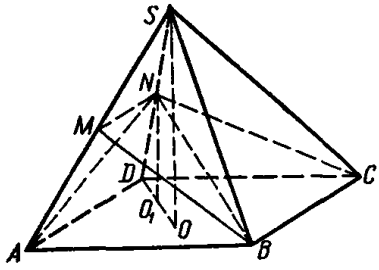


Рис. 320.

Рассмотрим пирамиды $SABCD$ и $NABCD$, у которых основание $ABCD$ общее, а высоты SO и NO_1 удовлетворяют соотношению

$$NO_1 = \frac{1}{2} SO$$

$$\left(\triangle SOD \sim \triangle NO_1D \text{ и } SN = \frac{1}{2} SD\right).$$

Тогда объем

$$V_{NABCD} = \frac{1}{2} V.$$

Плоскость треугольника SBD делит объем данной пирамиды на две равные части, т. е.

$$S_{SABD} = \frac{1}{2} V,$$

так как у пирамид $SABD$ и $SBCD$ высота общая, а площади оснований равны.

Прямая AN как медиана $\triangle ADS$ делит площадь грани ADS на две равновеликие части, тогда

$$V_{BAND} = V_{BANS} = \frac{1}{4} V.$$

Прямая NM (медиана $\triangle ANS$) делнт $\triangle ANS$ на две равновеликие части, поэтому

$$V_{BANM} = \frac{1}{2} V_{BANS} = \frac{1}{8} V.$$

В таком случае объем V_1 части $ABCDMN$ пирамиды $V_1 = V_{ABCDMN} = V_{NABCD} + V_{BANM} = \frac{1}{2} V + \frac{1}{8} V = \frac{5}{8} V$, а объем V_2 оставшейся части

$$V_2 = V_{SBCNM} = V - \frac{5}{8} V = \frac{3}{8} V,$$

и искомое отношение

$$V_{SBCNM} : V_{ABCDMN} = \frac{3}{8} V : \frac{5}{8} V = 3 : 5.$$

Ответ: $V_2 : V_1 = 3 : 5$.

Задача 4. Доказать, что если в двух пирамидах, имеющих по равному двугранному углу при основании, равны также и ребра этих углов, то отношение объемов данных пирамид равно отношению произведений площадей граней, образующих равные двугранные углы.

Пусть даны две пирамиды $SABC$ и $S_1A_1B_1C_1D_1$, у которых двугранные углы $SABC$ и $S_1A_1D_1C_1B_1$ равны, причем $AB = A_1D_1$ (рис. 321). Доказать, что

$$V_{SABC} : V_{S_1A_1B_1C_1D_1} = (S_{SAB} \times S_{ABC}) : (S_{S_1A_1D_1} \cdot S_{A_1B_1C_1D_1}).$$

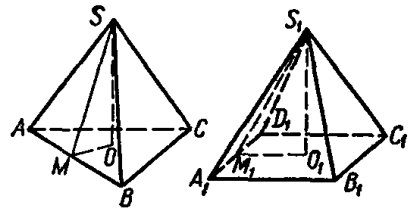


Рис. 321.

Построим линейные углы SMO и $S_1M_1O_1$ данных равных двугранных углов. По условию $\angle SMO = \angle S_1M_1O_1$. Тогда прямоугольные треугольники MSO и $M_1S_1O_1$ подобны и

$$\frac{SO}{S_1O_1} = \frac{SM}{S_1M_1}.$$

Площади боковых граней SAB и $S_1A_1D_1$ относятся, как их высоты, так как $AB = A_1D_1$, т. е.

$$\frac{S_{ASB}}{S_{A_1S_1D_1}} = \frac{SM}{S_1M_1} = \frac{SO}{S_1O_1}.$$

Найдем отношение объемов данных пирамид

$$\frac{V_{SABC}}{V_{S_1A_1B_1C_1D_1}} = \frac{\frac{1}{3} SO \cdot S_{ABC}}{\frac{1}{3} S_1O_1 \cdot S_{A_1B_1C_1D_1}} = \frac{S_{ASB} \cdot S_{ABC}}{S_{A_1S_1D_1} \cdot S_{A_1B_1C_1D_1}};$$

таким образом,

$$\frac{V_{SABC}}{V_{S_1A_1B_1C_1D_1}} = \frac{S_{ASB} \cdot S_{ABC}}{S_{A_1S_1D_1} \cdot S_{A_1B_1C_1D_1}},$$

что и требовалось доказать.

Мы привели доказательство для треугольной и четырехугольной пирамид. Легко видеть, что многоугольность пирамид на результат доказательства не влияет.

Если ребра равных двугранных углов в рассматриваемых пирамидах не равны между собой, то отношение объемов этих пирамид прямо пропорционально произведениям площадей граней, образующих эти углы, и обратно пропорционально длинам их ребер (рис. 321), т. е.

$$\frac{V_{SABC}}{V_{S_1A_1C_1D_1}} = \frac{S_{ASB} \cdot S_{ABC}}{S_{A_1S_1D_1} \cdot S_{A_1B_1C_1D_1}} \cdot \frac{A_1D_1}{AB}.$$

§ 49. Усеченная пирамида

Усеченной пирамидой $ABCDA_1B_1C_1D_1$ называется часть пирамиды $SABCD$, заключенная между ее основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию (рис. 322).

Основаниями усеченной пирамиды называются параллельные грани $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ ($ABCD$ — нижнее основание, а $A_1B_1C_1D_1$ — верхнее основание). *Высотой* усеченной пирамиды называется отрезок прямой, перпендикулярный ее основаниям и заключенный между их плоскостями. Усеченная пирамида называется *правильной*, если ее основания правильные многоугольники и прямая, соединяющая центры оснований, перпендикулярна плоскости оснований. *Апофемой* правильной усеченной пирамиды называют высоту ее боковой грани.

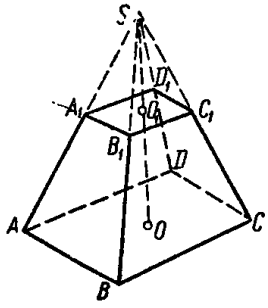


Рис. 322.

Поверхность усеченной пирамиды. Боковой поверхностью усеченной пирамиды называется сумма площадей ее боковых граней.

Полная поверхность усеченной пирамиды равна сумме боковой поверхности и площадей оснований.

Боковая поверхность правильной усеченной пирамиды равна произведению полусуммы периметров оснований на апофему:

$$S_{\text{бок}} = \frac{P + P_1}{2} \cdot m,$$

где P и P_1 — периметры оснований, m — апофема усеченной пирамиды.

Объем усеченной пирамиды. *Объем усеченной пирамиды равен сумме объемов трех пирамид*, имеющих высоту, одинаковую с высотой усеченной пирамиды, а *основания:* одна — нижнее основание данной пирамиды, другая — верхнее основание, а третья — основание, площадь которого равна среднему геометрическому площадей верхнего и нижнего оснований.

Пусть площади оснований усеченной пирамиды равны F и f, а высота равна h, тогда объем

$$V = \frac{h}{3}(F + f + \sqrt{fF}).$$

Задача 1. Если в усеченной пирамиде площади оснований равны S_1 и S_2, то площадь S_x сечения ее плоскостью, делящей боковые ребра пополам, равна $\frac{1}{4}(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$. Доказать.

В усеченной пирамиде AC_1 площади оснований $f = S_{A_1B_1C_1} = S_1$ и $F = S_{ABC} = S_2$ и плоскость $A'B'C'$ делит боковые ребра пирамиды пополам, а значит, параллельна плоскостям оснований (рис. 323). Найти площадь $S_{A'B'C'} = S_x$.

Площади параллельных сечений пирамиды относятся, как квадраты сходственных сторон. Обозначив $A_1B_1 = a_1$; $AB = a_2$; $A'B' = a_x$, получим

$$\frac{a_1^2}{S_1}=\frac{a_2^2}{S_2}=\frac{a_x^2}{S_x} \text{ или } \frac{a_1}{\sqrt{S_1}}=\frac{a_2}{\sqrt{S_2}}=\frac{a_x}{\sqrt{S_x}},$$

откуда

$$\frac{\frac{a_1+a_2}{2}}{\frac{\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}}{2}}=\frac{a_x}{\sqrt{S_x}}.$$

По свойству средней линии трапеции имеем $\frac{a_1+a_2}{2}=a_x$, тогда

$$\frac{\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}}{2}=\sqrt{S_x} \text{ или } S_x=\frac{1}{4}(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2,$$

что и требовалось доказать.

З а д а ч а 2. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде стороны оснований равны 5 *дм* и 11 *дм*, а диагональ пирамиды — 12 *дм*. Определить боковую поверхность.

В усеченной пирамиде AC_1 имеем $A_1B_1=B_1C_1=C_1D_1=D_1A_1=5$ *дм*; $AB=BC=CD=DA=11$ *дм* и $A_1C=12$ *дм*. Найти боковую поверхность (рис. 324).

Из вершины A_1 проведем $A_1N\perp AB$ и $A_1M\perp AC$, тогда A_1N — апофема пирамиды.

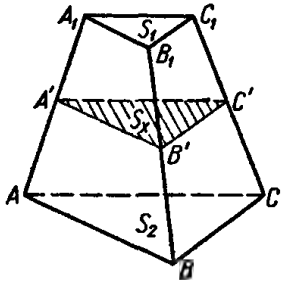


Рис. 323.

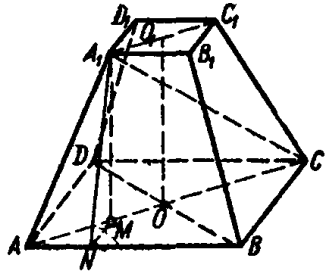


Рис. 324.

Боковая поверхность

$$S_{бок}=\frac{1}{2}(P+P_1)\cdot A_1N,$$

где $P=4AB=44$ *дм*, а $P_1=4A_1B_1=20$ *дм*.

Из квадратов $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ по их сторонам определяем диагонали

$$AC=11\sqrt{2}\text{ дм},\ A_1C_1=5\sqrt{2}\text{ дм}.$$

Рассматривая равнобочную трапецию AA_1C_1C, находим

$$AM=\frac{AC-A_1C_1}{2}=3\sqrt{2}\text{ дм}$$

и соответственно

$$MC = \frac{AC + A_1C_1}{2} = 8\sqrt{2}\ дм.$$

Тогда из прямоугольного треугольника A_1MC находим высоту пирамиды

$$O_1O = A_1M = \sqrt{A_1C^2 - MC^2} = \sqrt{12^2 - (8\sqrt{2})^2} = 4\ дм.$$

Из равнобедренного прямоугольного треугольника AMN($\angle ANM = 90°$), гипотенуза которого $AM = 3\sqrt{2}\ дм$, находим сторону

$$MN = \frac{AM}{\sqrt{2}} = 3\ дм.$$

Апофему данной пирамиды вычислим, рассматривая прямоугольный треугольник A_1NM($\angle A_1MN = 90°$):

$$A_1N = \sqrt{A_1M^2 + MN^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5\ дм.$$

Подставляя найденные значения P, P_1 и A_1N в формулу боковой поверхности пирамиды, получим

$$S_{бок} = \frac{1}{2}(44 + 20) \cdot 5 = 160\ дм^2.$$

Ответ: $S_{бок} = 160\ дм^2 = 1{,}6\ м^2$.

Задача 3. Определить объем правильной треугольной усеченной пирамиды, у которой стороны оснований 30 $м$ и 20 $м$, а боковая поверхность равна сумме площадей оснований.

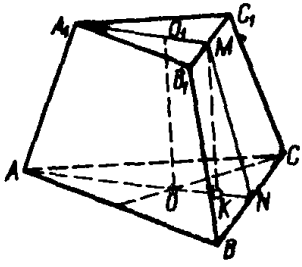


Рис. 325.

В правильной треугольной усеченной пирамиде $AB = 30\ м$, $A_1B_1 = 20\ м$ и $S_{бок} = S_{ABC} + S_{A_1B_1C_1}$ (рис. 325). Обозначим стороны оснований $AB = a = 30\ м$, $A_1B_1 = a_1 = 20\ м$ и апофему пирамиды $MN = m$. Тогда согласно условию имеем

$$\frac{1}{2}(3a + 3a_1)\,m = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{a_1^2\sqrt{3}}{4}$$

или

$$MN = m = \frac{\sqrt{3}(a^2 + a_1^2)}{6(a + a_1)} = \frac{\sqrt{3}\,(30^2 + 20^2)}{6(30 + 20)} = \frac{13\sqrt{3}}{3}\ м.$$

Рассматривая равносторонние $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$, центры которых находятся в точках O и O_1, найдем ON и O_1M как радиусы окружностей, вписанных в эти треугольники:

$$ON = \frac{a\sqrt{3}}{6} = 5\sqrt{3}\ м;\ O_1M = \frac{a_1\sqrt{3}}{6} = \frac{10\sqrt{3}}{3}\ м.$$

Из прямоугольной трапеции O_1MNO ($MK \perp ON$) находим

$$KN = ON - OK = ON - O_1M \text{ или } KN = \frac{5\sqrt{3}}{3} \text{ м}.$$

Рассматривая прямоугольный треугольник MKN, находим высоту данной пирамиды

$$h = MK = \sqrt{MN^2 - NK^2} = \sqrt{\left(\frac{13\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^2} = 4\sqrt{3} \text{ м}.$$

Тогда объем данной пирамиды

$$V = \frac{\sqrt{3}}{3 \cdot 4} h (a^2 + a_1^2 + aa_1) = 1900 \text{ м}^3.$$

Ответ: $V = 1900$ м^3.

§ 50. Клин. Обелиск

Клином называется пятигранник, основание которого — прямоугольник, *боковые грани* — равнобедренные треугольники и равнобедренные трапеции (рис. 326).

Поверхность и объем клина могут быть вычислены по формулам

$$S = ab + \frac{b\sqrt{4h^2 + (a - a_1)^2} + (a + a_1)\sqrt{4h^2 + b^2}}{2},$$

$$V = \frac{1}{6}(2a + a_1)bh.$$

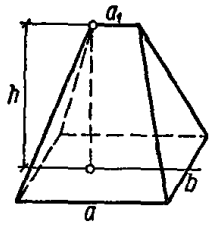


Рис. 326.

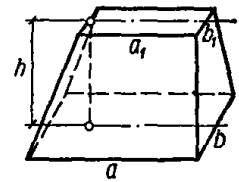


Рис. 327.

Обелиском называется шестигранник, основания которого — прямоугольники, расположенные в параллельных плоскостях, а противоположные боковые грани одинаково наклонены к основанию. Продолжения ребер не пересекаются в одной точке, так что обелиск не является усеченной четырехугольной пирамидой (рис. 327).

Поверхность и объем обелиска могут быть вычислены по формулам

$$S = ab + a_1b_1 + \frac{(a + a_1)\sqrt{4h^2 + (a - a_1)^2} + (b + b_1)\sqrt{4h^2 + (b - b_1)^2}}{2},$$

$$V = \frac{h}{6}[ab + a_1b_1 + (a + a_1)(b + b_1)].$$

§ 51. Подобие многогранников

Два многогранника называются подобными, если они имеют соответственно равные многогранные углы и соответственно подобные грани. Соответственные элементы подобных многогранников называются *сходственными*.

У подобных многогранников:

двугранные углы равны и одинаково расположены;

сходственные ребра пропорциональны.

Кроме того, справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Если в пирамиде проведем секущую плоскость параллельно основанию, то она отсечет от нее другую пирамиду, подобную данной.*

Теорема 2. *Поверхности подобных многогранников относятся как квадраты сходственных линейных элементов многогранников.*

Теорема 3. *Объемы подобных многогранников относятся, как кубы сходственных линейных элементов этих многогранников.*

Теорема 4. *Квадраты объемов подобных многогранников относятся как кубы площадей сходственных граней.*

Задача 1. Площади оснований усеченной пирамиды S_1 и S_2, а ее объем равен V. Определить объем полной пирамиды.

Пусть $S_1 > S_2$. Обозначим объем полной пирамиды через V_1, а объем пирамиды, дополняющей данную усеченную пирамиду до полной, через V_2. Тогда по теореме 4

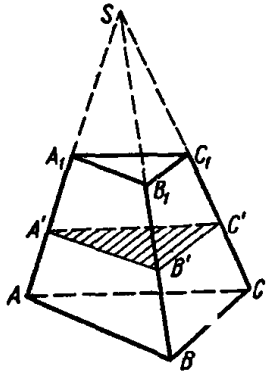


Рис. 328.

$$\frac{V_2^2}{V_1^2} = \frac{S_2^3}{S_1^3} \text{ или } \frac{V_2}{V_1} = \frac{S_2^{3/2}}{S_1^{3/2}}.$$

Составляя производную пропорцию, получим $\frac{V_1 - V_2}{V_1} = \frac{S_1^{3/2} - S_2^{3/2}}{S_1^{3/2}}$. С учетом $V_1 - V_2 = V$ находим $\frac{V}{V_1} = \frac{S_1^{3/2} - S_2^{3/2}}{S_1^{3/2}}$, откуда $V_1 = \frac{VS_1^{3/2}}{S_1^{3/2} - S_2^{3/2}}$.

Ответ: $V_1 = \frac{V\sqrt{S_1^3}}{\sqrt{S_1^3} - \sqrt{S_2^3}}$ *кв. ед.*

Задача 2. Площади оснований усеченной пирамиды равны a^2 и b^2. Найти площадь сечения, параллельного плоскостям оснований усеченной пирамиды и делящего ее объем пополам.

В усеченной пирамиде AC_1 (для простоты рисунка рассматривается треугольная пирамида) даны $S_{ABC} = a^2$; $S_{A_1B_1C_1} = b^2$ (рис. 328). Требуется найти площадь сечения $A'B'C'$ (пл. $ABC \parallel$ пл. $A'B'C'$), которое делит усеченную пирамиду на равновеликие по объему части.

Дополним усеченную пирамиду до полной. По теореме 1 пирамиды $SABC$, $SA'B'C'$, $SA_1B_1C_1$ подобны.

Обозначим площадь искомого сечения $SA'B'C'$ через x^2, а объемы пирамид $SABC$, $SA'B'C'$ и $SA_1B_1C_1$ соответственно V_a, V_x, V_b; по теореме 4

$$\frac{V_a^2}{a^6} = \frac{V_x^2}{x^6} = \frac{V_b^2}{b^6} \text{ или } \frac{V_a}{a^3} = \frac{V_x}{x^3} = \frac{V_b}{b^3} = t,$$

где t — некоторое число, обозначающее величину этих отношений.

Тогда $V_a = a^3t$, $V_x = x^3t$, $V_b = b^3t$. По условию задачи $V_a - V_x = V_x - V_b$ или $a^3t - x^3t = x^3t - b^3t$, откуда $2x^3 = a^3 + b^3$, и, следовательно,

$$x^2 = \left(\frac{a^3 + b^3}{2}\right)^{2/3}.$$

Ответ; $S_{A'B'C'} = \sqrt[3]{\left(\frac{a^3 + b^3}{2}\right)^2}$ *кв. ед.*

§ 52. Правильные многогранники

Формула Эйлера. Для любых выпуклых многогранников существует некоторое постоянное соотношение между числом вершин, граней и ребер, которое было установлено Леонардом Эйлером (1707—1783).

Сумма чисел граней и вершин выпуклого многогранника на два больше числа его ребер:

$$\text{В} + \text{Г} = \text{Р} + 2,$$

где В — число вершин, Г — число граней, Р — число ребер многогранника.

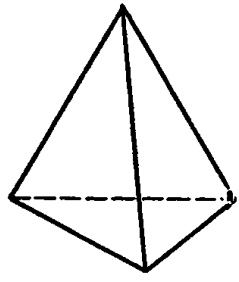


Рис. 329.

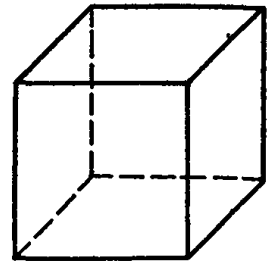


Рис. 330.

Правильные многогранники. *Многогранник называется правильным*, если все его грани — правильные многоугольники и все многогранные углы равны.

Правильные многогранники имеют правильную сетку, т. е. все их грани имеют одинаковое количество сторон, а из каждой вершины выходит одинаковое количество ребер. Доказано, что существует только пять правильных сеток, следовательно, и пять правильных выпуклых многогранников, которые называются также телами Платона.

1. *Тетраэдр* (правильный четырехгранник), гранями которого являются правильные треугольники (рис. 329). Тетраэдр имеет 4 грани, 6 ребер и 4 вершины, в каждой из которых сходится по 3 ребра.

2. *Гексаэдр* (правильный шестигранник — куб), гранями которого являются правильные четырехугольники — квадраты (рис. 330). Гексаэдр имеет 6 граней, 12 ребер и 8 вершин, в каждой из которых сходится по 3 ребра.

3. *Октаэдр* (правильный восьмигранник), гранями которого являются правильные треугольники (рис. 331). Октаэдр имеет 8 граней, 12 ребер и 6 вершин, в каждой из которых сходится по 4 ребра.

4. *Додекаэдр* (правильный двенадцатигранник), гранями которого служат правильные пятиугольники (рис. 332). Додекаэдр имеет 12 граней, 30 ребер и 20 вершин, в каждой из которых сходится по 3 ребра.

5. *Икосаэдр* (правильный двадцатигранник), гранями которого служат правильные треугольники (рис. 333). Икосаэдр имеет 20 граней, 30 ребер и 12 вершин, в каждой из которых сходится по 5 ребер.

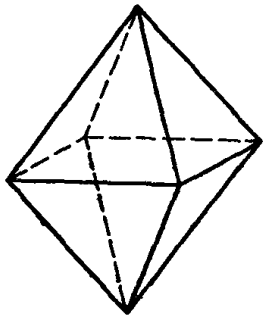


Рис. 331.

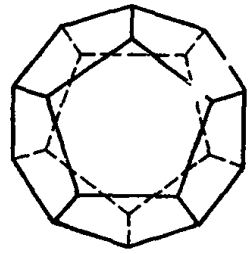


Рис. 332.

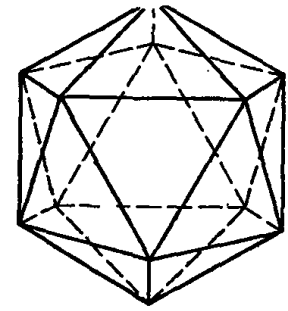


Рис. 333.

Названия всех тел Платона происходят от греческого слова ἕδρα — грань, основа, база и соответствующего числительного: τετραζ — четыре, ἕξ — шесть, ὀκτώ — восемь, δώδεκα — двенадцать, εἴκοσι — двадцать.

Тела Платона нашли широкое применение в кристаллографии, так как многие кристаллы имеют форму правильных многогранников. Например, поваренная соль имеет кристаллы кубической системы в виде гексаэдров, алмаз чаще всего кристаллизуется в виде октаэдров и т. д.

Для тел Платона как для частного случая выпуклых многогранников справедлива формула Эйлера; например, для тетраэдра

$$В + Г = Р + 2 = 8.$$

Кроме правильных выпуклых многогранников существуют еще и невыпуклые (звездчатые) правильные многогранники, которые получили общее название тел Пуансо, на которых мы более подробно не имеем возможности остановиться.

Сводная таблица правильных многогранников.

Введенные обозначении: a — ребро многогранника, $N_1 = Г$ — количество граней, N_2 — количество ребер (сторон) у каждой грани, N_3 — количество ребер у каждой вершины, $N_4 = В$ — количество вершин, $N_5 = Р$ — общее количество ребер, S — площадь поверхности, V — объем, R — радиус описанного шара, r — радиус вписанного шара.

Таблица 9

Многогранник	Свойства многогранника и соотношения между его элементами
Тетраэдр (правильный четырехгранник)	$N_1 = 4,\ N_2 = 3,\ N_3 = 3,\ N_4 = 4,\ N_5 = 6;$ $S = a^2\sqrt{3} \approx 1{,}7321a^2;\ V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} \approx 0{,}1179a^3;$ $R = \frac{a\sqrt{6}}{4} \approx 0{,}6124a;\ r = \frac{a\sqrt{6}}{12} \approx 0{,}2041a$
Тетраэдр (правильный шестигранник — куб)	$N_1 = 6,\ N_2 = 4,\ N_3 = 3,\ N_4 = 8,\ N_5 = 12;$ $S = 6a^2;\ V = a^3;$ $R = \frac{a\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}8660a;\ r = \frac{1}{2}a = 0{,}5a$
Октаэдр (правильный восьмигранник)	$N_1 = 8,\ N_2 = 3,\ N_3 = 4,\ N_4 = 6,\ N_5 = 12;$ $S = 2a^2\sqrt{3} \approx 3{,}4641a^2;\ V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3} \approx 0{,}4714a^3;$ $R = \frac{a\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7071a;\ r = \frac{a\sqrt{6}}{6} \approx 0{,}4082a$
Додекаэдр (правильный двенадцатигранник	$N_1 = 12,\ N_2 = 5,\ N_3 = 3,\ N_4 = 20,\ N_5 = 30;$ $S = 3a^2\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} \approx 20{,}6457a^2;$ $V = \frac{1}{4}a^3(15 + 7\sqrt{5}) \approx 7{,}6631a^3;$ $R = \frac{a\sqrt{3}(1 + \sqrt{5})}{4} \approx 1{,}4013a;$ $r = \frac{a\sqrt{250 + 110\sqrt{5}}}{20} \approx 1{,}1135a$
Икосаэдр (правильный двадцатигранник)	$N_1 = 20,\ N_2 = 3,\ N_3 = 5,\ N_4 = 12,\ N_5 = 30;$ $S = 5a^2\sqrt{3} \approx 8{,}6603a^2;\ V = \frac{5a^2}{12}(3 + \sqrt{5}) \approx 2{,}1817a^3;$ $R = \frac{a\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} \approx 0{,}9511a;\ r = \frac{a\sqrt{3}(3 + \sqrt{5})}{12} \approx$ $\approx 0{,}7558a$

§ 53. Построение плоских сечений многогранников

Правильное построение сечений многогранников плоскостями играет большую роль как в развитии пространственных представлений, так и в предупреждении ошибок, часто встречающихся при решении многих стереометрических задач на вычисления и доказательства.

Построить сечение многогранника плоскостью — это значит построить прямые, являющиеся следами пересечения граней многогранника данной плоскостью. Секущая плоскость может быть задана различными способами, например:

а) тремя точками, которые не лежат на одной прямой;

б) прямой и точкой, не лежащей на ней;

в) двумя непересекающимися прямыми;

г) некоторыми из указанных выше геометрических элементов в совокупности с различными зависимостями между ними и элементами (гранями, ребрами, диагоналями и т. д.) многогранника.

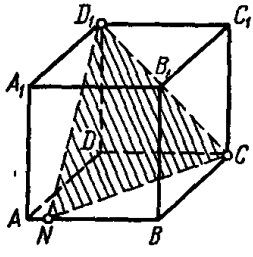


Рис. 334.

При этом могут быть использованы параллельность, перпендикулярность, задание величин двугранных углов и углов между секущей плоскостью и ребрами многогранника и т. д.

На рис. 334 показан пример неправильного построения сечения куба AC_1 плоскостью, проходящей через три заданные точки N, C, D_1, который иллюстрирует, как легко допустить ошибку при построениях и пространстве.

Правильное построение подобного сечения выполнено на рис. 335 в задаче 1 этого параграфа.

Построение плоских сечений многогранников выполняется на основе соответствующих пространственных аксиом и теорем.

Для фактического построения сечений многогранников плоскостью применяются способ соответствия и способ построения следов.

Способ соответствия состоит в том, что для построения сечения первоначально строятся те точки нижнего основания многогранника, которые взаимно однозначно соответствуют точкам искомого сечения.

Способ следов состоит в том, что на плоскости нижнего основания многогранника (иногда на какой-либо другой плоскости) выполняется построение следов (линий и точек пересечения секущей плоскости, некоторых прямых). С помощью этих следов легко выполняется построение точек пересечения секущей плоскости с ребрами многогранника и линий пересечения секущей плоскости с гранями многогранника.

З а д а ч а 1. Построить сечение куба AC_1 плоскостью, проходящей через три заданные точки N, C, D_1 (рис. 335).

Следы сечения на гранях $ABCD$ и CC_1D_1D получаем, соединяя точки N и C; C и D. Для построения следов на гранях ABB_1A_1 и ADD_1A_1 поступаем следующим образом.

Продолжим прямые CN и DA до их пересечения в точке K.

Точка K лежит на продолжении ребра AD, а следовательно, и в грани ADD_1A_1. Соединим точки K и D_1. Прямая KD_1 обязательно пересекается с ребром AA_1, также лежащим в грани ADD_1A_1. Полученную при пересечении прямых AA_1 и KD_1 точку M соединим с точками N и D_1; NCD_1M — искомое сечение.

Сравните это сечение с неправильно построенным сечением NCD_1 на рис. 334.

Задача 2. Построить сечение куба плоскостью, проходящей через три заданные точки K, L, M, лежащие на непересекающихся ребрах (рис. 336).

Опустим из заданной точки L перпендикуляр LN на ребро AD. Проведем прямые LM и NC до их пересечения в точке E (обе эти прямые лежат в одной плоскости, определяемой тремя точками L, M, N, и не параллельны, следовательно, обязательно пересекутся в некоторой точке E).

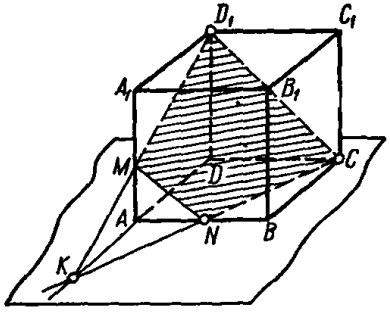


Рис. 335.

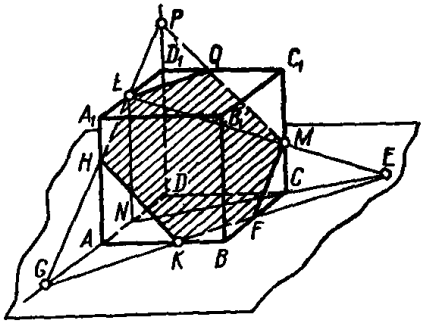


Рис. 336.

Проведем прямую EK до пересечения с прямыми BC и AD соответственно в точках F и G. Проведем прямую GL до пересечения с прямыми AA_1 и DD_1 в точках H и P. Точку P соединим с заданной точкой M и на пересечении PM с ребром D_1C_1 получаем точку Q. Точки L, Q, M, F, K, H последовательно соединяем. Фигура $LQMFKH$ — искомое сечение.

Задача 3. Построить сечение пятиугольной призмы плоскостью, проходящей через три точки A', B', D', заданные на ее ребрах AA_1, BB_1, DD_1 (рис. 337).

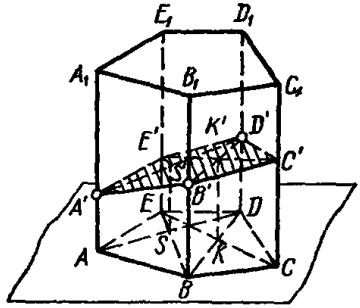


Рис. 337.

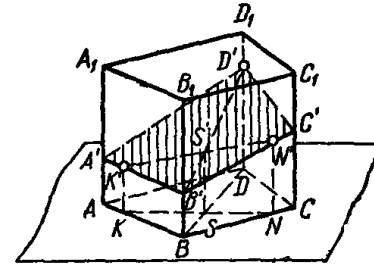


Рис. 338.

В плоскости AA_1D_1D проводим прямые AD и $A'D'$. Соединяем точки B и E прямой. Из точки S в плоскости AA_1D_1D восставим перпендикуляр к основанию призмы до пересечения его с прямой $A'D'$ в точке S'. Проводим через точки B' и S' прямую, которая пересечет ребро EE_1 в точке E'. Соединяем прямыми точку E' с точками A' и D'.

Проведем в основании призмы диагонали EC и BD, которые пересекутся в точке K. Соединим точки B' и D' прямой. В плоскости BB_1D_1D из точки K восставим перпендикуляр к основанию призмы до пересе-

чения его с прямой $B'D'$ в точке K'. Проводим через точки E' и K' прямую, пересекающуюся с ребром CC_1 в точке C'. Соединяем точку C' с точками D' и B' прямыми. Сечение $A'B'C'D'E'$ является искомым.

Задача 4. Построить сечение четырехугольной призмы плоскостью, которая проходит через точки K' и N', данные на гранях призмы, и точку D', данную на ее ребре (рис. 338).

Из заданных точек K' и N' в плоскостях граней AA_1B_1B и BB_1C_1C опускаем перпендикуляры до их пересечения с ребрами AB и BC соответственно в точках K и N. Соединяем попарно точки K' и N', K и N, B и D. Из точки S, в которой пересекаются прямые KN и BD, лежащие в одной и той же плоскости (плоскости основания призмы), восставляем перпендикуляр к этой плоскости до его пересечения с линией $K'N'$. Через полученную точку S' проводим прямую $D'S'$ до ее пересечения с ребром BB_1 в точке B'.

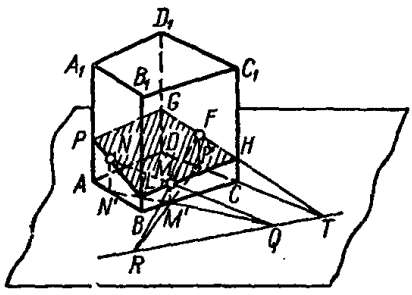


Рис. 339.

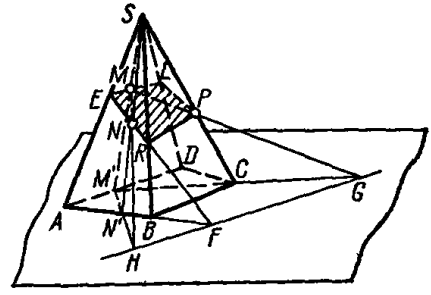


Рис. 340.

Проведя теперь через заданные точки K' и N' отрезки $B'K'$ и $B'N'$ и продолжив их до пересечения с ребрами AA_1 и CC_1, получаем точки A' и C'.

Четырехугольник $A'B'C'D'$ является искомым сечением.

Докажите, что в данном построении каждая рассмотренная пара прямых лежит в одной плоскости, т. е. что ни одна из рассмотренных пар прямых не была скрещивающейся. Например, для полного обоснования выполненного построения надо доказать, что прямая SS' одновременно лежит и в плоскости BB_1D_1D, и в плоскости $KK'N'N$, так как в противном случае прямые SS' и $K'N'$ не пересекутся, а будут являться скрещивающимися.

Проведите такую же проверку и для остальных задач этого параграфа.

Задача 5. Построить сечение четырехугольной призмы плоскостью, которая проходит через три заданные точки F, M, N, лежащие на трех ее разных боковых гранях (рис. 339).

Проводим через точки M, N, F прямые MM', NN', FF', параллельные ребрам призмы. Находим на плоскости основания призмы $ABCD$ следы прямых MN и MF. Следом прямой NM будет точка Q, следом прямой FM — точка R. В таком случае прямая QR будет являться следом плоскости искомого сечения на плоскости основания. Продолжим отрезок DC до пересечения с продолжением QR в точке T. Проводим через точки T и F прямую, которая пересечет ребро DD_1 в точке G, а ребро CC_1 в точке H. Проведем через точки M и H прямую, которая пересечет ребро BB_1 в точке L. Проведем через точки L и N

прямую, которая пересечет ребро AA_1 в точке P. Соединим прямой точки P и G. Сечение $PGFHMLN$ является искомым.

Задача 6. Даны точки M и N, лежащие на боковых гранях четырехугольной пирамиды, и точка P — на ее боковом ребре. Построить сечение пирамиды плоскостью, которая проходит через эти три точки (рис. 340).

Находим на плоскости основания пирамиды след прямой MN — точку H. Соединяем точку M с точкой P и находим точку G — след прямой MP на той же плоскости основания. Проводим прямую HG — след плоскости искомого сечения. Продолжим прямую AB до ее пересечения с прямой HG и в результате находим точку F, принадлежащую плоскости сечения и грани SAB. Через точки F и N, лежащие в плоскости SAB, проводим прямую, которая пересечет ребро SB в точке R и ребро SA в точке E. Через точки E и M проводим прямую, которая пересечет ребро SD в точке L. Полученное сечение $ERPL$ является искомым.

Упражнения. 1. Провести сечение правильной пятиугольной призмы плоскостью так, чтобы она проходила через ребро основания призмы и составляла с плоскостью ее осиования угол α.

Исследовать все возможные случаи.

2. Провести сечение правильной четырехугольной пирамиды плоскостью, проходящей через одну из вершии основания, перпендикулярно противоположному боковому ребру.

3. Построить сечение, проходящее через три данные точки на смежных боковых ребрах шестиугольной призмы.

4. Построить сечение, проходящее через три даиные точки иа смежных боковых гранях пятиугольной призмы.

5. Построить сечение, проходящее через три данные точки, одна из которых находится на основании, а две другие — на боковых гранях правильной треугольной пирамиды.

Круглые тела

§ 54. Цилиндр

Цилиндрической поверхностью называется поверхность, производимая движением прямой линии AB (рис. 341), сохраняющей одно и то же направление и пересекающей данную лииию CD. Прямая AB называется *образующей*, а линия CD — *направляющей*.

Если в качестве направляющей цилиидрической поверхности взять окружность, плоскость которой перпендикулярна к образующей, то такая поверхность называется *круговой* цилиндрической.

Цилиндром называется тело, ограниченное цилиндрической поверхностью с замкнутой направляющей и двумя параллельными плоскостями, пересекающими образующие (рис. 342).

Часть цилиидрической поверхности, заключеииая между параллельиыми плоскостями, называется *боковой* поверхностью цилиндра, а части плоскостей, отсекаемые этой поверхностью,— *основаниями* цилиндра. Расстояние между плоскостями оснований называется *высотой* цилиндра.

Прямым круговым цилиндром называется тело, ограиичеиное круговой цилиндрической поверхиостью и двумя параллельиыми плоско-

стями, перпендикулярными к образующей (рис. 343). Основаниями прямого кругового цилиндра являются *круги* радиуса R, а *высота* равна образующей цилиндра:

$$H = AB = OO_1.$$

В элементарной геометрии обыкновенно рассматривают только прямой круговой цилиндр, который в дальнейшем будем называть просто цилиндром.

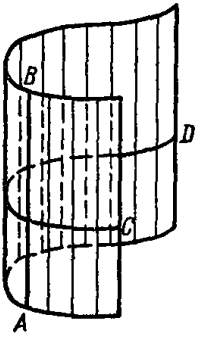


Рис. 341.

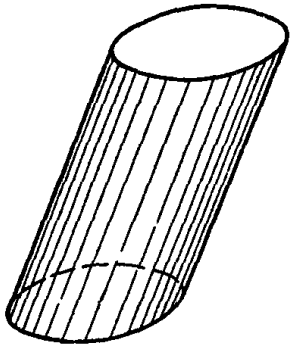


Рис. 342.

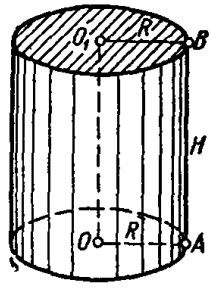


Рис. 343.

Цилиндр можно также получить вращением прямоугольника AOO_1B вокруг одной из его сторон (рис. 343).

Сторона прямоугольника OO_1, вокруг которой происходит вращение, называется *осью* цилиндра, а перпендикулярная ей сторона $OA = R$ называется *радиусом* цилиндра. *Радиус цилиндра равен также радиусу его оснований.*

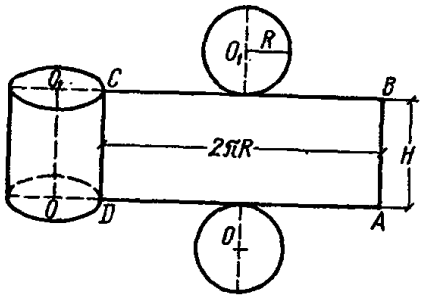


Рис. 344.

Боковая и полная поверхность цилиндра. В качестве боковой поверхности цилиндра принимают предел, к которому стремится боковая поверхность вписанной (или описанной) в этот цилиндр правильной призмы, когда число боковых граней этой призмы неограниченно увеличивается, а длина основания каждой из ее граней стремится к нулю.

Боковая поверхность цилиндра равна произведению длины окружности основания на высоту цилиндра:

$$S_{\text{бок}} = 2\pi RH,$$

где R — радиус основания цилиндра, а H его высота.

Полная поверхность цилиндра равна сумме боковой поверхности и площадей его оснований:

$$S_{\text{полн}} = 2\pi R(H + R).$$

Развертка цилиндра. Если поверхность цилиндра разрезать по образующей и окружностям оснований и развернуть ее так, чтобы

боковая поверхность вместе с основаниями лежали в одной плоскости (рис. 344), то на этой плоскости получим фигуру, которая называется *разверткой* цилиндра. Развертка цилиндра состоит из прямоугольника $ABCD$, стороны которого $AB = H$ и $CB = 2\pi R$, и двух кругов (оснований цилиндра) O и O_1.

Объем цилиндра. В качестве величины *объема* цилиндра принимают предел, к которому стремятся объемы правильных вписанных (или описанных) в цилиндр призм при неограниченном увеличении числа их боковых граней.

Отметим, что если число граней правильной призмы увеличивается беспредельно, то длина основания каждой из них обязательно стремится к нулю.

Объем цилиндра равен произведению площади его основания на высоту:

$$V = \pi R^2 H.$$

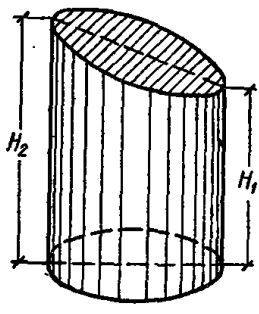


Рис. 345.

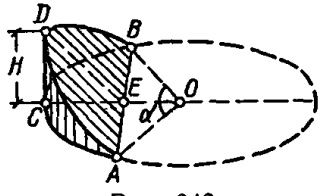


Рис. 346.

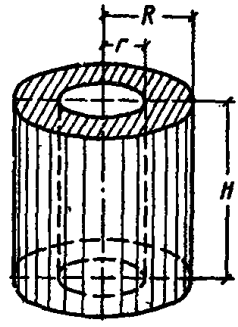


Рис. 347.

Усеченный цилиндр. *Усеченным цилиндром* называют часть цилиндра, которая отсекается от него плоскостью, не параллельной основанию и ие пересекающей его (рис. 345). Боковаи поверхность усеченного цилиндра

$$S_{\text{бок}} = \pi R (H_1 + H_2). \qquad (2)$$

Полная поверхность

$$S_{\text{полн}} = \pi R \left[R + H_1 + H_2 + \sqrt{R^2 + \left(\frac{H_2 - H_1}{2} \right)^2} \right].$$

Объем

$$V = \pi R^2 \frac{H_1 + H_2}{2},$$

где R — радиус основания цилиндра, H_1 и H_2 — наименьшая и наибольшая образующие усеченного цилиндра (рис. 345).

Отрезок цилиндра (цилиндрическая подковка). *Отрезком цилиндра, или цилиндрической подковкой,* называют часть цилиндра, отсекаемую плоскостью, пересекающей одно основание цилиндра и заключенную между этим осиованием и секущей плоскостью (рис. 346).

Высотой отрезка цилиндра называют наибольшую из образующих $CD = H$; $AB = 2a$ прямое ребро, $CE = b$ — стрелка сегмента основании, α — центральный угол основания в радианах.

Боковая поверхность отрезка цилиндра

$$S_{\text{бок}} = \frac{RH}{b}[2a + (b - R)\alpha].$$

Объем

$$V = \frac{H}{6b}[2a(3R^2 - a^2) + 3R^2(b - R)\alpha].$$

(Формулы справедливы и в случае $R < b \leqslant 2R$; $\pi < \alpha \leqslant 2\pi$).

Цилиндрическая труба (полый цилиндр). *Цилиндрической трубой* (полым цилиндром) называют тело, ограниченное двумя цилиндрическими круговыми поверхностями с общей осью и различными радиусами и двумя параллельными плоскостями, перпендикулярными образующим (рис. 347).

R и r — внешний и внутренний радиусы; $\delta = (R - r)$ — толщина цилиндрической трубы, $\rho = \frac{R + r}{2}$ — средний радиус.

Боковая поверхность цилиндрической трубы

$$S_{\text{бок}} = 2\pi H(R + r).$$

Полная поверхность

$$S_{\text{полн}} = 2\pi(R + r)(H + R - r) = 4\pi\rho(H + \delta)$$

и объем

$$V = \pi H(R^2 - r^2) = 2\pi H\rho\delta.$$

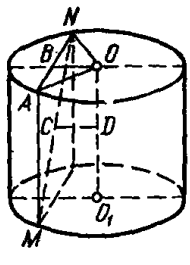


Рис. 348.

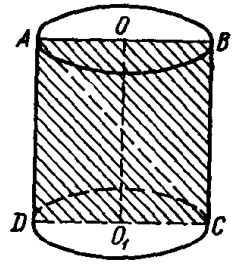


Рис. 349.

Задача 1. Высота цилиндра 6 *дм*, радиус основания 5 *дм*. Концы данного отрезка лежат на окружности обоих оснований; длина его равна 10 *дм*. Найти его кратчайшее расстояние от оси.

В рассматриваемом цилиндре $AM = 6$ *дм*, $AO = 5$ *дм* и отрезок $MN = 10$ *дм* (рис. 348). Найти расстояние между отрезком MN и осью цилиндра OO_1.

MN и OO_1, скрещивающиеся прямые. Проведем плоскость MAN через прямую MN параллельно оси OO_1, тогда расстояние от любой точки оси OO_1 до проведенной плоскости будет искомым.

Из прямоугольного треугольника MAN находим

$$AN = \sqrt{MN^2 - AM^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \text{ дм}.$$

В прямоугольном треугольнике ABO $\left(BO \perp AN;\ AB = \frac{AN}{2}\right)$

$$OB = \sqrt{AO^2 - AB^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3\ дм.$$

В таком случае

$$CD = BO = 3\ дм.$$

Ответ: 3 *дм*.

Задача 2. В цилиндре площадь основания равна Q, а площадь осевого сечения равна S. Определить полную поверхность цилиндра.

В цилиндре $S_{осн} = Q$ и $S_{ABCD} = S$ (рис. 349). Найти $S_{полн}$ цилиндра.

Обозначим $AO = R$ и $AD = H$, тогда

$$S_{полн} = 2\pi R(H + R).$$

По условию задачи

$$2RH = S,$$
$$\pi R^2 = Q,$$

откуда

$$R = \sqrt{\frac{Q}{\pi}}, \quad H = \frac{S}{2}\sqrt{\frac{\pi}{Q}}.$$

Тогда

$$S_{полн} = 2\pi\sqrt{\frac{Q}{\pi}}\left(\frac{S}{2}\sqrt{\frac{\pi}{Q}} + \sqrt{\frac{Q}{\pi}}\right) = \pi S + 2Q.$$

Ответ: $\pi S + 2Q$.

Задача 3. Боковая поверхность цилиндра вдвое больше суммы площадей его оснований. Найти угол между диагональю осевого сечения и плоскостью основания цилиндра.

По условию $S_{бок} = 4S_{осн}$. Найти $\angle ACD = \alpha$ (рис. 349).

Известно, что $S_{бок} = 2\pi RH$, а $S_{осн} = \pi R^2$, тогда

$$2\pi RH = 4\pi R^2$$

и, следовательно,

$$H = 2R,$$

т. е. прямоугольный $\triangle ADC$ — равнобедренный, $AD = DC = 2R$. Искомый угол $\alpha = 45°$.

Ответ: 45°.

Задача 4. Найти диагональ осевого сечения цилиндра, если объем цилиндра равен 240π *дм*^{3}, а боковая поверхность — 120π *дм*^{2}.

По условию $V_{цил} = 240\pi$ *дм*^{3}, а $S_{ABCD} = 120\pi$ *дм*^{2} (рис. 349).

Найти AC.

Обозначив $AO = R$ и $AD = H$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \pi R^2 H = 240\pi \\ 2\pi RH = 120\pi, \end{cases}$$

откуда $R = 4$ *дм*, а $H = 15$ *дм*.

Далее из прямоугольного треугольника ADC находим

$$AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17 \text{ дм}.$$

Ответ: 17 *дм*.

Задача 5. Два одинаковых равносторонних цилиндра ($DM = MN = 2R = a$) размещены так, что ось одного из них является образующей второго (рис. 350). Найти объем их общей части $AEDFF_1BE_1C$.

Легко показать, что объем общей части цилиндров

$$V = AB \cdot S_{AEDF}.$$

Площадь общей части оснований цилиндра $AEDF$ равна сумме площадей двух одинаковых сегментов.

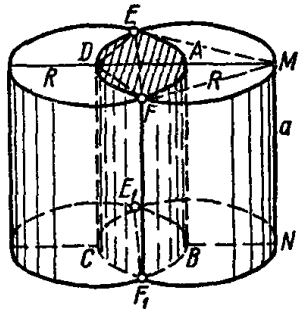


Рис. 350.

Так как $EF \perp AD$ и делит радиус основания цилиндра AD пополам, то EF сторона правильного вписанного в основание треугольника* EMF, т. е. $EF = R\sqrt{3}$ и дуга EDF содержит 120°.

Тогда

$$S_{\text{сегм } FAE} = S_{\text{сект } DFAE} - S_{\triangle DFE}.$$

Учитывая, что по условию $R = AD = \frac{a}{2}$, имеем

$$S_{\text{сегм } FAE} = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{4} = \frac{\pi a^2}{12} - \frac{a^2\sqrt{3}}{16}.$$

В таком случае площадь общей части оснований цилиндров

$$S_{AEDF} = 2S_{\text{сегм } FAE} = a^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right)$$

и искомый объем

$$V = a \cdot a^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right) = \frac{a^3}{24}(4\pi - 3\sqrt{3}).$$

Ответ: $V = \frac{a^3}{24}(4\pi - 3\sqrt{3}) \approx 0{,}3071a^3$ *кв. ед.*

§ 55. Конус

Конической поверхностью называется поверхность, производимая движением прямой AB (рис. 351), перемещающейся в пространстве так, что она при этом все время проходит через неподвижную точку S, и пересекает данную линию CD.

* Для большей наглядности начертите без пространственных искажений два верхних основания цилиндра, т. е. два пересекающихся в точках E и F круга радиуса $R=AD$ с центрами в точках D и A.

Прямая AB называется образующей, точка S — вершиной, а линия CD — направляющей конической поверхности.

Отметим, что коническая поверхность, так же как и ее образующая AB, простираются в пространстве беспредельно.

Конусом называется тело, ограниченное частью конической поверхности с замкнутой направляющей и плоскостью P, не проходящей через вершину S и пересекающей все образующие конической поверхности (рис. 352).

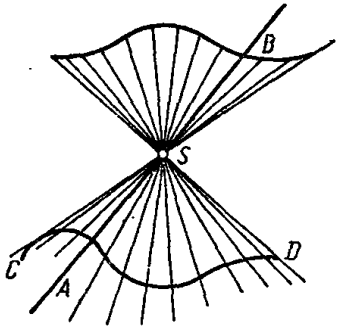


Рис. 351.

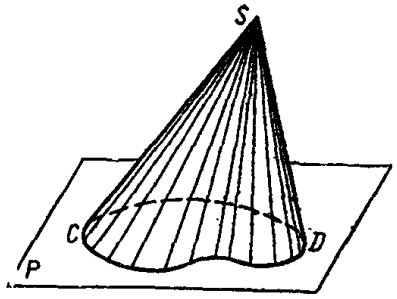


Рис. 352.

Вершина конической поверхности называется *вершиной* конуса; часть конической поверхности, ограниченная вершиной и секущей плоскостью — *боковой* поверхностью конуса, а часть секущей плоскости, выделенная конической поверхностью — *основанием* конуса. *Высотой* конуса называется длина перпендикуляра, опущенного из вершины конуса на плоскость основания.

Прямым *круговым* конусом называется конус, основанием которого является круг CD и высота которого SO проходит через центр окружности основания (рис. 353).

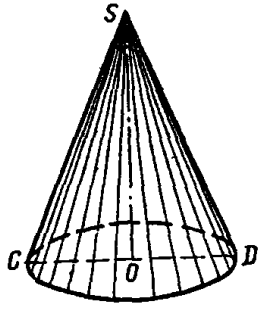


Рис. 353.

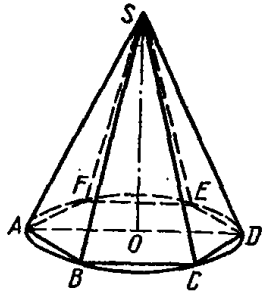


Рис. 354.

В дальнейшем прямой круговой конус будем называть просто конусом.

Конус можно получить вращением прямоугольного треугольника SOD (рис. 353) вокруг одного из катетов. Катет SO, вокруг которого происходит вращение, называется *осью конуса*, а гипотенуза является *образующей* конуса. Кроме того, катет OD равен радиусу основания конуса, а катет SO равен его высоте:

$$R = OD; \quad H = SO.$$

Боковая и полная поверхность конуса. В качестве боковой поверхности конуса принимается предел, к которому стремится боковая поверхность правильной вписанной (или описанной) в него пирамиды при неограниченном увеличении числа ее боковых граней. При этом длина ребра основания правильной пирамиды стремится к нулю.

Боковая поверхность конуса равна произведению длины окружности основания на половину образующей L:

$$S_{\text{бок}} = \pi RL.$$

Полная поверхность равна сумме боковой поверхности и площади основания:

$$S_{\text{полн}} = \pi R(R + L),$$

где $R = OD$ — радиус основания конуса, $L = SD$ — образующая конуса (рис. 353 и 354).

Развертка конуса. Если поверхность конуса разрезать по образующей и окружности основания и развернуть ее так, чтобы боковая поверхность с основанием лежала в одной плоскости (рис. 355), то на плоскости получим фигуру, называемую *разверткой конуса.* Развертка конуса состоит из сектора $SADA'$, радиус которого равен образующей конуса, а длина дуги равна длине окружности основания конуса, и круга основания.

Объем конуса. В качестве величины объема конуса принимают предел, к которому стремится объем правильной вписанной (или описанной) в конус пирамиды при неограниченном увеличении числа ее боковых граней.

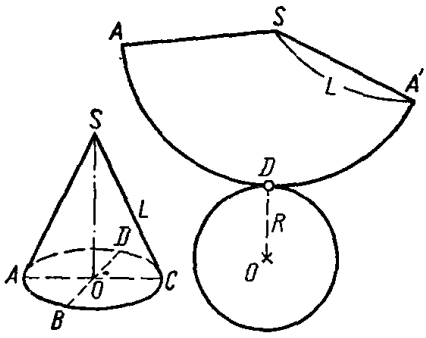


Рис. 355.

Объем конуса равен произведению площади основания на треть высоты:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H.$$

Задача 1. В треугольной пирамиде стороны основания равны 13; 20 и 21, а все боковые ребра равны по 36. Найти боковую поверхность конуса, описанного вокруг пирамиды.

Боковая поверхность конуса $S_{\text{бок}} = \pi RL$. Образующая конуса равна боковому ребру вписанной в него пирамиды, т. е. $L = 36$. Радиус основания конуса R равен радиусу окружности, описанной вокруг основания пирамиды.

По известной из планиметрии формуле (см. § 17, формула 4), находим

$$R = \frac{abc}{4S_{\Delta}} = \frac{13 \cdot 20 \cdot 21}{4\sqrt{27 \cdot 14 \cdot 7 \cdot 6}} = 10\frac{5}{6};$$

тогда

$$S_{\text{бок}} = \pi RL = 390\pi.$$

Ответ: $S_{\text{бок}} = 390\pi \approx 1225{,}22$ *кв. ед.*

Задача 2. Прямоугольный треугольник, катеты которого равны a и b, вращается вокруг прямой, проходящей через вершину прямого угла, параллельно гипотенузе. Найти поверхность тела вращения.

Прямоугольный $\triangle ABC$ ($\angle C = 90°$) вращается вокруг прямой $OO_1 \parallel AB$. Точка C лежит на прямой OO_1 (рис. 356). Найти поверхность тела вращения, если $AC = b$ и $BC = a$.

Поверхность тела вращения будет состоять из боковой поверхности цилиндра $ABDE$ и боковых поверхностей двух конусов ACE и BCD.

Образующую цилиндра найдем из данного треугольника

$$AB = \sqrt{a^2 + b^2},$$

а радиусы оснований конусов и цилиндра, которые равны между собой, определим из $\triangle ABC$:

$$CF \cdot AB = AC \cdot CB.$$

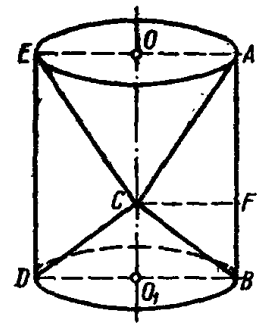


Рис. 356.

Обозначив CF через R, найдем

$$R = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Тогда поверхность тела вращения

$$S = \pi R (a + b + 2\sqrt{a^2 + b^2}) = \frac{\pi ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \times$$
$$\times (a + b + 2\sqrt{a^2 + b^2}).$$

Ответ: $S = \dfrac{\pi ab (a + b + 2\sqrt{a^2 + b^2})}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ *кв. ед.*

Задача 3. Высота и образующая конуса относятся, как 35 : 37. Полная поверхность конуса равна 588π *см*^{2}. Найти объем конуса.

Обозначим высоту конуса $H = 35x$, а образующую $L = 37x$. Тогда радиус основания конуса

$$R = \sqrt{L^2 - H^2} = \sqrt{(37x)^2 - (35x)^2} = 12x.$$

Полная поверхность конуса

$$S_{\text{полн}} = \pi R (R + L) = 12x\pi (12x + 37x) = 588\pi x^2$$

и по условию

$$588\pi x^2 = 588\pi.$$

Отсюда $x = 1$, тогда $R = 12$ *см*, $H = 35$ *см*. Объем конуса

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi \cdot 144 \cdot 35 = 1680\pi \text{ см}^3.$$

Ответ: $V = 1680\pi = 5277{,}88$ *см*^{3}.

§ 56. Усеченный конус

Усеченным конусом называется часть конуса, заключенная между его основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию (рис. 357).

Основаниями усеченного конуса называются основание полного конуса, из которого получен усеченный, и часть секущей плоскости, ограниченная конической поверхностью (круг).

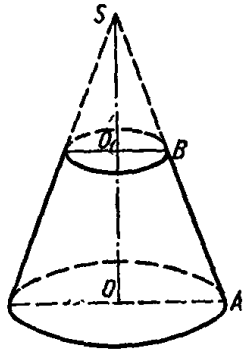


Рис. 357.

Образующей усеченного конуса называется часть образующей полного конуса, заключенная между основаниями усеченного конуса. *Высотой* усеченного конуса называется расстояние между его основаниями.

Усеченный конус может быть образован вращением прямоугольной трапеции вокруг боковой стороны, перпендикулярной ее основаниям.

Сторона OO_1, вокруг которой вращается трапеция, называется *осью* усеченного конуса, а вторая боковая сторона AB трапеции будет *образующей* усеченного конуса (рис. 357). Основания трапеции являются соответственно радиусами нижнего и верхнего оснований усеченного конуса

$$OA = R;\ BO_1 = r.$$

Боковая и полная поверхность усеченного конуса. В качестве величины боковой поверхности усеченного конуса принимается предел, к которому стремится величина боковой поверхности правильной вписанной (или описанной) в него усеченной пирамиды при неограниченном увеличении числа ее боковых граней.

Боковая поверхность усеченного конуса равна произведению суммы длин окружностей оснований на половину образующей.

$$S_{бок} = \pi L (R + r),$$

где R и r — радиусы оснований усеченного конуса, а L — длина образующей.

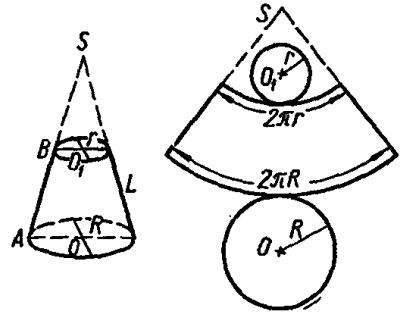


Рис. 358.

Полная поверхность усеченного конуса равна сумме боковой поверхности и площадей оснований.

$$S_{полн} = \pi L (R + r) + \pi R^2 + \pi r^2.$$

Развертка усеченного конуса. Если поверхность усеченного конуса разрезать по образующей и окружностям оснований и развернуть так, чтобы боковая поверхность с основаниями лежали в одной плоскости (рис. 358), то на плоскости получим фигуру, называемую *разверткой* усеченного конуса.

Объем усеченного конуса равен сумме объемов трех конусов, имеющих одинаковую высоту с усеченным конусом, а основания: один —

нижнее основание этого конуса, другой — верхнее и третий — круг, площадь которого есть среднее геометрическое между площадями верхнего и нижнего оснований.

$$V_{\text{ус. кон}} = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + rR + r^2),$$

где H — высота усеченного конуса, а R и r — радиусы его оснований.

Подобные цилиндры и конусы. Два цилиндра, конуса или усеченных конуса называются *подобными*, если подобны их осевые сечения.

Боковые и полные поверхности подобных цилиндров, конусов и усеченных конусов относятся, как квадраты их сходственных линейных элементов (радиусов оснований, высот, образующих).

Объемы подобных цилиндров, конусов и усеченных конусов относятся, как кубы их сходственных линейных элементов (радиусов оснований, высот, образующих).

Задача 1. Доказать, что если в осевое сечение усеченного конуса можно вписать окружность, то его высота есть среднее пропорциональное между диаметрами оснований.

Пусть в осевое сечение $ABCD$ усеченного конуса AC вписан круг O (рис. 359). Обозначим $AO_1 = R$, $DO_2 = r$, $O_2O_1 = H$, $AD = L$. Требуется доказать, что $H = 2\sqrt{rR}$.

Осевым сечением является равнобочная трапеция $ABCD$. Из точки C на AB опустим перпендикуляр $CM \perp AB$, тогда

$$MB = O_1B - O_1M = O_1B - O_2C = R - r.$$

По свойству касательных, проведенных из одной и той же точки к окружности,

$$O_2C = CN \text{ и } O_1B = NB.$$

Отсюда $O_2C + O_1B = CN + NB$, т. е. $L = R + r$.

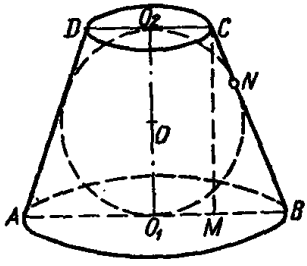


Рис. 359.

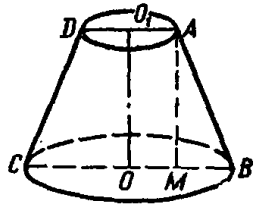


Рис. 360.

Из прямоугольного треугольника CMB ($\angle M = 90°$) находим

$$CM = H = \sqrt{CB^2 - MB^2} = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{rR},$$

что и требовалось доказать.

Задача 2. Определить боковую поверхность усеченного конуса, если его образующая составляет с плоскостью основания угол в 60°, а площадь осевого сечения равна S.

Пусть дан усеченный конус CA с площадью осевого сечения S и $\angle ABO = 60°$ (рис. 360). Найти боковую поверхность S_x усеченного конуса.

В равнобочной трапеции $ABCD$ из вершины A на основание CB опустим перпендикуляр $AM \perp CB$. Обозначим $AB = L$, $OB = R$, $O_1A = r$. В прямоугольном $\triangle AMB$ по условию $\angle MAB = 30°$, поэтому

$$MB = \frac{1}{2}L, \quad AM = H = \frac{\sqrt{3}}{2}L.$$

По условию задачи площадь осевого сечения $(R + r)H = S$ или $\frac{\sqrt{3}}{2}L(R + r) = S$.

Умножая обе части последнего равенства на число π, получим

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\pi L(R + r) = \pi S.$$

Учитывая, что боковая поверхность усеченного конуса

$$S_x = \pi L(R + r),$$

находим

$$\frac{\sqrt{3}}{2}S_x = \pi S.$$

Ответ:

$$S_x = \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi S \text{ кв. ед.}$$

Задача 3. В усеченном конусе радиусы оснований и образующая относятся, как 3 : 11 : 17, а объем равен 815π $см^3$. Найти полную поверхность усеченного конуса.

Обозначим $O_1A = r = 3x$, $OB = R = 11x$ и $AB = L = 17x$ (рис. 360).

Тогда из прямоугольного треугольника AMB

$$AM = H = \sqrt{AB^2 - MB^2} = \sqrt{(17x)^2 - (11x - 3x)^2} = 15x.$$

По условию задачи объем усеченного конуса 815π, следовательно,

$$V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + rR + r^2) = \frac{15\pi x}{3}[(11x)^2 + 33x^2 + (3x)^2] =$$

$$= 815\pi x^3 = 815\pi.$$

Отсюда $x = 1$ $см$, тогда $R = 11$ $см$, $r = 3$ $см$, $L = 17$ $см$. Полная поверхность усеченного конуса

$$S_{полн} = \pi[(R + r)L + R^2 + r^2] = 368\pi \ см^3.$$

Ответ: $S_{полн} = 368\pi \approx 1156{,}11$ $см^2$.

Задача 4. Радиусы оснований усеченного конуса равны R и r. Плоскость, параллельная основаниям, разделила его на два подобных усеченных конуса. Найти отношение объемов полученных конусов.

Пусть усеченные конусы CN и MA подобны (рис. 361) и $OB = R$, $O_1A = r$; $O_2N = x$. Из определения подобия усеченных конусов сле-

дует, что трапеции AO_1O_2N и NO_2OB подобны; тогда $r : x = x : R$, откуда $x = \sqrt{rR}$. Объемы подобных тел относятся, как кубы сходственных линейных элементов:

$$V_{MA} : V_{CN} = O_1A^3 : O_2N^3 \text{ или } \frac{V_{MA}}{V_{CN}} = \frac{r^3}{(\sqrt{rR})^3} = \sqrt{\frac{r^3}{R^3}}.$$

Ответ: $V_{MA} : V_{CN} = r\sqrt{r} : R\sqrt{R}$.

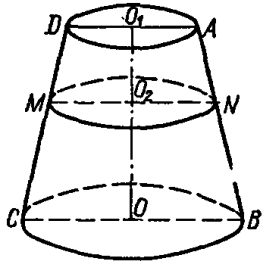


Рис. 361.

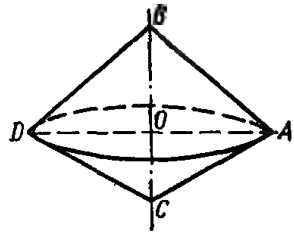


Рис. 362.

Задача 5. Если треугольник ABC вращается вокруг стороны $BC = a$, то объем полученного тела $V_a = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{Q^2}{a}$, где Q — площадь треугольника. Доказать.

Объем тела вращения составлен из двух конусов BAD и CAD (рис. 362). Обозначим $AO = h$ высоту треугольника ABC, опущенную на сторону BC, которая одновременно является радиусом основания конусов. Тогда, обозначая объем искомого тела вращения через V_a, имеем

$$V_a = V_{\text{кон}ABD} \dotplus V_{\text{кон}CAD}$$

или

$$V_a = \frac{1}{3}\pi h^2 (CO \dotplus OB) = \frac{1}{3}\pi a h^2.$$

Учитывая, что по условию $ah = 2Q$, найдем

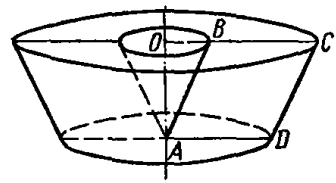


Рис. 363.

$$V_a = \frac{1}{3}\pi a h^2 = \frac{1}{3}\pi \frac{a^2h^2}{a} = \frac{4}{3}\pi \frac{Q^2}{a},$$

что и требовалось доказать.

Формула справедлива для любого треугольника, но если угол будет тупой, то в ходе доказательства следует учесть, что тогда

$$V_a = V_{\text{кон}ABD} - V_{\text{кон}CAD}$$

Выполните все доказательство для этого случая и рассмотрите также случаи, когда $\angle C = 90°$, и когда $\angle B \geqslant 90°$.

Задача 6. Ромб $ABCD$ с $\angle A = 60°$ и стороной $AB = a$ вращается вокруг оси $AO \perp AD$ (рис. 363). Найти объем тела вращения. Вычислить величину этого объема при $a = 8{,}7$ *см*.

Объем тела вращения равен разности объемов усеченного конуса $ADCO$ и конуса ABO:

$$V_x = \frac{1}{3}\pi \cdot AO\,(OC^2 + AD \cdot OC + AD^2) - \frac{1}{3}\pi \cdot AO \cdot OB^2 =$$

$$= \frac{1}{3}\pi \cdot AO\,(OC^2 + AD \cdot OC + AD^2 - OB^2).$$

Рассмотрим треугольник AOB ($\angle AOB = 90°$ и $\angle BAO = 30°$). В этом треугольнике $AB = a$, тогда $BO = \frac{1}{2}a$, $AO = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. Подставляя эти значения в формулу для объема тела вращения, найдем

$$V_x = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a\left[\left(\frac{3}{2}a\right)^2 + a \cdot \frac{3}{2}a + a^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2\right] = \frac{3\sqrt{3}}{4}\pi a^3.$$

Ответ: При $a = 8{,}7$ *см* имеем $a^3 = 658{,}503$ *см*^{3} и тогда

$$V_x = \frac{3\sqrt{3}}{4}\pi a^3 \approx 2687{,}38 \text{ см}^3 \approx 2{,}687 \text{ дм}^3.$$

§ 57. Конические сечения

Коническими сечениями называются плоские кривые, образуемые при пересечении плоскостью конической поверхности, направляющей которой служит окружность. Конические сечения являются кривыми второго порядка.

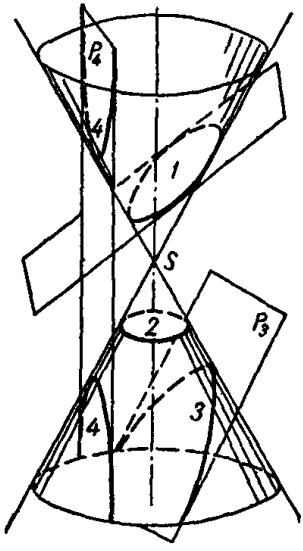


Рис. 364.

Если секущая плоскость P_1 не параллельна ни одной из образующих конической поверхности, то коническим сечением будет либо эллипс (плоскость не проходит через вершину S конической поверхности и не перпендикулярна ее оси, рис. 364, кривая *1*), либо окружность (плоскость не проходит через вершину S, но перпендикулярна оси конической поверхности, рис. 364, кривая *2*), либо точка (плоскость проходит через вершину S). Таким образом, окружность и точку можно рассматривать как частные случаи эллипса.

Если секущая плоскость P_3 параллельна только одной из образующих конической поверхности так, что она пересекает только одну из ее полостей (например, нижнюю), то коническим сечением является парабола (рис. 364, крявая *3*).

Если секущая плоскость P_4 параллельна двум образующим конической поверхности (в этом случае секущая плоскость также параллельна и ее оси), то коническое сечение есть гипербола. В этом случае секущая плоскость пересекает уже не одну, а две полости конической поверхности и соответственно этому гипербола состоит из двух ветвей

(рис. 364, кривые 4). В частности, когда плоскость проходит через вершину S, имеем пару пересекающихся прямых.

Отметим, что ветви параболы и гиперболы простираются как угодно далеко и эти кривые не являются замкнутыми.

§ 58. Сфера и шар

Шаровой поверхностью, или сферой, называется геометрическое место точек пространства, равноудаленных от одной точки, называемой *центром сферы* (рис. 365).

Радиусом сферы называется отрезок прямой, соединяющий центр сферы с любой ее точкой; например, $AO = OB = R$. *Хордой* сферы называется отрезок прямой, соединяющий две ее любые точки. *Диаметром* сферы называется хорда, проходящая через ее центр, например AC или BD. *Шаром* называется тело, ограниченное сферой. Сфера может быть получена вращением полуокружности вокруг диаметра.

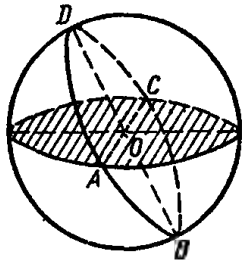


Рис. 365.

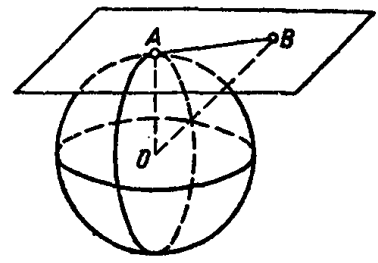


Рис. 366.

Сечение сферы и шара плоскостью. *Сечение сферы любой плоскостью есть окружность. Сечение шара любой плоскостью есть круг.* Круг, образованный сечением шара плоскостью, проходящей через центр, называется *большим кругом шара*, а круг, образованный сечением шара плоскостью, не проходящей через центр, называется *малым кругом шара*. Сечения, равноотстающие от центра шара, равны.

Из двух сечений, не одинаково удаленных от центра шара, больший радиус имеет то, которое ближе к центру.

Всякая плоскость, проходящая через центр шара, делит его поверхность на две симметричные и равные части (рис. 365).

Через две точки сферы, не лежащие на концах одного диаметра, можно провести окружность большого круга и притом только одну.

Окружности двух больших кругов при пересечении делятся пополам (рис. 365).

Плоскость, касательная к шару. *Касательной плоскостью к шаровой поверхности* называется плоскость, имеющая с этой поверхностью только одну общую точку (рис. 366).

Плоскость, перпендикулярная радиусу шаровой поверхности в его конце, лежащем на этой поверхности, есть касательная плоскость. Обратно: *касательная плоскость перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.*

§ 59. Поверхность и объем шара и его частей

Часть шаровой поверхности, отсекаемая от нее какой-нибудь плоскостью, называется *сегментной поверхностью* (рис. 367).

Окружность пересечения CD плоскости с шаровой поверхностью называется *основанием*, а отрезок $AB = H$ радиуса, перпендикулярного к плоскости сечения,— *высотой сегментной поверхности*.

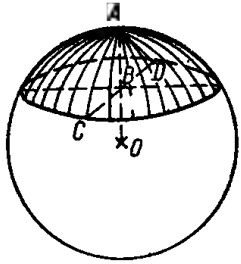


Рис. 367.

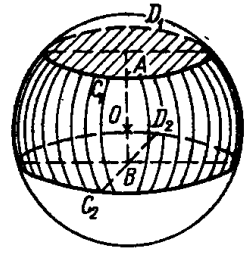


Рис. 368.

Часть шаровой поверхности, заключенная между двумя параллельными секущими плоскостями, называется *шаровым поясом* (рис. 368).

Окружности сечения C_1D_1 и C_2D_2 называются *основаниями шарового пояса*, а расстояние $AB = H$ между параллельными плоскостями — *высотой* пояса.

Лемма о боковой поверхности конуса, усеченного конуса и цилиндра. Боковая поверхность каждого из трех тел: конуса, усеченного конуса и цилиндра равна произведению высоты тела на длину окружности, у которой радиус есть перпендикуляр, восставленный к образующей из ее середины до пересечения с осью

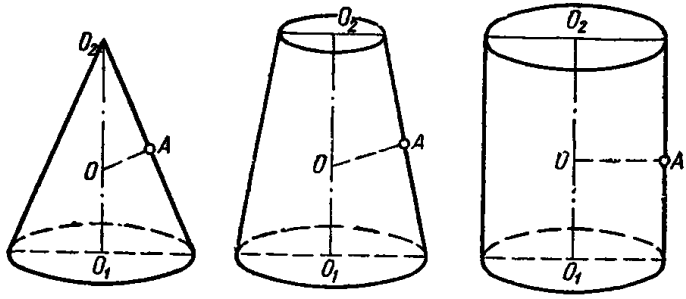


Рис. 369

Боковая поверхность конуса, усеченного конуса и цилиндра равна (рис. 369)

$$2\pi \cdot OA \cdot O_1O_2.$$

Поверхность шарового сегмента, пояса и шара. В качестве величины поверхности шарового сегмента, пояса и шара, образуемого вращением какой-нибудь части полуокружности или всей полуокружности вокруг диаметра (рис. 370), принимают предел, к которому стремится

поверхность, образуемая вращением вокруг того же диаметра правильной вписанной ломаной линии в соответствующую часть дуги окружности при неограниченном увеличении числа ее звеньев.

Сегментная поверхность равна произведению ее высоты на длину окружности большого круга

$$S_{\text{сегм}} = 2\pi RH,$$

где R — радиус большого круга шара, а H — высота сегментной поверхности.

Поверхность шарового пояса равна произведению высоты пояса на длину окружности большого круга:

$$S_{\text{пояса}} = 2\pi RH,$$

где R — радиус окружности большого круга, а H — высота пояса.

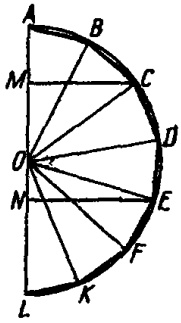


Рис. 370.

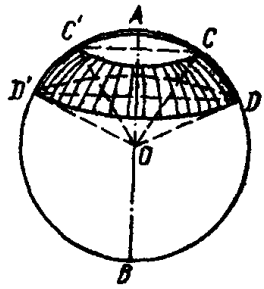


Рис. 371.

Поверхность шара равна произведению длины окружности большого круга на диаметр:

$$S_{\text{шара}} = 4\pi R^2,$$

где R — радиус шара.

Поверхности шаров относятся, как квадраты их радиусов или диаметров.

Шаровой сегмент, слой и сектор. *Шаровым сегментом* называется тело, отсекаемое от шара плоскостью.

Шаровым слоем называется тело, отсекаемое от шара двумя секущими параллельными плоскостями.

Шаровым сектором называется тело, полученное вращением кругового сектора вокруг оси, лежащей в его плоскости, проходящей через его центр и не пересекающей сектора.

Если ось вращения совпадает с радиусом, ограничивающим круговой сектор AOC, то полученный в результате вращения шаровой сектор называется простым, а если ось вращения не совпадает с радиусом, ограничивающим круговой сектор COD, то шаровой сектор называют полым (рис. 371).

Объем тела, полученного от вращения плоской фигуры вокруг оси. Швейцарскому математику Паулю Гюльдену (1577—1643) — автору ряда глубоких исследований о центре тяжести тел, принадлежат также теоремы об объеме и поверхности тел вращения.

Теорема Гюльдена. *Объем тела, описываемого плоской фигурой при вращении ее вокруг оси, лежащей в плоскости этой фигуры и не пересекающей ее, равен произведению площади фигуры на длину окружности, описываемой центром тяжести этой площади:*

$$V_{\text{тела вр}} = 2\pi S d_c,$$

где S — площадь вращающейся фигуры, а d_c — расстояние от центра тяжести фигуры до оси вращения.

В элементарной геометрии рассматривается лемма об объеме тела, полученного вращением треугольника вокруг оси.

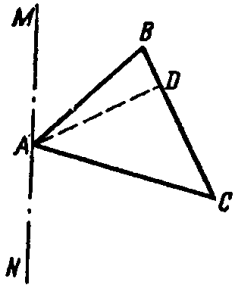


Рис. 372.

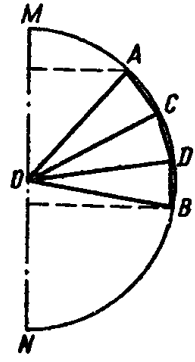


Рис. 373.

Л е м м а. Если треугольник ABC (рис. 372) вращается вокруг оси MN, которая лежит в плоскости треугольника, проходит через его вершину A, но не пересекает стороны BC, то объем тела, полученного при этом вращении, равен произведению поверхности S_{BC}, образуемой противоположной стороной BC, на одну треть высоты треугольника, опущенной на эту сторону, т. е.

$$V_{\text{тела вр}} = \frac{AD}{3} \cdot S_{BC}$$

Объем шарового сектора и шара. Объем шарового сектора, получаемого вращением вокруг диаметра MN кругового сектора AOB (рис. 373), есть предел, к которому стремится объем тела, образуемого вращением многоугольника, ограниченного радиусами OA и OB и правильной ломаной линией $ACDB$. Эта ломаная вписана в дугу кругового сектора, когда число сторон ее неограниченно увеличивается (и, следовательно, длина каждой из сторон AC, CD, ... стремится к нулю).

Объем шарового сектора равен произведению поверхности соответствующего шарового пояса (или шарового сегмента) на треть радиуса:

$$V_{\text{шар. сект}} = 2\pi RH \cdot \frac{R}{3} = \frac{2}{3}\pi R^2 H,$$

где R — радиус шарового сектора, а H — высота шарового пояса (сегмента).

Объем шара равен произведению его поверхности на треть радиуса:

$$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\pi D^3}{6},$$

где R — радиус шара, D — диаметр шара.

Формулу для объема шара получаем, положив в формуле для объема шарового сектора $H = 2R$.

Объемы шаров относятся, как кубы их радиусов или диаметров.

Объем шарового сегмента равен объему цилиндра, у которого радиус основания есть высота сегмента, а высота цилиндра равна радиусу шара, уменьшенному на треть высоты сегмента, т. е.

$$V_{\text{шар. сегм}} = \pi h^2\left(R - \frac{1}{3}h\right),$$

где h — высота сегмента, а R — радиус шара.

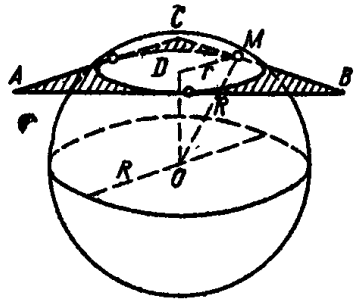


Рис. 374.

Рассмотрим несколько задач на круговые тела.

З а д а ч а 1. Стороны треугольника равны 15 *см*, 14 *см* и 13 *см*. Найти расстояние от плоскости треугольника до центра шара, касательного к сторонам треугольника, если радиус шара равен 5 *см*.

Дан шар O радиуса $R = 5$ *см* и $\triangle ABC$, стороны которого касаются поверхности шара и равны $AB = 15$ *см*, $BC = 14$ *см* и $AC = 13$ *см* (рис. 374). Найти расстояние от центра шара до плоскости $\triangle ABC$.

Плоскость треугольника ABC пересечет шар O по кругу, вписанному в данный треугольник. Основание перпендикуляра OD, опущенного из центра шара O на плоскость треугольника ABC, попадает в центр этого круга D.

Пусть $DM = r$ радиус круга D, проведенный в точку касания стороны CB к поверхности шара. Тогда из прямоугольного треугольника ODM находим

$$OD = \sqrt{OM^2 - DM^2}.$$

Радиус шара $R = OM = 5$ *см*. Радиус круга D, вписанного в данный треугольник, найдем по формуле

$$r = DM = \frac{S}{p},$$

где S — площадь, а p — полупериметр треугольника:

$$DM = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p} = \frac{\sqrt{21 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}}{21} = 4 \text{ см}.$$

Подставляя найденные значения в формулу для OD, находим искомое расстояние

$$OD = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \text{ см}.$$

Задача 2. Доказать, что боковая поверхность конуса, вписанного в шаровой сегмент, есть средняя пропорциональная между площадью основания и боковой поверхностью сегмента (рис. 375).

Пусть в шаровой сегмент ACB вписан конус (основание конуса и сегмента общее). Требуется доказать, что $S^2_{\text{бок. кон}} = S_{\text{шар. сегм}} \times S_{\text{круга}D}$. Обозначим $OC = R$ — радиус шара, $AD = r$ — радиус основания конуса (сегмента), $CD = h$ — высота сегмента и $CB = l$ — образующая конуса.

Из прямоугольного треугольника CAE ($\angle A = 90°$) по свойству катета имеем

$$AC^2 = CE \cdot CD \text{ или } l^2 = 2R \cdot h.$$

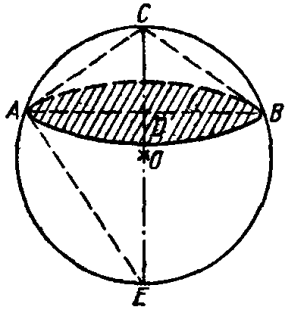


Рис. 375.

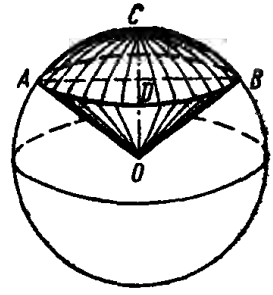


Рис. 376.

Умножив обе части последнего равенства на $\pi^2 r^2$, получим

$$\pi^2 r^2 l^2 = 2\pi Rh \cdot \pi r^2 \text{ или } (\pi rl)^2 = (2\pi Rh) \cdot (\pi r^2).$$

Отсюда, поскольку $\pi rl = S_{\text{бок. кон}}$, $2\pi Rh = S_{\text{шар. сегм}}$, $\pi r^2 = S_{\text{круга}}$, после очевидных упрощений находим

$$S^2_{\text{бок. кон}} = S_{\text{шар. сегм}} \cdot S_{\text{кр}},$$

что и требовалось доказать.

Задача 3. Определить, какую часть объема шара составляет объем сферического сектора, у которого сферическая и коническая поверхности равновелики.

Пусть на рис. 376 изображен шаровой сектор $OACB$, у которого сферическая поверхность равновелика конической.

Если обозначить $OA = R$, $AD = r$ и $CD = h$, то $2\pi Rh = \pi rR$, так как по условию задачи сферическая поверхность шарового сектора равна конической. В таком случае $2h = r$.

Из прямоугольного треугольника ADO ($\angle D = 90°$) с учетом $OD = R - h$, получим $R^2 = (2h)^2 + (R - h)^2$, откуда $h = \frac{2}{5} R$.

Объем шарового сектора

$$V_{\text{шар. сект}} = \frac{2}{3} \pi h R^2 = \frac{4}{15} \pi R^3 = \frac{1}{5} \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right)$$

и, следовательно,

$$V_{\text{шар. сект}} = \frac{1}{5} V_{\text{шара}}.$$

Ответ: $\frac{1}{5}$.

Задача 4. Плоскость делит объем шара в отношении 7 : 20. В каком отношении она делит поверхность шара?

Пусть плоскость круга O_1 делит объем шара в отношении 7 : 20 (рис. 377). Проведем диаметр шара BD перпендикулярно плоскости круга O_1 и обозначим $BO_1 = h$, $OB = R$, тогда $O_1D = 2R - h$. По условию задачи

$$V_{\text{шар. сегм}ABC} : V_{\text{шар. сегм}ADC} = 7 : 20$$

или

$$\pi h^2 \left(R - \frac{1}{3} h\right) : \pi (2R - h)^2 \left[R - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{3} (2R - h)\right] = 7 : 20.$$

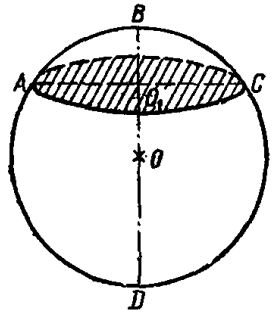


Рис. 377.

Отсюда, после преобразований, находим

$$\frac{3Rh^2 - h^3}{4R^3 - 3Rh^2 + h^3} = \frac{7}{20}.$$

Заменим $R = hx$ и заметим, что поскольку $h < R$, то $x > 1$. Тогда

$$\frac{3h^3x - h^3}{4h^3x^3 - 3h^3x + h^3} = \frac{7}{20} \text{ или } 28x^3 - 81x + 27 = 0.$$

Раскладывая левую часть уравнения на множители, получим $(2x-3) \times$ $\times (14x^2 + 21x - 9) = 0$, откуда

$$x_1 = \frac{3}{2}, \quad x_{2;3} = \frac{-21 \pm \sqrt{945}}{28}.$$

Так как $x > 1$, то корни x_2 и x_3 не удовлетворяют условию задачи и, следовательно,

$$R = hx_1 = \frac{3}{2} h.$$

Теперь найдем отношение поверхностей шарового сегмента $S_{ABC} = S_1$ и шарсвого сегмента $S_{ADC} = S_2$:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{2\pi Rh}{2\pi R (2R - h)} = \frac{h}{2h} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: 1 : 2.

Упражнение. Доказать, что объем тела, полученного при вращении кругового сегмента с хордой a вокруг диаметра, параллельного этой хорде, не зависит от величины радиуса круга.

§ 60. Вписанный и описанный шары

Шар называется *вписанным в многогранник*, а многогранник — *описанным вокруг шара*, если плоскости всех граней касаются шара. Если шар находится внутри многогранника, то он называется *вписанным* внутренним образом или просто вписанным, а если вне многогранника,— то *вневписанным*.

Шар называется *описанным вокруг многогранника*, а многогранник — *вписанным в этот шар*, если все вершины многогранника лежат на поверхности шара.

Шар называется *вписанным* в конус, усеченный конус или цилиндр, если поверхность шара касается плоскостей оснований этих фигур и всех образующих их боковых поверхностей.

Шар называется *описанным вокруг конуса*, если поверхность шара проходит через вершину конуса, а окружность основания конуса лежит на поверхности шара. Шар называется *описанным вокруг цилиндра или усеченного конуса*, если окружности их оснований лежат на поверхности шара.

Заметим, что в треугольную и любую правильную пирамиду и конус всегда можно вписать шар, а вокруг треугольной пирамиды, цилиндра и усеченного конуса всегда можно описать шар.

Для других пространственных фигур условия возможности вписать в них и описать вокруг них шар должны быть в каждом случае специально установлены. Например, вокруг прямой призмы можно описать шар, если в основании призмы лежит многоугольник, вокруг которого можно описать окружность.

Задача 1. Доказать, что объем многогранника, описанного вокруг шара, равен произведению полной поверхности многогранника на треть радиуса шара.

Проведем доказательство для четырехгранника, что не нарушает общности результата. Пусть в четырехгранник $ABCD$ вписан шар O, поверхность которого касается граней четырехгранника в точках L, M, N, P (рис. 378).

Через центр шара и ребра четырехгранника проведем плоскости, которые разделят четырехгранник на четыре треугольные пирамиды $OABC$, $OACD$, $OABD$ и $OBCD$. Радиусы шара OL, OM, ON и OP, проведенные в точки касания, будут высотами этих пирамид.

Тогда

$$V_{ABCD} = V_{OABC} + V_{OACD} + V_{OABD} + V_{OBCD}$$

или

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} r (S_{ABC} + S_{ABD} + S_{ACD} + S_{BCD}),$$

где S_{ABC}, S_{ABD}, S_{ACD} и S_{BCD} — площади граней четырехгранника, а r — радиус вписанного шара.

Тогда

$$V = \frac{1}{3} r S_{\text{полн}},$$

что и требовалось доказать.

Из доказанного следует, что раднус вписанного в многогранник шара равен утроенному объему многогранника, деленному на его полную поверхность:

$$r = \frac{3V}{S}.$$

Задача 2. В правильной четырехугольной пирамиде центры вписанного и описанного шаров совпадают. Определить плоский угол при вершкне пирамиды.

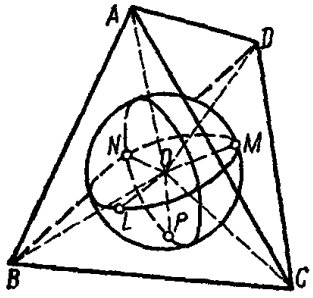


Рис. 378.

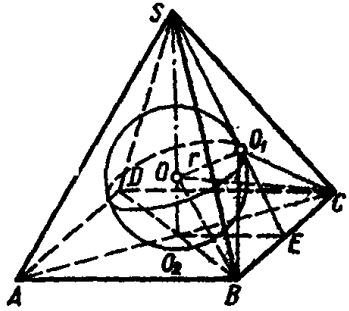


Рис. 379.

Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ и точка O — центр вписанного в пирамиду шара и центр описанного вокруг пирамиды шара (рис. 379).

Точка O_1 — центр окружности, описанной вокруг треугольника SBC, тогда перпендикуляр из центра шара на плоскость треугольника SBC попадет в точку O_1 и OO_1 будет радиусом вписанного в пирамиду шара. $OB = OC = SO = R$ — радиусы описанного шара; $OO_2 = OO_1 = r$ — радиусы вписанного шара. Тогда прямоугольные треугольники OO_2B, OO_1B, OO_2C и OO_1C равны между собой. Из их равенства следует, что $BO_2 = CO_2 = BO_1 = CO_1$ и треугольники BO_2C и BO_1C равны.

В таком случае $\angle BO_2C = \angle BO_1C = 90°$.

Далее, $SO_1 = BO_1 = CO_1$ как радиусы окружности, описанной вокруг треугольника SBC.

Из равнобедренного $\triangle BO_1S$ по свойству внешнего угла

$$\angle BSE = \frac{1}{2} \angle BO_1E.$$

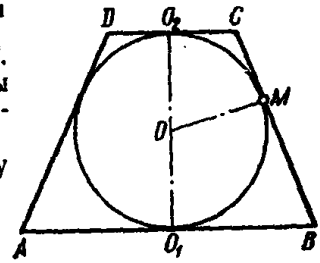


Рис. 380.

Тогда

$$\angle BSC = \frac{1}{2} \angle BO_1C = 45°.$$

Ответ: 45°.

Задача 3. Вокруг шара описан усеченный конус, образующая которого равна a. Найтн боковую поверхность этого конуса.

На рис. 380 изображено осевое сечение усеченного конуса с вписанным в него шаром. По условию задачи $BC = a$. Обозначим $O_1B = R$,

а $O_2C = r$. Тогда по свойству касательных, выходящих из одной и той же точки к окружности, $O_2C = CM$ и $O_1B = MB$ или $O_1B + O_2C = CB = a$, т. е. $R + r = a$.

Следовательно, искомая боковая поверхность усеченного конуса

$$S_{бок} = \pi (R + r) a = \pi a^2.$$

Задача 4. Найти радиус шара, вписанного в пирамиду, основанием которой служит ромб с диагоналями 6 и 8, а высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 1.

По диагоналям ромба найдем его сторону.

$$a = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$$

Радиус вписанного в ромб круга

$$r = \frac{2S}{P},$$

где S — площадь ромба, а P — его периметр. Тогда $r = \frac{6 \cdot 8}{20} = 2{,}4$.

Высота боковой грани пирамиды $m = \sqrt{h^2 + r^2}$, где h — высота пирамиды, а r — радиус вписанного в основание круга.

Выполнив вычисления, находим $m = \sqrt{6{,}76} = 2{,}6$.

Полная поверхность пирамиды

$$S_{полн} = S_{бок} + S_{осн} = \frac{1}{2}(20 \cdot 2{,}6 + 8 \cdot 6) = 50,$$

а объем пирамиды

$$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot 1 = 8.$$

Пользуясь результатом задачи 1 данного параграфа, найдем искомый радиус R шара, вписанного в пирамиду

$$R = \frac{3V}{S} = \frac{3 \cdot 8}{50} = 0{,}48.$$

§ 61. Геометрические места точек и прямых в пространстве

Общее определение геометрического места точек было дано в § 29.

По сравнению с геометрическим местом точек на плоскости, представления и построения геометрического места точек в пространстве вызывают гораздо больше трудностей, что связано как со сложностью, так и с большим разнообразием примеров. Однако упражнения и тренировки на представление (устное решение) и фактическое построение геометрического места точек в пространстве крайне необходимы для развития пространственного мышления и успешного решения многих стереометрических задач на вычисление, построение и доказательство.

Приведем ряд примеров на геометрические места точек в пространстве.

1. Геометрическое место точек, равноудаленных от данной плоскости Q на расстояние m, есть две плоскости, параллельные плоскости Q и расположенные по обе стороны от нее на расстоянии m.

2. Геометрическое место вершин пирамид, имеющих данный объем V и построенных на данном основании S, есть плоскости, параллельные основанию и расположенные от него на расстоянии, равном общей высоте указанных пирамид

$$h = \frac{3V}{S}.$$

3. Геометрическое место центров сфер данного радиуса, касающихся двух пересекающихся плоскостей, есть четыре прямые, параллельные линии пересечения данных плоскостей.

4. Геометрическое место точек, отношение расстояний которых от двух данных точек A и B равно $a : b$, есть сфера с диаметром, соединяющим точки M и N, которые делят отрезок AB в данном отношении внутренним и внешним образом.

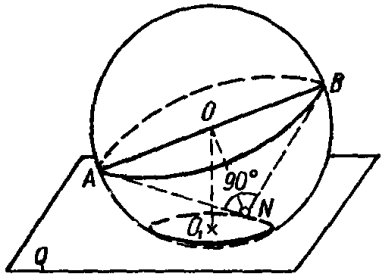


Рис. 381.

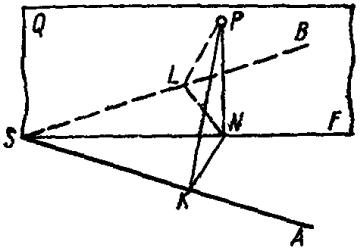


Рис. 382.

5. Геометрическое место прямых, проходящих через данную точку A и касающихся данной сферической поверхности, есть коническая круговая поверхность с вершиной в точке A.

6. Геометрическое место перпендикуляров, опущенных из данной точки A на плоскостя, проходящие через данную прямую l, есть круг, диаметр которого равен расстоянию от точки A до прямой l.

7. Геометрическое место прямых, проходящих через данную точку A и пересекающих данную плоскость под заданным углом α, есть коническая поверхность с вершиной в точке A и углом в осевом сечении $\beta = 90° - \alpha$.

8. Геометрическое место точек, симметричных данной точке N относительно всех точек плоскости Q и одинаково удаленных от нее, есть окружность, лежащая в плоскости P, параллельной плоскости Q.

З а д а ч а 1. Найти геометрическое место точек, находящихся на данной плоскости Q, из которых данный отрезок AB виден под прямым углом.

Предположим, что N — произвольная точка искомого геометрического места. Соединим точку N с концами A и B данного отрезка (рис. 381). Поскольку по условию задачи $\triangle ABN$ прямоугольный, то $NO = \frac{1}{2} AB$ (как медиана, опущенная из вершины прямого угла на гипотенузу). Следовательно, точка O равноудалена от всех точек искомого геометрического места точек.

Таким образом, все искомые точки равноудалены от некоторой точки O_1, являющейся проекцией точки O на плоскость Q.

Следовательно, искомое геометрическое место точек есть окружность, расположенная на плоскости Q и имеющая радиус

$$R = O_1N = \sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2 - OO_1^2}.$$

Задача 2. Доказать, что геометрическое место точек, равноудаленных от сторон данного в пространстве угла ASB, есть плоскость, проходящая через биссектрису данного угла и перпендикулярная плоскости, в которой он находится.

Пусть FS — биссектриса данного угла ASB, а Q — плоскость, перпендикулярная плоскости $\angle ASB$ и проходящая через его биссектрису (рис. 382).

Возьмем в плоскости Q произвольную точку P и проведем $PN \perp$ $\perp$ пл. ASB. Перпендикуляр PN лежит в плоскости Q. Проведем $NK \perp SA$, $NL \perp SB$ и соединим точку P с точками K и L, тогда (по двум равным катетам)

$$\triangle PKN = \triangle PLN.$$

Следовательно, $PL = PK$. Поскольку же точка P взята на плоскости Q произвольно, то утверждение доказано для всех точек плоскости Q.

Применение тригонометрических функций к решению задач по геометрии

§ 62. Решение прямоугольных треугольников

Основными случаями решения треугольников называются задачи на вычисление элементов треугольника по трем данным независимым его элементам. К основным элементам треугольника относят его стороны и углы, из которых только два угла независимы между собой, так как $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

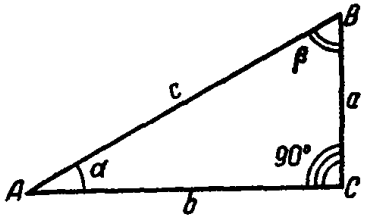


Рис. 383.

В прямоугольном треугольнике один угол известен (прямой угол), поэтому для решения прямоугольного треугольника достаточно задать два каких-либо из основных элементов, кроме двух острых углов, так как для прямоугольного треугольника

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} = 90° \quad \left(\gamma = \frac{\pi}{2} = 90°\right)$$

и, следовательно, если задан один из углов, например, α, то $\beta = 90° - \alpha$, и наоборот, если известен угол β, то $\alpha = 90° - \beta$.

Основные задачи решения прямоугольных треугольников (рис. 383).

1. Даны гипотенуза c и острый угол α. Остальные элементы находятся по формулам

$$a = c \sin \alpha; \quad b = c \cos \alpha; \quad \beta = 90° - \alpha.$$

2. Даны катет a и острый угол α (или β). Остальные элементы треугольника находятся по формулам

$$\beta = 90° - \alpha;\ b = a \operatorname{ctg} \alpha,\ c = \frac{a}{\sin \alpha}.$$

3. Даны гипотенуза c и катет a (или b). Остальные элементы находятся по формулам

$$b = \sqrt{c^2 - b^2};\ \sin \alpha = \frac{a}{c};\ \beta = 90° - \alpha.$$

4. Даны катеты a и b. Остальные элементы находятся по формулам

$$c = \sqrt{a^2 + b^2};\ \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b};\ \beta = 90° - \alpha.$$

Более подробно эти вопросы рассмотрены в § 63—65.

§ 63. Решение прямолинейных треугольников

Условимся, как это принято, обозначать элементы прямолинейного треугольника* с вершинами A, B, C следующими буквами (рис. 384):

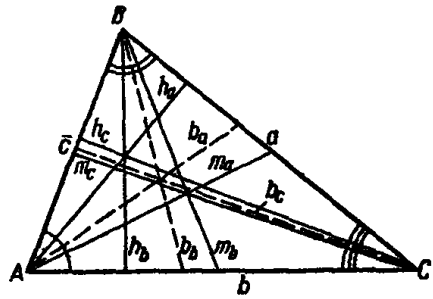


Рис. 384.

A, B, C — внутренние углы треугольника;
a, b, c — соответствующие стороны, противоположные углам треугольника;
h_a, h_b, h_c — высоты треугольника относительно сторон a, b и c;
b_a, b_b, b_c — биссектрисы внутренних углов;
m_a, m_b, m_c — соответствующие медианы;
$p = \frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр треугольника;
S — площадь треугольника;
R — радиус описанной окружности;
r — радиус вписанной окружности;
r_a, r_b, r_c — радиусы вневписанных окружностей**.

* Кроме прямолинейных треугольников подробно изучены также треугольники сферические, т. е. треугольники, расположенные на сфере, которые наиболее широкое применение нашли в астрономии. Однако вопросы сферической тригонометрии выходят за рамки данной книги.

** *Вневписанной* к стороне a треугольника ABC окружностью называется окружность, касающаяся стороны a и продолжения сторон b и c (см. § 13, рис. 119).

Основные теоремы и формулы о соотношениях между элементами треугольников.

Сумма внутренних углов

$$A + B + C = \pi = 180^\circ. \tag{125}$$

Теорема синусов:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}. \tag{126}$$

Теорема косинусов:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A. \tag{127}$$

Теорема тангенсов:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{C}{2}}. \tag{128}$$

Формулы Мольвейде:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}; \quad \frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}. \tag{129}$$

Формулы половинных углов:

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}; \tag{130}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}; \tag{131}$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}. \tag{132}$$

Формулы для высот треугольника:

$$h_a = b \sin C = c \sin B. \tag{133}$$

Формулы для вычисления биссектрис:

$$b_a = \frac{h_a}{\cos\frac{B-C}{2}} = \frac{b \sin C}{\cos\frac{B-C}{2}}; \tag{134}$$

$$b_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}. \tag{135}$$

Формула для вычисления медиан:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2 + 2bc \cos A}. \tag{136}$$

Формулы для вычисления площади:

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} b^2 \frac{\sin A \sin C}{\sin B} = p(p-a) \operatorname{tg} \frac{A}{2}. \qquad (137)$$

Формулы для вычисления радиуса описанной окружности:

$$R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{b}{2 \sin B} = \frac{c}{2 \sin C}; \qquad (138)$$

$$R = \frac{a + b + c}{8 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}. \qquad (139)$$

Формулы для вычисления радиуса вписанной окружности:

$$r = (p-a) \operatorname{tg} \frac{A}{2} = (p-b) \operatorname{tg} \frac{B}{2} = (p-c) \operatorname{tg} \frac{C}{2}; \qquad (140)$$

$$r = p \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}; \qquad (141)$$

$$r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}. \qquad (142)$$

Формулы для радиусов вневписанных окружностей:

$$r_a = p \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{a \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}}. \qquad (143)$$

Замечание. Для высот, биссектрис, медиан и радиусов вне вписанных окружностей мы привели только по одной из трех возможных формул. Все остальные формулы получаем из формул (133)—(136) и (143) путем циклической перестановки

т. е. замены $a \to b \to c \to a$ и соответственно $A \to B \to C \to A$.

Например, из формулы (136) имеем

$$m_b = \frac{1}{2} \sqrt{c^2 + a^2 + 2ca \cos B};$$

$$m_c = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos C};$$

из формулы (143)

$$r_b = p \operatorname{tg} \frac{B}{2}; \quad r_c = p \operatorname{tg} \frac{C}{2}.$$

Эту же перестановку можно применять и к формулам (127)—(132) и (137).

Основные случаи решения прямолинейных треугольников. *Основными случаями решения треугольников* называются задачи на вычисление элементов треугольника по трем данным его независимым основным элементам. К основным элементам относят стороны и внутренние углы треугольника, причем углы между собой связаны соотношением $A + B + C = \pi$, поэтому только два угла могут быть независимыми.

Случай I. Даны два угла A и B и одна из сторон треугольника, например, c; вычислить остальные основные его элементы.

Если даны два угла треугольника, то третий находится по (125):

$$C = \pi - (A + B).$$

После того как третий угол определен, две неизвестные стороны треугольника находятся по (126):

$$a = \frac{c \sin A}{\sin C}\ ;\ b = \frac{c \sin B}{\sin C}.$$

Случай II. Даны две стороны треугольника и угол между ними; найти остальные основные элементы треугольника.

Пусть даны стороны a и b и угол C. Так как $\frac{A+B}{2} = \frac{\pi - C}{2}$, то по (128) имеем

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{C}{2}}.$$

Отсюда

$$A - B = 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{a-b}{a+b} \operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right),$$

а согласно (125)

$$A + B = \pi - C.$$

Из последних двух равенств сложением, а затем вычитанием находим углы A и B. Зная углы A и B, по (126) находим третью сторону

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

Эту задачу можно решить и другими способами; например, применяя теорему синусов, имеем

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin B}{\sin A} = \frac{\sin[\pi - (A + C)]}{\sin A} = \frac{\sin(A + C)}{\sin A},$$

откуда, воспользовавшись формулой (21) § 50, ч. II, получим

$$\frac{\sin A \cos C + \cos A \sin C}{\sin A} = \cos C + \operatorname{ctg} A \sin C = \frac{b}{a}$$

или после очевидных преобразований

$$\operatorname{ctg} A = \frac{b - a \cos C}{a \sin C}.$$

Из последнего равенства находим угол A, а затем остальные элементы треугольника.

Случай III. Даны три стороны треугольника a, b, c. Вычислить его углы.

Необходимым и достаточным условием существования треугольника является выполнение неравенств.

$$a + b > c,\ a + c > b,\ b + c > a\ (a > 0,\ b > 0,\ c > 0).$$

Если эти условия выполняются, то углы A и B найдем по (131), применив при переходе к углу B циклическую перестановку:

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}};\quad \cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}};$$

затем находим угол C из равенства $A + B + C = \pi$.

Случай IV. Даны две стороны и угол, противолежащий одной из данных сторон; вычислить остальные основные элементы треугольника.

Пусть даны a, b и B. При решении этой задачи рассмотрим следующие варианты.

А. Если $b \geqslant a$, то задача имеет единственное решение. Угол $A \leqslant B$ и по (126) имеем

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B},$$

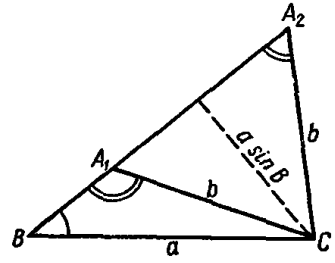


Рис. 385.

откуда находим $\sin A$, а затем угол A.

Угол C находим из равенства $A + B + C = \pi$, а затем по теореме синусов сторону c:

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

Б. Если $a > b > a \sin B$, то задача имеет два решения, т. е. существует два треугольника, соответствующих данным задачи (рис. 385). Из равенства $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ находим $\sin A$

$$\sin A = \frac{a \sin B}{b}\left(\frac{a \sin B}{b} < 1\right),$$

откуда определяем два значения угла A:

$$A = A_1 \text{ и } A = A_2 = \pi - A_1.$$

Аналогично предыдущему случаю находим угол C и сторону c соответственно каждому из найденных углов A_1 и A_2.

В. Если $b = a \sin B$, то задача имеет одно решение, и в этом случае треугольник прямоугольный, так как

$$\sin A = \frac{a \sin B}{b} = 1;$$

следовательно,

$$A = \frac{\pi}{2}, \text{ т. е. } A_2 = A_1 = \frac{\pi}{2} = 90°.$$

Тогда,

$$C = \frac{\pi}{2} - B \text{ и } c = a \cos B.$$

Г. Если $b < a \sin B$, то задача решений не имеет, т. е. треугольник не существует, так как

$$\sin A = \frac{a \sin B}{b} > 1.$$

Графически условие $a \sin B > b$ означает, что перпендикуляр $a \sin B$ должен быть больше наклонной b (рис. 385), что невозможно.

Все остальные задачи на решение треугольников считаются не основными и сводятся к основным случаям. Некоторые из неосновных задач мы рассмотрим в следующих параграфах.

Переходим теперь к решению прямоугольных треугольников, т. е. частного случая треугольников, у которых всегда

$$C = 90°, \cos C = 0, \sin C = 1.$$

Подставив эти значения в формулы (125)—(143), получаем соответствующие формулы для прямоугольных треугольников, что читателю полезно выполнить в виде упражнения. В частности, подставив эти значения в формулы (125)—(127), получаем основную систему для решения прямоугольных треугольников:

$$A + B = 90°, \text{ так что } \sin A = \cos B, \cos A = \sin B; \quad (144)$$

$$a = c \sin A = c \cos B; \; b = c \sin B = c \cos A; \quad (145)$$

$$c^2 = a^2 + b^2. \quad (146)$$

Разделив равенства (145) по очереди одно на другое, получим еще две формулы, связывающие элементы прямоугольного треугольника:

$$\frac{a}{b} = \operatorname{tg} A = \operatorname{ctg} B; \quad \frac{b}{a} = \operatorname{ctg} A = \operatorname{tg} B. \quad (147)$$

Для решения прямоугольного треугольника достаточно задать только два его элемента (но при этом хотя бы один элемент обязательно должен быть линейным), так как уже известен один элемент: угол C — прямой. Никаких новых трудностей решение прямоугольных треугольников не представляет, поэтому рассмотрим только несколько типичных задач.

З а д а ч а 1. Даны катеты $a = 7$ и $b = 12$. Определить все остальные основные элементы прямоугольного треугольника.

Решать эту задачу можно двумя способами.

1. Воспользовавшись теоремой Пифагора (146), по заданным катетам определяем гипотенузу $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, а потом находим

$$\sin A = \frac{a}{c} \quad \text{и} \quad \sin B = \frac{b}{a},$$

по которым определяем углы A и B. Полученные результаты контролируем при помощи равенства $A + B = 90°$.

2. Согласно первому равенству (147) вычисляем $\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}$, после чего определяем угол A, а затем $B = 90° - A$; $c = \frac{a}{\sin A}$. Результаты вычислений контролируем при помощи (146):

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Выполните фактические вычисления в данной задаче.

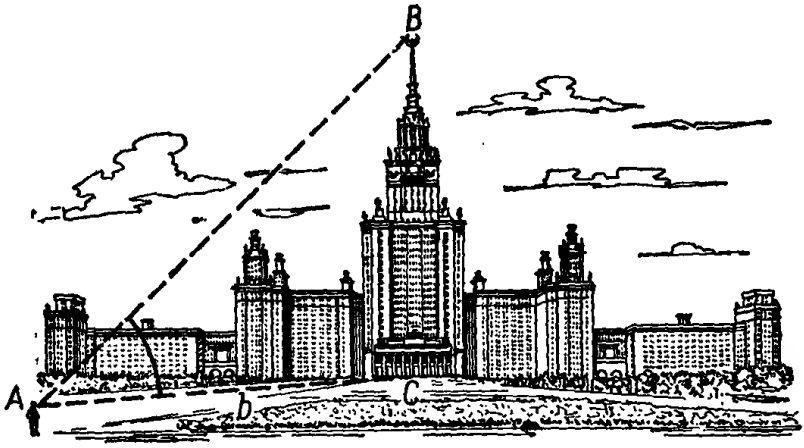


Рис. 386.

Задача 2. Определить высоту Московского университета, самого высокого университетского здания в мире, если базис $b = 137$ *м* и угол зрения $A = 60°$.

Из прямоугольного треугольника ABC по известному катету b и углу A находим катет (рис. 386):

$$a = b \operatorname{tg} A = b\sqrt{3} \approx 237 \text{ м}.$$

К полученному результату прибавляем величину роста наблюдателя.

Задача 3. Определить углы «египетского треугольника», т. е. треугольника* со сторонами $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$.

Согласно (147), имеем $\operatorname{tg} A = \frac{a}{b} = 0{,}7500$.

По известному тангенсу, пользуясь четырехзначной таблицей тригонометрических функций для градусного аргумента, находим с точностью до 0,1 градуса

$$A = 36°{,}9 = 36°54\,; \quad B = 90° - A = 53°{,}1 = 53°6'.$$

* Древним египтянам было известно, что треугольник со сторонами 3; 4; 5— прямоугольный. Этим они пользовались в строительстве. Прямой угол строили так: брали веревку и на ней в точках A, B, C, D завязывали узлы так, чтобы $AB=5$, $BC=4$, $CD=3$. Расположив отрезок CB вдоль заданного направления и соединив узлы A и D туго натянутой веревки, получали треугольник, у которого угол C прямой.

Упражнения. Решить прямоугольные треугольники:
а) даны катет и гипотенуза $a = 2{,}5$ *м*; $c = 3{,}7$ *м*;
б) даны угол и гипотенуза $A = 39°$; $c = 138{,}1$ *см*;
в) даны угол и катет $A = 57°$; $b = 17{,}8$ *дм*;
г) даны два катета $a = 27{,}5$ *см*, $b = 83{,}4$ *см*.

§ 64. Применение тригонометрических функций к решению планиметрических задач

Соотношения между элементами треугольника, приведенные в предыдущем параграфе, применяются к решению самых разнообразных планиметрических задач, так как любую прямолинейную фигуру всегда можно разбить на ряд треугольников. Рассмотрим несколько задач.

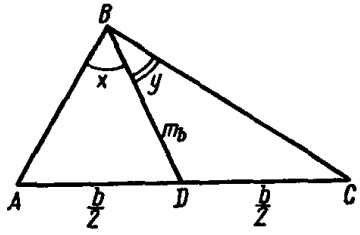


Рис. 387.

Задача 1. Доказать, что медиана треугольника делит угол при вершине на части, синусы которых пропорциональны синусам соответствующих углов при основании.

Пусть в $\triangle ABC$ BD — медиана (рис. 387). Обозначим $\angle ABD = x$, $\angle DBC = y$. Требуется доказать, что

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin A}{\sin C}.$$

Применяя теорему синусов к треугольникам ABD и BDC, получим

$$\frac{\sin x}{\sin A} = \frac{b}{2m_b} \text{ и } \frac{\sin y}{\sin C} = \frac{b}{2m_b}.$$

Отсюда

$$\frac{\sin x}{\sin A} = \frac{\sin y}{\sin C} \text{ или } \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin A}{\sin C},$$

что и требовалось доказать.

Задача 2. Доказать, что если в треугольнике со сторонами a, b, c имеет место соотношение

$$b^2 - c^2 = 2aR, \text{ то } B - C = 90°.$$

Согласно (138), имеем
$a = 2R \sin A$; $b = 2R \sin B$; $c = 2R \sin C$.
Подставляя эти значения в соотношение, приведенное в условии задачи, получим

$$4R^2\sin^2 B - 4R^2\sin^2 C = 4R^2\sin A \text{ или } \sin^2 B - \sin^2 C = \sin A.$$

Преобразуем левую часть последнего равенства, воспользовавшись формулами (57) и (58) § 54, а затем формулой (43) § 53, ч. II:

$$\sin^2 B - \sin^2 C = (\sin B + \sin C)(\sin B - \sin C) =$$
$$= 4 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} \sin \frac{B-C}{2} \cos \frac{B+C}{2} =$$
$$= \sin (B + C) \sin (B - C).$$

Тогда в соответствии с преобразованным исходным условием находим

$$\sin(B + C)\sin(B - C) = \sin A,$$

откуда, с учетом $B + C = \pi - A$ и $\sin(B + C) = \sin(\pi - A) = \sin A$, получим

$$\sin A \sin(B - C) = \sin A \text{ или } \sin(B - C) = 1.$$

Следовательно, $B - C = 90°$, что и требовалось доказать.

З а д а ч а 3. Доказать, что прямая, симметричная медиане относительно биссектрисы внутреннего угла треугольника, делит противоположную сторону на части, пропорциональные квадратам прилежащих сторон.

Пусть в $\triangle ABC$ BD — медиана, а BL — биссектриса угла B и прямая BN симметрична относительно BL медиане BD, т. е. $\angle NBL = \angle LBD$ (рис. 388). Доказать, что $AN : NC = AB^2 : BC^2$.

Обозначим $\angle ABN = \omega$ и $\angle NBL = \delta$; тогда согласно условию задачи

$$\angle NBL = \angle LBD = \delta \text{ и } \angle ABN = \angle DBC = \omega.$$

Так как у треугольника ABN и NBC высоты равны, то отрезки AN и NC относятся, как площади этих треугольников; тогда согласно (137) имеем

$$\frac{AN}{NC} = \frac{\frac{1}{2} c \cdot BN \sin \omega}{\frac{1}{2} a \cdot BN \sin(\omega + 2\delta)} = \frac{c}{a} \cdot \frac{\sin \omega}{\sin(\omega + 2\delta)}.$$

Далее, воспользовавшись результатом задачи 1 и теоремой синусов, можно записать

$$\frac{\sin \omega}{\sin(\omega + 2\delta)} = \frac{\sin C}{\sin A} = \frac{c}{a},$$

а в таком случае, подставляя в предыдущее равенство вместо отношения синусов отношение сторон треугольника, получим

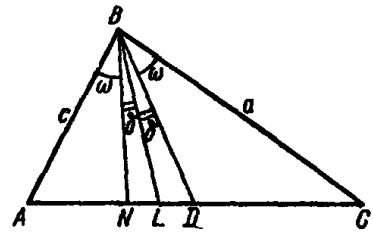


Рис. 388.

$$\frac{AN}{NC} = \frac{c}{a} \cdot \frac{c}{a} = \frac{c^2}{a^2} \text{ или } \frac{AN}{NC} = \frac{AB^2}{BC^2},$$

что и требовалось доказать.

З а д а ч а 4. Определить углы равнобедренного треугольника, зная, что его ортоцентр лежит на вписанной в треугольник окружности.

На рис. 389 изображен равнобедренный треугольник ABC, $AC = CB$, в который вписана окружность O и ортоцентр H, т. е. точка пересечения высот треугольника лежит на дуге этой окружности. Требуется определить углы треугольника. Угол A треугольника ABC обозначим через 2α, тогда $\angle OAD = \alpha$. Из прямоугольного треугольника ACD находим $\angle ACD = 90° - 2\alpha$, тогда и $\angle DCB = 90° - 2\alpha$.

Треугольник CHE прямоугольный (AE — высота), поэтому $\angle CHE = 2\alpha$, стороны которого взаимно перпендикулярны сторонам $\angle DCB$, и вертикальный ему $\angle AHD = 2\alpha$. Из $\triangle ADH$

$$\frac{2r}{AD} = \operatorname{ctg} 2\alpha,$$

где $r = OD$ — радиус вписанной окружности; из $\triangle AOD$

$$\frac{r}{AD} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Сопоставляя два последних равенства, находим

$$2\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha} \text{ или } 2\operatorname{tg}\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{2\operatorname{tg}\alpha},$$

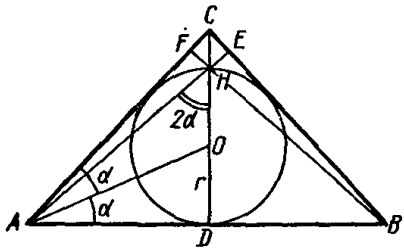


Рис. 389.

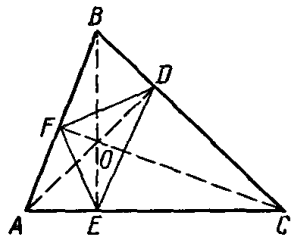


Рис. 390.

откуда $5\operatorname{tg}^2 \alpha = 1$, и, следовательно,

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{5}} = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Таким образом,

$$A = B = 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}}{5},$$

а тогда

$$C = \pi - (A + B) = \pi - 2A.$$

Ответ: $A = B = 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}}{5} \approx 2 \operatorname{arctg} 0{,}447214 = 2 \cdot 0{,}420534 = 0{,}841068$ *рад* $= 48° 11', 38$; $C = \pi - 2A = 1{,}459457$ *рад* $= 83° 37', 24$.

Задача 5. Дан треугольник ABC и AD, BE, CF — его высоты (рис. 390). Доказать, что

$$FD \cdot DE \cdot EF = \frac{2S}{R}.$$

Из планиметрии известно, что

$$\triangle ABC \sim \triangle BFD \sim \triangle DEC \sim \triangle AFE.$$

Из подобия этих треугольников находим $\frac{DE}{AB} = \frac{EC}{BC}$, но из прямоугольного треугольника BEC $\frac{EC}{BC} = \cos C$; тогда $\frac{DE}{AB} = \cos C$ или $DE = c \cdot \cos C$.

Аналогично находим $DF = b \cos B$, $FE = a \cos A$.

Складывая эти равенства, получаем

$$DE + DF + FE = a \cos A + b \cos B + c \cos C.$$

Но согласно (138) $a = 2R \sin A$; $b = 2R \sin B$; $c = 2R \sin C$, так что

$$DE + DF + FE = 2R \sin A \cos A + 2R \sin B \cos B + 2R \sin C \times$$
$$\times \cos C = R(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2c) = 4R \sin A \sin B \sin C.$$

Произведем замену $\sin A = \frac{a}{2R}$; $\sin B = \frac{b}{2R}$; $\sin C = \frac{c}{2R}$; с учетом $S = \frac{abc}{4R}$, получаем окончательно

$$DE + DF + FE = 4R \cdot \frac{abc}{8R^3} = \frac{abc}{2R^2} =$$

$$= \frac{2 \cdot \frac{abc}{4R}}{R} = \frac{2S}{R},$$

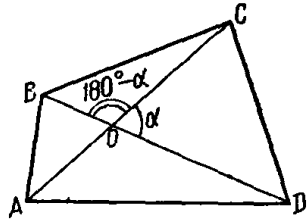


Рис. 391.

что и требовалось доказать.

Замечание. Из доказанного следует, что площадь треугольника равна произведению полупериметра треугольника, вершинами которого служат основания высот данного треугольника, на радиус окружности, описанной вокруг данного треугольника.

Задача 6. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$ и его диагонали $AC = d_1$ и $BD = d_2$ (рис. 391), причем $\angle COD = \alpha$. Определить площадь четырехугольника.

Найдем согласно первой из формул (137) площади треугольников:

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} AO \cdot OB \sin \alpha,$$

$$S_{BOC} = \frac{1}{2} BO \cdot OC \sin (180° - \alpha) = \frac{1}{2} BO \cdot OC \sin \alpha,$$

$$S_{COD} = \frac{1}{2} CO \cdot OD \sin \alpha,$$

$$S_{DOA} = \frac{1}{2} DO \cdot OA \sin (180° - \alpha) = \frac{1}{2} DO \cdot OA \sin \alpha.$$

Сложив эти равенства, получим

$$S = \frac{1}{2} \sin \alpha \, [AO \cdot OB + BO \cdot OC + CO \cdot OD + DO \cdot OA] =$$

$$= \frac{1}{2} \sin \alpha \, (AO + OC)(BO + OD) = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \alpha.$$

Таким образом, площадь четырехугольника

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \alpha,$$

что и требовалось доказать.

Упражнение. Доказать, что сумма квадратов длин хорд, соединяющих произвольную точку окружности радиуса R с вершинами правильного вписанного в эту окружность пятиугольника, равна $10R^2$.

§ 65. Применение тригонометрических функций к решению стереометрических задач

Разнообразие стереометрических задач на применение тригонометрии не дает возможности указать общие способы их решения. В каждом отдельном случае, исходя из условий задачи, выбирается тот или иной способ решения. Как правило, большинство стереометрических задач, решаемых с применением тригонометрии, допускает много различных способов решения.

При решении стереометрических задач в пространственной фигуре обычно выделяют треугольники с достаточным числом известных элементов, решая их, определяют искомые элементы пространственной фигуры.

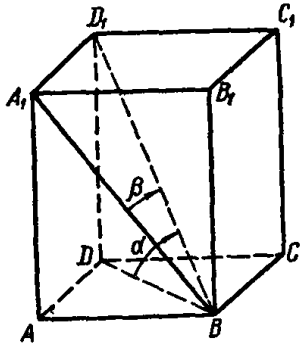


Рис. 392.

Рассмотрим несколько наиболее типичных стереометрических задач, решаемых с помощью тригонометрии.

Задача 1. Определить объем прямоугольного параллелепипеда, диагональ которого a составляет с плоскостью основания угол α, а с большей боковой гранью угол β. Вычислить этот объем при $a = 15{,}7$ *см*; $\alpha = 42°$; $\beta = 36°$ и при $a = 2{,}3$ *м*; $\alpha = 58°$; $\beta = 27°$.

Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 392), у которого диагональ $BD_1 = a$, $\angle D_1BD = \alpha$ и $\angle A_1BD_1 = \beta$.

Объем параллелепипеда $V = SH$, где S — площадь основания, а H — высота параллелепипеда.

Из $\triangle D_1BD (\angle D = 90°)$ находим $H = DD_1 = BD_1 \sin \alpha = a \sin \alpha$. Из $\triangle BA_1D$ ($\angle A_1 = 90°$) получаем $A_1D_1 = AD = BD_1 \sin \beta = a \sin \beta$ и, соответственно, $A_1B = D_1B \cos \beta = a \cos \beta$.

Из $\triangle A_1AB$ ($\angle A = 90°$) находим с учетом $AA_1 = DD_1 = a \sin \alpha$

$$AB = \sqrt{A_1B^2 - A_1A^2} = \sqrt{a^2 \cos^2 \beta - a^2 \sin^2 \alpha} = a \sqrt{\cos^2 \beta - \sin^2 \alpha}.$$

Тогда

$$S = AB \cdot AD = a^2 \sin \beta \sqrt{\cos^2 \beta - \sin^2 \alpha}$$

и, следовательно,

$$V = SH = a^3 \sin \alpha \sin \beta \sqrt{\cos^2 \beta - \sin^2 \alpha}.$$

Полученный результат можно несколько упростить, так как согласно (62) и (63), (43) и формулам приведения

$$\cos^2\beta - \sin^2\alpha = \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) - \sin^2\alpha =$$

$$= \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) + \sin\alpha\right]\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) - \sin\alpha\right] =$$

$$= 4\sin\frac{\frac{\pi}{2} - \beta + \alpha}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{2} - \beta - \alpha}{2}\sin\frac{\frac{\pi}{2} - \beta - \alpha}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{2} - \beta + \alpha}{2} =$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta + \alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta - \alpha\right) = \cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta).$$

Ответ: $V = a^3 \sin\alpha \sin\beta \sqrt{\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta)}$ *куб. ед.*

При $a = 15{,}7$; $\alpha = 42°$; $\beta = 36°$ с четырьмя значащими цифрами $\cos(\alpha + \beta) = 0{,}2079$; $\cos(\alpha - \beta) = 0{,}9945$; $V = 692{,}1$ *см*^{3} $= 0{,}6921$ *дм*^{3}. При $a = 2{,}3$ *м*; $\alpha = 58°$; $\beta = 27°$; $V = 1{,}280$ *м*^{3}.

Исследуйте, при всех ли значениях углов $0 < \alpha < 90°$ и $0 < \beta < 90°$ возможно решение этой задачи.

Задача 2. Дана прямая четырехугольная призма AC_1, у которой $S_{ABCD} = m$, $S_{ACC_1A_1} = p$, $S_{BDD_1B_1} = q$ и двугранный угол $AA_1OO_1DD_1 = \alpha$ (рис. 393). Найти объем призмы.

Объем призмы $V = SH$, где S — площадь основания, а H — высота призмы. По условию задачи площадь основания $S = m$. Нужно определить высоту призмы $OO_1 = H$ (призма прямая: $OO_1 \perp$ пл. $ABCD$).

Диагонали основания призмы $AC = \frac{p}{H}$ и $BD = \frac{q}{H}$ определяем по заданным площадям диагональных сечений $p = H \cdot AC$ и $q = H \cdot BD$.

Угол $AOD = \alpha$ как линейный угол данного двугранного угла; тогда площадь четырехугольника $ABCD$ (см. § 64, задача 6)

$$m = \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{H} \cdot \frac{q}{H} \cdot \sin\alpha,$$

откуда находим

$$H = \sqrt{\frac{pq}{2m}\sin\alpha}.$$

Определяем искомый объем

$$V = SH = \sqrt{\frac{1}{2}pqm\sin\alpha} \text{ куб. ед.}$$

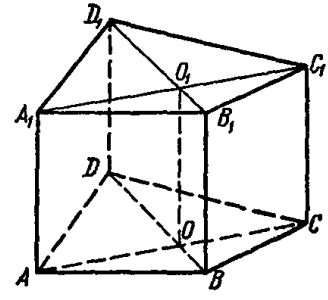


Рис. 393.

Задача 3. Разность между образующей и высотой конуса равна m, а угол между ними равен α. Найти объем конуса и вычислить его значение при $m = 5{,}8$ *см* и $\alpha = 42°$, и соответственно, $A_1B = D_1B\cos\beta = a\cos\beta$.

Дан конус SAB, у которого $SA - SO = m$ и $\angle OSA = \alpha$ (рис. 394). Обозначим $OA = R$ и $OS = H$, тогда объем конуса $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$.

Из $\triangle SOA$ находим $H = R\operatorname{ctg}\alpha$, тогда $V = \frac{1}{3}\pi R^3 \operatorname{ctg}\alpha$. Для определения R рассмотрим $\triangle AOC$. В этом треугольнике $AC = m$, $\angle OAC = 90° - \alpha$, $\angle OCA = 180° - \angle SCO = 180° - \frac{180° - \alpha}{2} = 90° + \frac{\alpha}{2}$, а $\angle AOC = 90° - \frac{180° - \alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$, так как треугольник OSC

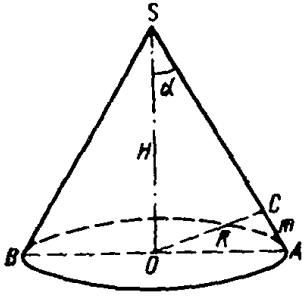


Рис. 394.

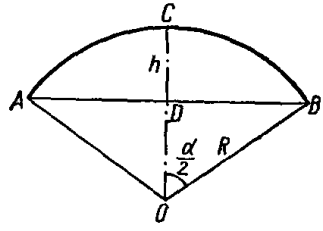


Рис. 395.

по условию задачи равнобедренный ($SO = SC$). По теореме синусов из $\triangle AOC$ находим

$$\frac{R}{m} = \frac{\sin\left(90° + \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}; \quad R = m\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

Для вычисления объема конуса получаем окончательную формулу

$$V = \frac{1}{3} m^3 \operatorname{ctg}^3\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\alpha \text{ куб. ед.}$$

При $m = 5{,}8$ см и $\alpha = 42°$ имеем с четырьмя значащими цифрами

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = 2{,}605; \quad \operatorname{ctg} 42° = 1{,}111; \quad \left(m\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)^3 = 3449{,}1;$$

$$V = 1277 \text{ см}^3 = 1{,}277 \text{ дм}^3.$$

З а д а ч а 4. Высота шарового сегмента h; дуга в осевом сечении равна α. Определить площадь сферической поверхности сегмента.

Р е ш е н и е: По условию задачи $CD = h$, $\angle AOB = \alpha$ (рис. 395). Найти площадь сферической поверхности сегмента (на рис. 395 — сечение сегмента). Площадь сферической поверхности сегмента $S = 2\pi Rh$, где R — радиус сферической поверхности, а h — высота сегмента.

Рассмотрим треугольник ODB, в котором $OD = R - h$, $OB = R$. Из этого треугольника находим

$$\frac{OD}{OB} = \cos\frac{\alpha}{2} \text{ или } \frac{R - h}{R} = \cos\frac{\alpha}{2},$$

откуда

$$R = \frac{h}{1 - \cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{h}{2\sin^2\frac{\alpha}{4}}.$$

Подставим это значение в формулу для S; после очевидных упрощений получаем окончательный ответ:

$$S = \frac{\pi h^2}{\sin^2\frac{\alpha}{4}} \text{ кв. ед.}$$

Задача 5. Определить угол между образующей и плоскостью основания конуса, объем которого в m раз больше объема вписанного в конус шара. Вычислить этот угол при $m = 2$.

Решение. Пусть шар O вписан в конус SAB (рис. 396). По условию $V_{\text{кон}} = mV_{\text{шара}}$. Обозначим искомый $\angle SAD = \alpha$ радиусы $AD = R$, $OD = r$ и высоту $SD = H$. Тогда

$$\frac{4}{3}m\pi r^3 = \frac{1}{3}\pi R^2 H \text{ или } 4mr^3 = R^2 H.$$

Из треугольников ADS и ADO $\left(\angle OAD = \frac{\alpha}{2}\right)$ находим

$$r = R\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \text{ и } H = R\operatorname{tg}\alpha.$$

Подставляя эти значения в предыдущее равенство, получим

$$4mR^3\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2} = R^3\operatorname{tg}\alpha \text{ или } 4m\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Так как $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} > 0$, то, сократив полученное уравнение на $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ и избавившись в нем от знаменателя, приходим к биквадратному уравнению относительно $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$

$$2m\operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2} - 2m\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + 1 = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2m}}}.$$

Отрицательные корни уравнения не пригодны к решению данной задачи, поэтому окончательно получим

$$\alpha = 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2m}}}.$$

Найденное решение имеет смысл, если $\frac{1}{4} - \frac{1}{2m} \geqslant 0$, т. е. если $m \geqslant 2$.

Ответ: $\alpha = 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2m}}}$ $(m \geqslant 2)$.

При $m = 2$, ограничиваясь четырьмя значащими цифрами, имеем $\alpha = 2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\operatorname{arctg} 0{,}7071 = 2 \cdot 0{,}6155 = 1{,}231$ радианов $= 70°, 53 = 70° 32'$.

Задача 6. В правильной четырехугольной пирамиде плоский угол при вершине равен α; высота h пирамиды служит диаметром шара. Найти длину кривой пересечения их поверхностей и вычислить ее при $\alpha = 0{,}46$ радианов; $h = 10{,}7$ *см*.

Решение. Даны правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ и шар O_1, диаметром которого служит высота пирамиды $SO = h$; плоский угол при вершине пирамиды $\angle BSC = \alpha$ (рис. 397). Найти длину линии, по которой поверхность шара пересекается с поверхностью пирамиды.

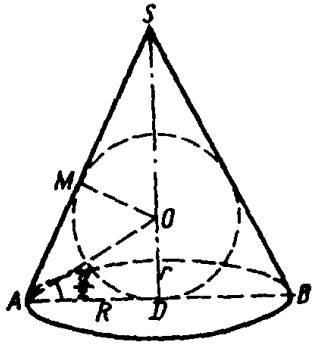


Рис. 396.

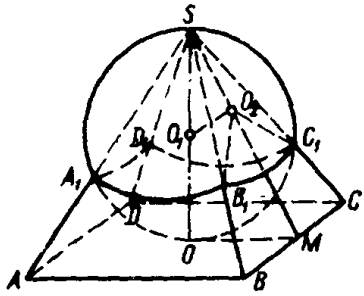


Рис. 397.

Искомая линия состоит из четырех равных дуг окружностей, по которым пересекаются плоскости боковых граней пирамиды с поверхностью шара. Поэтому для решения задачи достаточно найти длину одной из этих дуг.

Найдем длину дуги B_1C_1, по которой грань пирамиды BSC пересекается с поверхностью шара.

Плоскость грани BSC пересекается с поверхностью по окружности, центр которой O_2 найдем, опустив из центра шара перпендикуляр O_1O_2 на плоскость этой грани.

Угол $B_1SC_1 = \alpha$ является вписанным в окружность O_2 и опирается на дугу B_1C_1, поэтому длина искомой дуги B_1C_1 определяется формулой

$$\smile B_1C_1 = 2\alpha r,$$

где α — данный угол в радианах, а $r = O_2S =$ радиус окружности O_2.

Для определения радиуса r рассмотрим подобные прямоугольные треугольники SO_1O_2 и SOM. Из подобия этих треугольников

$$\frac{O_2S}{SO_1} = \frac{SO}{SM},$$

откуда с учетом $SO = h$ и $SO_1 = \frac{1}{2}h$ находим

$$r = SO_2 = \frac{SO_1 \cdot SO}{SM} = \frac{h^2}{2SM}.$$

Апофему пирамиды SM определим следующим образом. Обозначим сторону основания пирамиды $BC = 2x$, тогда $OM = x$. Из $\triangle BSM$ имеем

$$SM = x \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

Далее из прямоугольного треугольника SOM по теореме Пифагора находим $SO^2 + OM^2 = SM^2$ или $h^2 + x^2 = x^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}$.

Отсюда

$$x = \sqrt{\frac{h^2}{\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1}} = \frac{h \sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\cos \alpha}}$$

и, следовательно,

$$SM = \frac{h \sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\cos \alpha}} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{h \cos \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\cos \alpha}}.$$

Тогда

$$r = \frac{h^2}{2SM} = \frac{h \sqrt{\cos \alpha}}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}.$$

Подставляя найденное значение r в формулу для длины дуги B_1C_1, имеем

$$\smile B_1C_1 = 2\alpha r = \frac{\alpha h \sqrt{\cos \alpha}}{\cos \frac{\alpha}{2}}.$$

Длина искомой линии пересечения поверхности пирамиды с поверхностью шара равна учетверенной длине дуги B_1C_1, поэтому окончательно получаем

$$l = \frac{4\alpha h \sqrt{\cos \alpha}}{\cos \frac{\alpha}{2}},$$

где α есть угол при вершине пирамиды, измеренный в радианах.

При $h = 10{,}7$ *см* и $\alpha = 0{,}46$ радиана, ограничиваясь вычислениями с четырьмя значащими цифрами, имеем (см. «Четырехзначную таблицу тригонометрических функций для радианного и абстрактного аргументов»):

$$\cos \frac{\alpha}{2} = 0{,}9737; \quad \cos \alpha = 0{,}8961; \quad \sqrt{\cos \alpha} = 0{,}9466;$$

$$l = 19{,}14 \text{ } см.$$

Упражнение. В шар радиуса R вписана правильная треугольная пирамида с плоским углом α при вершине. Определить высоту пирамиды.

ЛИТЕРАТУРА

1. Адамар Ж. Элементарная геометрия, ч. 1, ч. 2. Учпедгиз, М., 1957, 1958.
2. Александров И. И. Сборник геометрических задач на построение. Учпедгиз, М., 1950.
3. Антонов Н. П. и др. Сборник задач по элементарной математике. Учпедгиз, М., 1964.
4. Барыбин К. С. Сборник геометрических задач на доказательство. Учпедгиз, М., 1952.
5. Берман А. Ф., Люстерник Л. А. Тригонометрия. Гостехиздат, М., 1956.
6. Брадис В. М. Средства и способы элементарных вычислений. Учпедгиз, М., 1954.
7. Бугай А. С. Краткий толковый математический словарь. «Радянська школа», К., 1964.
8. Выгодский М. Я. Справочник по элементарной математике. «Наука», М., 1965.
9. Депман И. Я. История арифметики. Учпедгиз, 1959.
10. Залогин Н. С. Конкурсные задачи по математике. Гостехиздат, 1964.
11. Киселев А. П. Геометрия. «Просвещение», М., 1951.
12. Коровкин П. П. Неравенства. ГИТТЛ, М.—Л., 1951.
13. Крылов А. Н. Лекции о приближенных вычислениях. Гостехиздат, М.— Л., 1954.
14. Кущенко В. С. Сборник конкурсных задач по математике. «Судостроение». Л., 1964.
15. Линдский В. Б. и др. Задачи по элементарной математике. Физматгиз, М., 1963.
16. Лоповок Л. М. Сборник задач по стереометрии. «Радянська школа», К., 1955.
17. Мантуров О. В. и др. Толковый словарь математических терминов. «Просвещение», М., 1965.
18. Моденов П. С. Сборник задач по математике. «Советская наука», М., 1952.
19. Новоселов С. И. Специальный курс элементарной математики. «Советская наука», М., 1951.
20. Новоселов С. И. Тригонометрия. Учпедгиз, М., 1956.
21. Погребиський І. Б., Фільчаков П. Ф. Тригонометрія. «Радянська школа», К., 1954.

22. Позойский Р. И. Сборник задач по тригонометрии. «Радянська школа», К., 1953.
23. Рыбкин Н. И. Сборник задач по геометрии. Учпедгиз, М., 1962.
24. Рыбкин Н. И. Сборник задач по тригонометрии. Учпедгиз, М., 1950.
25. Рывкин А. А., Рывкин А. З., Хренов Л. С. Справочник по математике. «Высшая школа», М., 1964.
26. Серпинский В. И. Что мы знаем и чего не знаем о простых числах. Физматгиз, М., 1959.
27. Смогоржевский А. С. Исследование задач на построение. «Радянська школа», К., 1961.
28. Стражевский А. А. Задачи на геометрические места точек в курсе геометрии средней школы. Учпедгиз, М., 1954.
29. Стратилатов П. В. Сборник задач по тригонометрии. Учпедгиз, М., 1957.
30. Трост Э. И. Простые числа. Физматгиз, М., 1959.
31. Худобин А. И., Худобин Н. И. Сборник задач по тригонометрии. Учпедгиз, М., 1955.
32. Четверухин Н. Ф. Методы геометрических построений. Учпедгиз, М., 1938.
33. Шахно К. У. Сборник задач по математике повышенной трудности. Минск, 1964.
34. Шахно К. У. Справочник по математике. Учпедгиз, М., 1961.
35. Шнманский Р. И. Тригонометрия. «Радянська школа», К., 1961.
36. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Гостехиздат, М., 1954.
37. Яглом И. М. Геометрические преобразования, т. 1, т. 2. Гостехиздат, М., 1955, 1956.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абсолютная величина 77
— погрешность 49
Абсцисса 204
Абуль-Вефа Мухамед-бен Мухамед 237
Аксиома 319
— Архимеда 315, 321
— индукции 308
— о параллельных прямых 321
Аксиом классификации 319
— система 319
Аксиомы конгруэнтности 320
— линейной полноты 321
— непрерывности 321
— порядка 320
— соединения 319
Алгебра 72
Алгебраическая сумма 78
Алгебраические дроби 92
— уравнения 112
Алгебраический метод решения задач на построение 418
Алгоритм Евклида 26
аль-Батани 237
Амплитуда колебаний 266
Аналитическая геометрия 312
Аполлоний 416
Апофема правильного многоугольника 389
— правильной пирамиды 451
— усеченной пирамиды 456
Аргумент 202, 259
— абстрактный 260
— вспомогательный 258
— половинный 252, 258
Аристотель 404
Арифметика 5
Арифметические действия 9
Арифметическое значение квадратного корня 97
Арккосинус 244, 289
Арккотангенс 245, 290
Арксинус 244, 288
Арктангенс 245, 290
Архимед 349, 379
Архимеда аксиома 315
Бесконечная прямая 313
Биквадратное уравнение 189
Биллион 8
Бином 81
— Ньютона 198
Биссектриса внешнего угла треугольника 339
— угла 324
— треугольника 338
Боковая поверхность конуса 473, 474
— — отрезка цилиндра 470
— — пирамиды 452
— — призмы 444
— — трубы 470
Боковая поверхность усеченного конуса 476
— — — цилиндра 469
— — усеченной пирамиды 456
— — цилиндра 467, 468
Боковые грани пирамиды 450
— — призмы 443
Боковые ребра пирамиды 450
— — призмы 443
— стороны трапеции 360
Большой круг шара 481
Брианшон Ш. Ж. 386
Бхаскара 237
Ван Цейлен 379
Величины 53
— обратно пропорциональные 211
— переменные 202
— постоянные 202
— прямо пропорциональные 210

Вершина конической поверхности 473
— конуса 473
— ломаной 313
— многогранного угла 440
— многоугольника 328
— пирамиды 450
— угла 237, 323
Взаимно однозначное соответствие 100
Виета Ф. 74, 237
Вневписанная в треугольник окружность 337
Внешнее деление 317
— касание окружностей 369
Внешний угол треугольника 331
Внешняя касательная к двум окружностям 369
Внутренняя касательная к двум окружностям 369
Возведение в степень 78
Вписанный многоугольник 385
— треугольник 386
— угол 375
— шар 488
Вспомогательный аргумент 258
Вынесение за скобки 90
Выпуклая ломаная 313
Выпуклый многогранный угол 440
Выражения арифметические 80
— алгебраические 80
— дробные 92
— иррациональные 103
— рациональные 81
— тождественные 82
— целые 81
Высота конуса 473
— отрезка цилиндра 469
— параллелограмма 355
— пирамиды 451
— призмы 443
— сегмента 381
— сегментной поверхности 482
— трапеции 360
— треугольника 336
Высота усеченного конуса 476
— усеченной пирамиды 456
— цилиндра 467
— шарового пояса 482
Вычитаемое 9
Вычитание 9
— дробей алгебраических 94
— — десятичных 42
— — обыкновенных 36
Вычитание многочленов 84
— одночленов 84
— отрезков 314
— чисел именованных 59
— — комплексных 177
— — рациональных 78
— — систематических 29
Галилей Г. 445
Гармоническая группа точек 318
Гармонические колебания 266
Гармонически сопряженные точки 319
Гармоническое разделение 318, 319
Гексаэдр 462
Геометрия 311, 312
— аналитическая 312
— дифференциальная 312
— начертательная 312
— проективная 312
Геометрическое место точек 404
— изображение комплексных чисел 178
Гильберт Д. 319
Гипербола 480
Гиппарх 236
Гониометрия 237
Градус 238, 325
Грани двугранного угла 434
— многогранника 443
— многогранного угла 440
Граничная абсолютная погрешность 49
— относительная погрешность 49
График функции 204
Гюльден П. 483
Гюльдена теорема 483, 484
Двугранный угол 434
Действия первой ступени 16
— второй ступени 16
— над углами 324
— с отрезками 314
Декарт Р. 312
Деление 317
— внешнее 317
— внутреннее 317
— дробей алгебраических 95
— — десятичных 43
— — обыкновенных 38
— — многочленов 86
— на равные части 59
— одночленов 86
— отрезка в заданном отношении 317
— отрезка в среднем и крайнем отношении 317

Деление отрезка на число 314
— по содержанию 160
— радикалов 111
— с остатком 10
— чисел именованных 59
— — комплексных 177
— — рациональных 78
— — систематических 30
Делимое 10
Делитель (компонент) 10
Делитель числа 25
Десятичные знаки 40
Детерминант 133
Диагонали квадрата 358
— многогранника 329, 443
— многоугольника 329
— параллелепипеда 444
Диагонали параллелограмма 355
— ромба 357
Диагональная плоскость многогранника 443
— — призмы 443
Диагональное сечение призмы 443
Диаметр окружности 365
— сферы 481
Дискриминант 144
Дифференциальная геометрия 312
Длина дуги окружности 380
— окружности 378
Длина дуги отрезка 316
Додекаэдр 462
Доказательство 321
Доли единицы 31
Достаточные условия 322
Дробь алгебраическая
— десятичная 40
— неправильная 32
— обыкновенная 31
— правильная 32
Дуга 365
— отрицательная 239
— положительная 239
Евклид 311
Единицы измерения площади 348
Задачи арифметические 64
— на движение 70
— на доказательство 64
— на вычисление 64
— на исследование 64
— на пропорциональное деление 68
— на проценты 46
— на смешение 69
— на тройное правило 65
— неопределенные 65
Задачи определенные 65
— противоречивые 65
— простые 65
— составные 65
Заключение теоремы 321
Законы сложения 11
— умножения 12
Знаки противоположные 76
Знаменатель дроби 31
— геометрической прогрессии 305
Замкнутая ломаная 313
Значения допустимые 81
— недопустимые 80
Золотое сечение 317, 318
Извлечение корня 97
— — из дроби 105
— — — комплексного числа 178
— — — приближенного числа 98
Измерение двугранных углов 435
— дуг 237, 238
— отрезков 316
— площади 348
— углов 237, 238
Измерения прямоугольного параллелепипеда 444
Икосаэдр 462
Инверсия 414
Исследование системы уравнений
Кавальери Б. 445
Касательная 336
Касающиеся окружности 369
Квадрат 358
— многочлена 88
— разности 88
Квадрат разности неполный 89
— суммы 88
— — неполный 89
Квадриллион 8
Квинтиллион 8
Кеплер И. 237
Классификация аксиом 319
— четырехугольников 364
Клин 459
Комбинаторика 192
Комбинации 193
Конечная сторона угла 238
Коническая поверхность 472
Конические сечения 480
Константы 202
Конус 473
Концентрические окружности 369
Координатные оси 204
Координаты 204
Коперник Н. 327

Кореиь квадратный 97
— -й степени 103
— уравнения 120
Косеканс 241
Косинус 240
Косинусоида 263
Котангенс 241
Котангенсоида 264
Коэффициент подобия 346
Коэффициенты 81
— биномиальные 199
— пропорциональности 210
Кривые второго порядка 480
Круг 366
Круглые тела 467
Круговой конус 473
— цилиндр 467
Куб 444
— разности 89
— суммы 89
Лемма 321
Линдеман Ф. 379
Линейный угол двугранного угла 434
Линия 313
— центров 369
Лобачевский Н. И. 312
Логарифм 218
— корня 222
— произведения 221
— степени 222
частного 222
Логарифмирование 221
Логарифмы десятичные 221
Логарифмы натуральные 218
Логарифмическая функция 218
Логарифмические вычисления
Ломаная линия 313
Луч 313
Максимум 207
— локальный 207
Малый круг шара 482
Мантисса 223
Математическая индукция 308
Медиана треугольника 337
Мера 53
— угла 325, 441
Меры английские 54
— метрические 54
— русские старые 53
Метод геометрических мест 404
— инверсии 414
— параллельного переноса 413
— подобия 408
Метод симметрии 410, 411
Методы графические 215
Метр 56
Минимум 207
— локальный 203
Минута 325
Мнимая единица 175
Многогранник 443
— выпуклый 443
— звездчатый 462
Многоугольник 328
— вписанный 385
— выпуклый 329
— звездчатый 329
— описанный 385
— правильный 329, 389
Многогранник простой 329
Многоугольники геометричные 345
Многоугольников подобие 345
Многочлен 81
Множество 192
— бесконечное 192
— конечное 192
— пустое 192
— упорядоченное 192
Множимое 10
Множитель 10
Модуль комплексного числа 179
— перехода 221
Мюллер И. 237
Наклонная к плоскости 427
Накрестлежащие углы 327
Направляющая 467
— конической поверхности 472
— цилиндрической поверхности 467
Насиреддин Тусн Мухамед 237
Натуральный ряд 6
— — расширенный 8
Начальная сторона угла 238
— фаза 267
Начертательная геометрия 312
Неизвестное (в уравнении) 119
Независимость системы аксиом 319
Необходимое условие 322
Необходимый и достаточный признак 323
Непротиворечивость системы аксиом 319
Неравенства 161
— буквенные 162
— высших степеней 172
— второй степени 171
— дробные 173
— замечательные 165

Неравенства иррациональные 174
— нестрогие 161
— первой степени 167
— равносильные 167
— с неизвестными 167
— тождественные 162
— числовые 162
Неравенство двугранных углов 434
Неравенство отрезков 314
Несоизмеримые отрезки 315
Нечетность тригонометрических функций 250
— функции 208
Нуль 8
Нумерация письменная 7
— устная 6
Ньютон И. 198, 379
Обелиск 459
Область изменения функции 205
— определения функции 205
Образующая 467
— конической поверхности 473
— конуса 473
— усеченного конуса 476
— цилиндра 467
— цилиндрической поверхности 467
Обратная теорема 321
— дробь 39
Обратные круговые функции
— тригонометрические функции 288
— числа 39
— функции 209
Общая мера двух отрезков 316
Общее кратное 26
— — наименьшее 26
Общий делитель 25
Общий член последовательности 297
Объем геометрического тела 445
— клина 459
— конуса 474
— куба 445
— обелиска 459
— отрезка цилиндра 470
— параллелепипеда 445
— пирамиды 452
— полного цилиндра 470
— призмы 445
— шара 485
— шарового сегмента 485
— — сектора 484
— — цилиндра 469
— усеченного конуса 476
— — цилиндра 469
— усеченной пирамиды 456
Однородное уравнение 272
Односторонние углы 327
Одночлены 81
— подобные 83
Округление чисел 48
— — с избытком 48
— — с недостатком 48
Окружность 365, 480
— вписанная 385
— инверсии 414
— описанная 385
Октаэдр 462
Описанный угол 375
— шар 488
Определение 321
Определитель второго порядка 133
— третьего порядка 137
— системы 133
Ордината 204
Ортоцентр 326
Осевая симметрия 410
Оси координатные 204
Основание конуса 473
— логарифма 218
— параллелограмма 355
— пирамиды 450
— сегмента 381
— сегментной поверхности 482
— системы счисления 27
— степени 11
— усеченного конуса 476
— усеченной пирамиды 456
Основание трапеции 360
— шарового пояса 482
Основания призмы 443
— цилиндра 467
Основные соотношения для обратных тригонометрических функций 291
Основные тригонометрические тождества 245
Острый угол 325
Остаток 10
Ось абсцисс 204
— конической поверхности 473
Ось котангенсов 241, 242
— ординат 204
— пучка 426
— радикальная 384
— тангенсов 241, 242
— усеченного конуса 476
— числовая 76
Отношение 61
— антисимметричное 61

Отношение нерефлексивное 61
— порядка 61
— подобия 346
— рефлексивное 61
— симметричное 61
— транзитивное 61
— эквивалентное 61
— отрезков 316
— чисел 60
— — кратное 61
Отношение чисел процентное 47
— — разностное 61
Отрезки несоизмеримые 315, 316
— пропорциональные 316
— равные 314
— соизмеримые 315, 316
Отрезков измерение 315
— отношение 316
Отрезок ориентированный 314
— прямой 313
Отрезок цилиндра 469
Парабола 480
Параллелепипед 443
— наклонный 444
— прямой 444
— прямоугольный 444
Параллелограмм 355
Параллелограмма признаки 357
Параллельные сечения 451
Параллельные плоскости 426, 430, 432
— прямые 326, 430
Паскаль Б. 386
Первичные понятия 312
Переменная зависимая 202
— независимая 202
Пересечение окружностей 369
Перестановка 192
— членов пропорции 63
Периметр 329
Период 260
Период десятичной дроби 43
— функции 208
Периодическая десятичная дробь 43
— — — смешанная 44
— — — чистая 43
Период колебаний 266
Периодичность тригонометрических функций 260
Перпендикуляр 427
Перпендикулярная плоскость 434
Перпендикулярные прямые 324
— плоскости 434, 435
— сечения 443
Пирамида 450
— правильная 451
— усеченная 456
Пифагор 333
Планиметр 348
Планиметрия 311
Платон 462
Плоские сечения многогранников 464
Плоский угол 323
Плоскость 313, 425
— касательная к шару 481
Площадь 348
— квадрата 359
— кольца 381
— круга 380
Площадь параллелограмма 355
— прямоугольника 357
Площадь ромба 358
— сегмента 380
— сектора 380
— трапеции 360
— треугольника 349
— фигур 348
— четырехугольника 503
Поверхность 312
— клина 459
— обелиска 459
— пирамиды 452
— полого цилиндра
— шара 482
— шарового пояса 482
— — сегмента 482
Подвижный луч 238
Подкоренное выражение 97
Подмножество несобственное 192
— собственное 192
Подобие многогранников 460
— многоугольников 342, 345
— треугольников 342
Подобные конусы 477
— цилиндры 477
— фигуры 432, 345, 346
Показатель степени II
— дробный 116
— нулевой 116
— отрицательный 116
Полином 81
Полная поверхность конуса 474
— — параллелепипеда 444
— — пирамиды 452
— — призмы 444
— — усеченного конуса 476
— — — цилиндра 469

Полная поверхность усеченной пирамиды 456
— — цилиндра 468
— — цилиндрической трубы 470
Полнота системы аксиом 319
Полный угол 325
Половинный аргумент 252, 258
Полуинтервал 206
Полупериметр 329
Полуплоскость 434
Полупрямая 313
Полусегмент 206
Полый цилиндр 470
Порядок действий 16
Последовательность 297
— бесконечная 297
— возрастающая 301
— конечная 297
— неубывающая 301
— монотонная 301
— ограниченная 300
— расходящаяся 298
— постоянная 297
Последовательность числовая 297
Потенцирование 222
Правило девятки 18
— Крамера 134
— подсчета цифр 50
— тройное простое 65
— — сложное 66
Правильные многогранники 461
— многоугольники 389
Превращение дробей 41
— именованных чисел 58
Предел последовательности 298
Преобразование инверсии 414
Призма 443
Призма наклонная 444
— правильная 444
— прямая 444
Признаки делимости
— равенства треугольников 331,341
— — трехгранных углов 441
— подобия трехугольников 342
— — прямоугольных треугольников
Принцип Кавальери 445
— А. Н. Крылова 50
Проверка действий 17
Прогрессия арифметическая 303
— геометрическая 305
— — бесконечно убывающая 306
Проективная геометрия 312
Проекция прямоугольная 427
Произведение 10
Производные пропорции 63
Промежуток
— замкнутый 205
— открытый 206
Промилле 45
Пропорциональные отрезки 316
Пропорциональный циркуль 315
Пропорция 316
Простая теорема 321
Простейшие тригонометрические уравнения 268
— — неравенства 268
Противоположная теорема 321
Проценты 45
Прямая теорема 321
Прямой двугранный угол 435
— круговой цилиндр 467
— угол 323
Прямоугольник 357
Прямоугольная проекция 427
Птолемей К. 236, 386
Пучок параллельных прямых
Пучок плоскостей 426
— прямых 326
Равенство
— двугранных углов 434
— многогранных углов 440
— отрезков 314
— плоских углов 323
— треугольников 331, 341
— трехгранных углов 441
Равенство фигур 425
Равновеликие тела 445
Равносильные неравенства 167
— уравнения 121
— системы уравнений 129
Радиан 238, 325
Радикалы 97
— подобные 109
Радикальная ось 384
Радикальный центр 384
Радиус 365
— вписанной в треугольник окружности 336, 386
— окружности, описанной около треугольника 386
— основания конуса 473
— правильного многоугольника 389
— сферы 481
— цилиндра 468
Радиусы вневписанных окружностей 336
Радиусы оснований усеченного конуса 476

Развернутый угол 323
Развертка конуса 474
— усеченного конуса 476
— цилиндра 469
Размещения 195
Разложение на множители многочленов
— — — чисел
Разность 9
— арифметической прогрессии 303
— квадратов 88
— кубов 89
Разность отрезков 314
Рациональные числа
Ребро двугранного угла 434
Ребра многогранника 443
— пирамиды 450
— призмы 443
Регномонтан 237
Решение неравенств 282
— систем уравнений 280
— уравнений 267, 268
— — графическим способом 297
Решето Ератосфена 23
Романус 379
Ромб 357
Рихтер 379
Свойства логарифмов 219
— — десятичных 223
— неравенств тождественных 162
— — с неизвестными 167
— плоскости 425
— прямой 313
— равных отношений 64
— радикалов 103
Свойства сечений пирамиды 451
— уравнений 121
— функций 205
Сегмент 366
Сегментная поверхность 482
Секанс 241
Секстиллион 8
Секунда 325
Секущая 365
— плоскость 443
Сектор 366
Септиллион 8
Сечение многогранника плоскостью 443
Сечение шара плоскостью 481
Симметрия 410
— относительно оси 410
— — точки 410
Синус 240
Синусоида 260
Синусоидограф 261
Система аксиом 319
— тригонометрических уравнений 280
Системы неравенств 169
— уравнений 129, 280
Скобки 17
Скрещивающиеся прямые 426
Слагаемые 9
Сложение дробей алгебраических 94
— — десятичных 42
— — обыкновенных
— многочленов 84
— одночленов 84
— отрезков 314
— радикалов 109
— чисел действительных 101
— — именованных 59
Сложение дробей комплексных 177
— — рациональных 177
— — систематических 29
Сложная теорема 321
Смежные углы 323, 435
Соизмеримые отрезки 315
Сокращение дробей алгебраических 93
— — десятичных 41
— — обыкновенных 34
Сомножители 10
Соответственные углы 327
Сопряженные множители 113
Способ построения следов 464
— соответствия 464
Сравнение дробей десятичных 42
— — обыкновенных 32
— чисел действительных 99
— — рациональных 77
Среднее арифметическое 165
— гармоническое 166
— геометрическое 165
— квадратическое 166
Средняя пропорциональная двух отрезков 316
— линия трапеции 360
— — треугольника 339, 340
Степень 11
— инверсии 414
— многочлена 81
— точки относительно данной окружности 384
— числа комплексного 178
Степень числа рационального 78

Стерадиан 442
Стереометрия 425
Сторона ломаной 313
Стороны угла 237, 323
Сумма 9
— внутренних углов треугольника 331
— дуг 365
— кубов
— отрезков 314
— углов 324
Сфера 481
Сходственные стороны 324
Тангенс 240
Тангенсоида 264
Тела Платона 461, 462
— Пуансо 462
Телесный угол 441
Теорема 321
— Безу 184
— Виета 186
— Пифагора 333
Теоремы о пределах 302
— о равносильных уравнениях 121
— о радикалах 105
Тетраэдр 461
Тихо Браге 237
Тождественные выражения 82
— преобразования 83
Тождественные преобразования иррациональных выражений 103
Тождество 82
Точка 313
— самопересечения ломаной 313
Транспортир 326
Трапеция 360
— прямоугольная 360
Треугольник 331
— вписанный 386
— описанный 386
— остроугольный 331
— прямоугольный 331
— равнобедренный 331
— равносторонний 331
— тупоугольный 331
Треугольник Паскаля 201
Треугольников подобие 342
— равенство 331, 341
Трехгранные углы 440
Тригонометрическая форма комплексного числа 180
— функция 240, 259
Тригонометрическое неравенство 282
— тождество 245
Тригонометрическое уравнение 267
Тригонометрия 236
Триллион 8
Тупой угол 325
Угол 237
— вписанный 375
— двугранный 434
Угол между двумя секущими 376
— между касательной и хордой 376
— — прямой и плоскостью 428
— описанный 375
— острый 325
— отрицательный 239
— положительный 239
— прямой 323, 325
— развернутый 325
— телесный 441
— тупой 325
— центральный 375
Углы вертикальные 324
— внешние 328
— внутренние 328
— многогранные 440
Углы накрестлежащие 327
— односторонние 327
— плоские 323, 440
— прилежащие 323
— равные 323
— смежные 323
— соответственные 327
— трехгранные 440
Уменьшаемое 9
Умножение дробей алгебраических 95
— дробей десятичных 42
— — обыкновенных 37
— многочленов 85
— одночленов 85
— отрезка на число 314
— радикалов 110
— чисел действительных 102
— — комплексных 177
— — натуральных 9
— — рациональных 78
— — систематических 29
Уравнения 119
— алгебраические 119
— биквадратные 189
— буквенные 119
— возвратные 190
— второй степени 153
— высших степеней 186
— двухчленные 188
— дробные 119

Уравнения иррациональные 119
— квадратные 140
— линейные 120
— логарифмические 228
— первой степени 123
— показательные 225
— равносильные 121
— симметричные 190
— трансцендентные 120
— тригонометрические 267
— трехчленные 190
— эквивалентные 121
— числовые 119
Усеченная пирамида 456
Усеченный конус 476
— цилиндр 469
Условие достаточное 322
— необходимое 322
— теоремы 321, 322
Фаза 266
Фазовый угол 266
Факториал 193
Фигура 311, 425
— пространственная 425
Формула Герона 349
— Эйлера 461
Формулы, выражающие тригонометрические функции через тангенс половинного аргумента 258
Формулы двойных углов 250
Формулы корней квадратного уравнения 143
— Мольвейде 494
— обратной пропорциональности 211
— преобразования произведения тригонометрических функций в сумму 253
— преобразования суммы тригонометрических функций в произведение 255
— приведения 248
— половинного аргумента 258
— прямой пропорциональности 210
— сложения и вычитания обратных тригонометрических функций 292
— — — — аргументов тригонометрических функций 247
— сокращенного умножения 88
— тройных углов 250
— удвоения обратных тригонометрических функций 293
Функция 202
— алгебраическая 203
Функция антье 206
— возвращающая 206
Функция квадратная 213
— линейная 211
— логарифмическая 218
— монотонная 206
— неограниченная 208
— непериодическая 208
— нечетная 208
Функция обратная 209
— ограниченная 207
— периодическая 208, 260
— показательная 217
— степенная 213
— тригонометрическая 259
— убывающая 206
— элементарная трансцендетная 203
— четная 208
Характеристика логарифма 223
Хорда 365
— круга 365
— сферы 481
Центр вписанной окружности 286
— гомотетии 345
— инверсии 414
— окружности 365
— описанной окружности 339
— подобия 345
— правильного многоугольника 389
— радикальный 384
— сферы 481
Центр тяжести треугольника 337
— шара 481
Центральная симметрия 411
Центральный угол 375
Цилиндр 467
Цилиндрическая поверхность 467
— подковка 469
— труба 470
Циркуль пропорциональный 315
Цифры 7
— арабские 7
— значащие 50
— индийские 7
— римские 7
— сомнительные 50
— точные 50
Частное 10
— неполное 10
Частота 266
— колебаний 266
Чебышев П. Л. 24, 75, 416
Четность функций 208
Четырехугольник 364

Чжан-Хен 379
Числа взаимно простые 26
— вещественные 99
— двузначные 9
— действительные 99
— дробные 31
— именованные 58
— — простые 58
— — составные 58
— иррациональные 99
Числа комплексные 175
— — противоположные 175
— — сопряженные 175
— мнимые 175
— натуральные 6
— однозначные 9
— отвлеченные 58
— отрицательные 76
— положительные 76
— приближенные 48
— простые 23
— противоположные 76
Числа рациональные 76
— смешанные 31
— систематические 27
— составные 23
— точные 48
— целые 76
— — неотрицательные 8
Числитель 31
Члены дроби 31
— отношения 60
— последовательности 297
— пропорции 62
Шар 481
Шаровая поверхность 481
Шаровой пояс 482
Шаровой сегмент 483
— сектор 483
— слой 483
Шенкс 379
Эйлер Л. 6, 184, 236, 237
Эллипс 480

Бевз Григорий Петрович
Фильчаков Павел Феодосьевич
Швецов Константин Иванович
Яремчук Федор Петрович

СПРАВОЧНИК ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В ВУЗЫ

Редактор Ю. Г. Абанина. Художественный редактор В. М. Тепляков. Оформление художника Г. М. Бамона. Технические редакторы М. А. Притыкина, Б. А. Пиковская. Корректор Л. Н. Регета.
Сдано в набор 30/XII-1970 г. Подписано к печати 1/III-1972 г. БФ 00225. Зак. №2-309. Изд. № 160. Тираж 400000. (второй завод 200000). Бумага № 3, 84 × 108/32. Печ.физ. л. 16,5. Усл. печ. л. 27,72. Учетно-изд. л. 34,21. Цена 1 руб. 33 коп.

Издательство «Наукова думка», Киев, Репина, 3.
Книжная фабрика им. М. В. Фрунзе Комитета по печати при Совете Министров УССР, Харьков, Довец-Захаржевская, 6/8